МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Процессы в нелинейных средах

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОТДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАТИКИ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М. В. КЕЛДЫША

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Процессы в нелинейных средах

Ответственные редакторы
академик А. А. САМАРСКИЙ
член-корреспондент АН СССР
С. П. КУРДЮМОВ
кандидат физико-математических наук
В. А. ГАЛАКТИОНОВ

МОСКВА «НАУКА» 1986

УДК 517.958

Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986. 312 с.

В сборнике рассмотрены наиболее интересные математические модели сложных нелинейных явлений в физике, технике, химии, биологии. Изложена современная методика их анализа. Статьи написаны ведущими специалистами по математической физике и биофизике, теории дифференциальных уравнений, общей теории численных методов и алгоритмов, численному исследованию прикладных задач механики и физики плазмы.

Сборник предназначен для специалистов в области прикладной математики, математической физики и математического моделирования на ЭВМ, а также для аспирантов соответствующих специальностей.

Рецензенты:

А. А. АРСЕНЬЕВ, А. В. ГУЛИН

М $\frac{1502000000\text{-}168}{042(02)\text{-}86}$ 96-86—I

© Издательство «Наука», 1986 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга «Математическое моделирование» («Процессы в нелинейных средах») открывает цикл сборников научных работ, призванных показать основные направления развития математического моделирования в различных областях физики, техники, химии, биологии и других наук, в которые в настоящее время все сильнее внедряется методология математического моделирования на ЭВМ. В дальнейшем для публикации подобных материалов было бы желательно, на мой взгляд, создание нового научного журнала «Математическое моделирование». Поэтому данный и последующие сборники преследуют и другие цели — выявить круг потенциальных читателей и одновременно вести пропаганду нового научного направления.

Может возникнуть вопрос: почему в полной мере нельзя достичь этих целей в рамках имеющихся специальных научных изданий? Дело в том, что, как показывает опыт работы, идеология вычислительного эксперимента, математического моделирования на ЭВМ является той основой, на которой может произойти и происходит в настоящее время объединение результатов, полученных в процессе поиска общих закономерностей и методологических основ, заложенных в различных сложных физических, химических, биологических, социологических и других моделях. Последовательное проведение этого актуального и перспективного подхода в рамках существующих научных сборников и журналов со сложившейся тематикой и четко определенным кругом читателей вряд ли возможно.

В настоящее время является общепризнанным тот факт, что без применения вычислительного эксперимента практически невозможно провести сколько-нибудь исчерпывающее исследование сложного процесса. Свидетельством этого является создание в самое последнее время нового Отделения Академии наук СССР — Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации, объединившего крупнейших ученых в области электроники, программирования, вычислительной и прикладной математики. Нечто похожее должно произойти на страницах научных изданий — в частности, в рамках нового сборника «Математическое моделирование».

Еще один вопрос: будут ли интересны статьи сборника широкому кругу читателей, работающих в различных областях науки и техники, и вообще, будут ли понимать друг друга даже сами авторы? Можно ли выделить методологическую основу различных математических моделей самых разнообразных процессов? Этого можно достичь, если предъявить особые требования к форме и стилю изложения научных результатов. Достаточная популярность изложения полученных общих закономерностей — это основа объединения интересов широкого круга научных работников.

Здесь уместно выделить две, наверное самые важные, черты современного математического моделирования. Это, во-первых, нелинейность рассматриваемых моделей, которая в свою очередь влечет за собой, можно сказать, «непредсказуемость» основных направлений протекания процесса как результат отсутствия принципа суперпозиции, характерного для задач линейной математической физики. И во-вторых, это эволюционность явлений на всех макро- и микромасштабах, которая вместе с нелинейностью приводит к появлению большого многообразия возможных путей эволюции и в конечном итоге к своеобразной «неединственности» направления развития процесса.

Надо сказать, что подобные (весьма полные и законченные) исследования некоторых сложных математических моделей уже выполнены. Однако в настоящее время при наличии существенной дифференциации наук нередко полученные закономерности, которые носят общий характер, практически не доходят до специалистов из других областей знаний просто в силу того специфического языка, которым пользуются ученые в рамках своей специальности.

Этот барьер можно и нужно в значительной степени устранить. Исследование сложных нелинейных процессов требует своего единого для всех математического и вычислительного аппарата исследования. Сейчас отчетливо видна необходимость объединения специалистов разного профиля на общей методологической платформе. В настоящий период всемерного ускорения научно-технического прогресса только кооперация в рамках больших научных регионов и в перспективе — ученых разных специальностей всей страны, занимающихся математическим моделированием, позволит решить те задачи, которые ставит перед нами бурное развитие науки и техники.

Теперь об общих требованиях к тому материалу, который будет направляться в сборник «Математическое моделирование».

Предполагается, что в процессе комплексного исследования сложных нелинейных явлений должна широко использоваться методология вычислительного эксперимента. Поэтому в предлагаемых статьях значительное место будет уделено изложению численных результатов, которые, с одной стороны, позволяют проверить теоретические оценки и представления, а с другой — часто служат основой для развития теории. Это, в частности, предусматривает широкое использование графического материала, полученного с помощью ЭВМ и наглядно и компактно отражающего существо новых эффектов и явлений. Кроме того, каждая статья должна содержать развернутое введение, доступное широкому кругу специалистов, как теоретиков, так и экспериментаторов.

Работы, входящие в настоящий сборник, разноплановы по тематике. Это и задачи физики плазмы и теории горения в сплошных средах, задачи, характерные для химических и биологических сред, задачи, затрагивающие многие технологические вопросы, связанные с изучением тепло- и массопереноса, теории трения, смазки и износа. Как уже отмечалось, их объединяет общность подхода, основан-

ного на широком использовании вычислительного эксперимента с его основополагающей триадой «модель—алгоритм—программа».

Вычислительный эксперимент всегда сопровождается выделением отдельных процессов из полного комплекса и более подробным изучением их на ряде модельных задач. Широко развит подход, базирующийся на использовании инвариантно-групповых методов, позволяющих свести одномерные нестационарные задачи в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Особенности, методы и приемы такого подхода продемонстрированы в статье П. П. Волосевича и Е. И. Леванова.

Для формулировки новых моделей процессов огромную роль играет синтез опыта, интуиции профессионалов, работающих в каждой области, с глубоким пониманием современной теории нелинейных уравнений в частных производных. Как показывают работы данного сборника, несмотря на широту рассматриваемой тематики, большинство изучаемых моделей основываются на ограниченном числе уравнений в частных производных (уравнения гидродинамики, теплопроводности, уравнения Власова и др.). Поэтому одна из задач сборника состоит в том, чтобы познакомить специалистов разного профиля с рядом методов изучения и рядом новых представлений и понятий, характерных для нелинейных сред. К этой группе работ относятся статьи Т. С. Ахромеевой и др., В. А. Галактионова и др., Л. К. Мартинсона. В первой идет речь о важной проблеме классификации поведения решений системы диффузионных уравнений с нелинейными источниками и стоками в окрестности точки бифуркации. Эта работа связана с большим кругом вопросов синергетики. В частности, в ней рассматриваются вопросы развития стохастического поведения (маломодовый химический хаос), а также методы построения упрощенных моделей этих явлений.

Работа В. А. Галактионова и др. посвящена в основном исследованию нелинейной эллиптической задачи, возникающей при описании нестационарного теплового процесса в параболическом приближении. Эта задача имеет довольно сложный дискретно-континуальный спектр решений, исследование которых требует скрупулезного численного и теоретического анализа.

В работе Л. К. Мартинсона дается обзор исследований, связанных с особенностью диффузионных процессов в среде с нелинейными стоками (конечная скорость распространения, локализация). Идеи и методы исследования локализации диффузионных процессов в открытых термодинамических системах необходимы для понимания спонтанного нарушения пространственной симметрии и образования диссипативных структур.

Роль нелинейных процессов в ряде биофизических проблем (в построении моделей миграции возбуждений в сложных молекулярных системах) описывается в обзоре А. С. Давыдова. К синергетическим задачам относится и работа С. А. Габова и А. Г. Свешникова, изучающая динамику стратифицированной жидкости.

В статье Т. Г. Елизаровой и Б. Н. Четверушкина рассматриваются вопросы построения и использования кинетических моделей для расчета газодинамических течений. Работа М. А. Галахова и П. П. Усова посвящена математическим моделям в теории трения, смазки и износа.

В целом сборник демонстрирует широкий спектр методов построения математических моделей и особенности алгоритмов изучения ряда нелинейных явлений, описываемых этими моделями.

Разумеется, в рамках одного сборника нельзя охватить тематику всех многочисленных областей науки и техники, в которых сейчас эффективно используется методология математического моделирования и вычислительного эксперимента. В следующих сборниках мы предполагаем уделить особое внимание применению методов математического моделирования для решения актуальных задач научно-технического прогресса, в том числе задач технологии, машиностроения, обработки материалов, задач химической технологии и биотехнологии, проблемам создания элементной базы ЭВМ. Не меньший интерес представляет системный анализ различных экономических и экологических моделей. Эти вопросы также будут обсуждаться в новых сборниках «Математическое моделирование».

А. А. Самарский

УДК 517.957 517.91

ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ

Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский

1. Введение

1. Во многих системах, которые изучаются физикой, химией и биологией, возникают устойчивые самоподдерживающиеся структуры различных типов [1—5]. Вопрос о свойствах нелинейных сред, где формируются структуры, и об общих закономерностях их возникновения является одним из фундаментальных вопросов современного естествознания.

Одной из самых распространенных моделей таких сред является зависящая от параметра система двух нелинейных параболических уравнений [1, 2, 5]

$$X_t = D_1 X_{xx} + Q_1(X, Y, \lambda),$$
$$Y_t = D_2 Y_{xx} + Q_2(X, Y, \lambda). \qquad (1.1)$$

Значение параметра λ отражает интенсивность внешних воздействий на систему. Изменяя это значение, можно влиять на ход процесса.

В последнее десятилетие для описания конкретных задач в различных областях науки (от химической кинетики и моделей морфогенеза до физики плазмы и гидродинамики) были предложены десятки различных моделей вида (1.1). Их анализу посвящено большое количество работ [1, 2]. Поэтому возникает следующий вопрос: существуют ли общие черты в поведении решений системы (1.1) при различных правых частях, можно ли провести классификацию двухкомпонентных систем по каким-либо признакам? Классификация и выделение общих черт позволили бы перейти от исследования конкретных моделей частного вида к созданию их теории. Это, в свою очередь, помогло бы упростить исследование каждой конкретной задачи.

2. Принципиальный шаг в этом направлении был сделан в 1975 г. в работе Курамото и Цузуки [6]. Большинство открытых диссипативных систем, в которых могут возникать структуры, ведет себя следующим образом. При всех значениях параметра описывающие их уравнения имеют однородное по пространству стационарное решение $\{X_0, Y_0\}$, часто называемое термодинамической ветвью. Это решение устойчиво, если $\lambda < \lambda_0$. Устойчивость решения определяется собственными значениями линеаризованной в его окрестности задачи (1.1). Когда $\lambda < \lambda_0$, действительная часть каждого собственного

значения отрицательна. Если при $\lambda = \lambda_0$ одно простое собственное значение проходит через нуль, то возникают неоднородные стационарные решения. Если при $\lambda = \lambda_0$ есть два чисто мнимых собственных значения, то начинаются колебания, происходит бифуркация Хопфа [7].

Уравнение, предложенное Курамото и Цузуки, описывает поведение решений задачи (1.1) в окрестности точки бифуркации в обоих случаях. Оно имеет вид

$$W_T = (\pm 1 + ic_0) W + (1 + ic_1) W \quad - (1 + ic_2) \mid W \mid^2 W. \quad (1.2)$$

Здесь $W = u + iv$; c_0, c_1, c_2 — действительные постоянные. В работе [6] дан алгоритм, позволяющий найти значения этих постоянных по D_1 и D_2, функциям $Q_1(X, Y, \lambda)$, $Q_2(X, Y, \lambda)$ и их производным. Знак плюс в правой части уравнения (1.2) соответствует области параметров $\lambda > \lambda_0$, минус — $\lambda < \lambda_0$.

Поясним смысл переменных W, R, T. Возможность перейти от системы (1.1) к уравнению (1.2) связана с наличием малого параметра $\varepsilon \sim (\lambda - \lambda_0)^{1/2}$. В работе [6] показано, что решение задачи (1.1) в этом случае можно искать в виде

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \left[W(R, T) f \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + \text{к. с.} \right] + \ldots, \quad e_1, e_2 = \text{const}, \quad (1.3)$$

где $\{X_0, Y_0\}$ — термодинамическая ветвь; W зависит от медленных переменных $R = \varepsilon x$, $T = \varepsilon^2 t$; $f = e^{ikx}$, если появляются стационарные решения, $f = e^{i\omega t}$ в случае бифуркации Хопфа. Другими словами, R и T — это медленные переменные, определяющие модуляцию по времени и пространству простейших решений f, вид которых следует из линейного анализа. Далее независимые переменные в уравнении (1.2) будем обозначать x и t

Функция $W(x, t)$ характеризует отклонение решений системы уравнений (1.1) от $\{X_0, Y_0\}$. Поэтому уравнение (1.2) описывает только те случаи, когда при $\lambda > \lambda_0$ решения остаются в окрестности термодинамической ветви. Это условие нарушается, например, когда происходит скачок на другую устойчивую ветвь. Уравнение не описывает также вырожденные случаи, когда более двух собственных значений линеаризованной задачи одновременно пересекают мнимую ось. Тем не менее это уравнение применимо к очень широкому классу задач и поэтому представляет большой интерес. Именно оно и будет рассматриваться в дальнейшем.

Исследование уравнения (1.2) оказывается тесно связанным с задачей классификации двухкомпонентных систем. Пусть известны качественные особенности его решений (тип асимптотики, симметрия и т. д.) при всех значениях c_0, c_1, c_2 и длины области l. Тогда можно объединить в один класс все системы вида (1.1), для которых решения уравнения (1.2) ведут себя сходным образом. Такой подход окажется еще более полезным, если удастся предложить эффективные приближенные и качественные методы анализа решений различных типов.

Уравнение (1.2) представляет большой интерес при моделировании ветровых волн на воде [8] и ионно-звуковых волн в плазме [9]. Близкие задачи рассматривались при изучении устойчивости течения Пуазейля [10], а также в нелинейной оптике [11]. Есть основания полагать, что это уравнение естественно возникает во многих задачах, когда речь идет о поведении возмущений в неравновесной системе при малой надкритичности [8].

Для уравнения (1.2) в литературе используются различные названия. В работах [6, 12] оно называлось *TDGL* (зависящее от времени уравнение Гинзбурга—Ландау). В работах [13, 14] его относят к λ — ω системам. Оно называлось также уравнением Курамото—Цузуки [15]. Этим названием мы будем пользоваться в целях краткости и удобства.

3. Остановимся на нескольких важных результатах, полученных при анализе уравнения Курамото—Цузуки. Сделав замену переменных $W = W_1 e^{ic_0 t}$, легко убедиться, что без ограничения общности можно положить $c_0 = 0$. Далее будем считать, что такая замена уже сделана. Записав уравнение (1.2) в переменных ρ и φ ($u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$)

$$\begin{aligned} \rho_t &= \rho - \rho^3 + \rho_{xx} - \rho\varphi_x^2 - 2c_1\rho_x\varphi_x - c_1\rho\varphi_{xx}, \\ \rho\varphi_t &= -c_2\rho^3 + 2\rho_x\varphi_x + \rho\varphi_{xx} + c_1\rho_{xx} - c_1\rho\varphi_x^2, \end{aligned} \tag{1.4}$$

можно проверить следующее утверждение. Пусть $\{\rho(x, t), \varphi(x, t)\}$ — решение уравнения (1.2). Тогда функции $\{\rho(x, t), -\varphi(x, t)\}$ также будут решением, если значения параметров c_1 и c_2 изменить на $-c_1$, $-c_2$. Это означает, что достаточно рассматривать область параметров $c_1 \geqslant 0$.

Простейшими решениями уравнения (1.2) являются нулевое решение (всегда неустойчивое в линейном приближении) и пространственно однородное решение

$$W = \exp[-ic_2 t + i\alpha], \tag{1.5}$$

где α — действительная постоянная. Оно устойчиво относительно малых возмущений вида $\exp(ikx)$ при условии [6]

$$(c_1^2 + 1)\, k^4 + 2k^2 (1 + c_1 c_2) > 0, \tag{1.6}$$

т. е. устойчиво при любом k, когда

$$1 + c_1 c_2 > 0. \tag{1.7}$$

Методами инвариантно-группового анализа было показано [16], что уравнение (1.2) может иметь пространственно неоднородное автомодельное решение вида

$$W(x, t) = R(x) \exp[i\omega t + ia(x)]. \tag{1.8}$$

Для определения функций $R(x)$ и $a(x)$ нужно решать нелинейную краевую задачу, зависящую от параметра ω, который должен быть

найден из граничных условий

$$R_{xx} - Ra_x^2 = -R\,(1 - R^2 - c_1\omega - c_1c_2R^2)/(1 + c_1^2),$$
$$2R_xa_x + Ra_{xx} = R\,(c_1 - c_1R^2 + \omega + c_2R^2)/(1 + c_1^2), \qquad (1.9)$$
$$R\,(0) = R_1,\ R\,(l) = R_2,\quad a\,(0) = a_1,\quad a\,(l) = a_2.$$

При изучении уравнения (1.2) большое внимание было уделено поиску непериодических решений (они получили название диффузионного хаоса). В работах [12, 17, 18] приведены результаты нескольких расчетов, где в течение определенного времени решение оставалось непериодическим. Однако либо способ представления результатов, либо особенности методики не позволяют с уверенностью интерпретировать наблюдаемую картину как диффузионный хаос в системе.

Непериодические решения уравнения Курамото—Цузуки представляют большой теоретический интерес и могут быть связаны с моделями многих конкретных процессов, в частности с возникновением сложных колебательных (по-видимому, непериодических) режимов в реакции Белоусова — Жаботинского [19, 20]. Интересен этот вопрос и потому, что поведение пространственно однородных решений, которые описываются «точечной» динамической системой, оказывается очень простым. В ее фазовой плоскости есть единственный устойчивый предельный цикл $u^2 + v^2 = 1$, $u = \mathrm{Re}\ W$, $v = \mathrm{Im}\ W$. Поэтому сложное поведение обусловлено только влиянием пространственной неоднородности.

После работы Лоренца, а также Рюэля и Такенса [21] были широко развернуты исследования хаоса в динамических системах и изучение странных аттракторов. Интересно было бы применить эти представления к уравнению (1.2). «Важная, не решенная пока проблема состоит в том, чтобы найти связь диффузионного хаоса с каким-либо известным типом хаоса в системах с несколькими степенями свободы»,— указывалось в работе [12].

Все упоминавшиеся работы, касающиеся частных решений уравнения Курамото—Цузуки, не позволили изучить, возможно, самый важный и интересный вопрос: каков механизм смены одних решений другими, как происходит их усложнение. Подытожим сказанное и сформулируем основные вопросы, которые оставались открытыми в теории диссипативных нелинейных систем в окрестности точки бифуркации.

1. Как влияют начальные данные на асимптотическое поведение решений уравнения (1.2)? Существуют ли такие классы начальных данных, эволюция которых качественно отличается от поведения остальных решений?

2. Каковы свойства автомодельных решений вида (1.8)? Единственны ли они? Какое из решений определяет асимптотику в случае неединственности?

3. Существуют ли другие типы решений, описывающие пространственно-временную упорядоченность в системе? Каковы их свойства?

4. Можно ли предложить упрощенные модели, которые описывали бы поведение решений уравнения (1.2) в определенных диапазонах параметров?

5. Существуют ли хаотические решения уравнения Курамото—Цузуки (диффузионный хаос)? Связаны ли они с наличием странных аттракторов в какой-либо упрощенной системе уравнений? Каков механизм перехода к хаосу?

6. Какими особенностями обладают решения уравнения (1.2) в пространственно-многомерном случае?

7. Какие численные алгоритмы следует использовать, чтобы получать достоверную информацию об уравнении?

В последние несколько лет анализ этих вопросов привел к ряду важных результатов. Этим результатам и посвящена настоящая работа.

2. Симметричные и автомодельные решения

1. В задачах синергетики, как правило, детали начальных данных могут быть «забыты» системой [1, 2]. При этом на больших временах происходит выход на стационарные или автомодельные решения, которые могут быть найдены с помощью инвариантно-групповых методов [23]. Вместе с тем существуют такие начальные данные, эволюция которых качественно отличается от поведения остальных решений. Такие начальные данные были обнаружены в модели тепловых структур [3, 4], в нелинейных средах с триггерными свойствами [22] и названы резонансным возбуждением системы.

Рассмотрим вопросы, связанные с ролью начальных данных, на примере второй краевой задачи для уравнения (1.2):

$$W_t = W + (1 + ic_1) W_{xx} - (1 + ic_2) \mid W \mid^2 W, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$W(x, 0) = W_0(x), \quad W_x(0, t) = W_x(l, t) = 0. \qquad (2.1)$$

Для этого мы изучим некоторые ее частные решения. Можно показать, что $\int_0^l |W(x, t)|^2 dx \to 0$, $t \to \infty$, если в уравнении (1.2) выбран знак минус. В дальнейшем этот случай рассматриваться не будет. Если выбран знак плюс, то справедливо неравенство

$$\int_0^l |W(x, t)|^2 dx \leqslant l/(1 + A_1 e^{-l}),$$

где A_1 — постоянная, зависящая от начальных данных.

Посмотрим, какими величинами удобно характеризовать решения задачи (2.1). Начнем с типичной картины, наблюдаемой в расчетах при $c_1 = 0$ (рис. 1). Вначале идет сложный колебательный процесс, в ходе которого происходит перестройка функций u и v (напомним, что $u = \mathrm{Re} W$, $v = \mathrm{Im} W$). Далее немонотонности сглаживаются, и решение становится пространственно однородным. Разложим

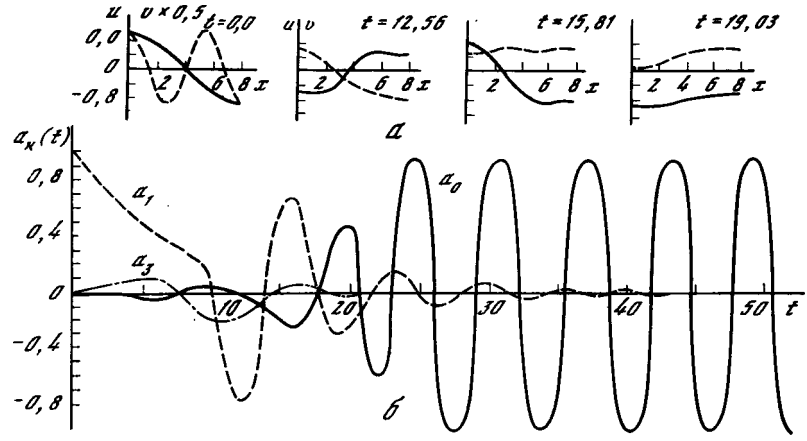


Рис. 1. Типичное поведение решений задачи (2.1) при $c_1 = 0$ в случае начальных данных общего вида

$c_2 = 1$; $l = 7{,}9$; $W_0(x) = \cos(\pi x/l) + 0{,}01 + 2i\cos(3\pi x/l)$.
а — профили функций u и v; *б* — изменение $a_n(t)$, коэффициентов Фурье функции u

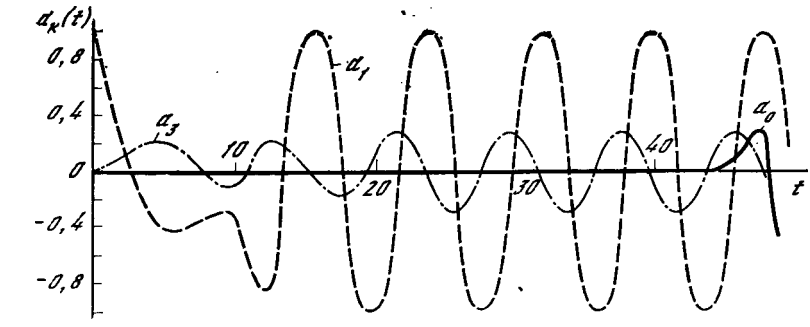


Рис. 2. Картина процесса при нечетных начальных данных

$W_0(x) = \cos(\pi x/l) + 2i\cos(3\pi x/l)$; $c_1 = 0$; $c_2 = 1$; $l = 7{,}9$

функции u и v в ряд Фурье по системе $\{\cos(\pi m x/l),\ m = 0, 1, 2, \ldots\}$. Амплитуды всех мод, начиная с третьей, оказываются по крайней мере на порядок меньше, чем амплитуды первых двух. Переход к коэффициентам Фурье $a_m(t)$ и $b_m(t)$ функций u и v дает возможность рассматривать изменение только конечного набора величин и при других значениях параметров.

Расчеты показывают, что выход на однородное решение при $c_1 = 0$ происходит и с других начальных профилей. Выясним, существуют ли в задаче (2.1) такие типы начальных данных, которые сохраняют пространственную неоднородность при $t \to \infty$, если параметры задачи удовлетворяют неравенству (1.7). Воспользуемся соображениями симметрии.

В уравнение (2.1) входят только нечетные степени функций, поэтому если $\{u(x, t), v(x, t)\}$ — решение задачи, то $\{-u(x, t),$

$-v(x, t)\}$ также является решением. С этим фактом тесно связана еще одна интересная симметрия. Пусть начальные данные нечетны относительно середины отрезка, т. е. $u_0(x) = -u_0(l-x)$, $v_0(x) = -v_0(l-x)$. При этом, конечно, $u_0(l/2) = v_0(l/2) = 0$. Оказывается, процесс идет таким образом, что нечетный характер решения сохраняется, в частности $u(l/2, t) = v(l/2, t) = 0$.

Рассмотрим теперь результаты расчета, в котором начальное распределение нечетно (рис. 2). Картина процесса при этом качественно меняется по сравнению с предыдущим случаем, хотя начальные данные различаются незначительно ($v_0(x)$ совпадают, а значения $u_0(l)$ отличаются на 0,01). В течение длительного времени в системе существует неоднородное по пространству решение, амплитуда колебаний которого практически не меняется и в котором есть только нечетные гармоники. Заметим, что наибольшую амплитуду имеет первая мода, a_5, a_7, . . . в масштабе рисунка не видны. При $t > 40$ вновь происходит выход на однородное решение (1.5). Это связано с неустойчивостью нечетного решения и особенностями методики расчета [24].

Если задать другой нечетный профиль, то после определенной перестройки наблюдается выход на то же установившееся нечетное решение. Интересно выяснить, как зависит период решения и его амплитуда от длины области, от параметров c_1, c_2, чем вызвана потеря симметрии и выход на однородное решение. Чтобы ответить на эти вопросы, воспользуемся приближенным методом анализа изучаемой системы.

2. Коэффициенты Фурье a_m и b_m решений быстро убывают с ростом их номера. Поэтому приближенный метод должен давать закон изменения по крайней мере нескольких первых гармоник. Предположим, что в изучаемом решении есть только две моды

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cos kx, \tag{2.2}$$

k будем выбирать так, чтобы выполнялись граничные условия задачи (2.1). Как правило, k будет равно π/l, что определяет первую гармонику. Подставим (2.2) в формулу (2.1) и отбросим все члены вида $\cos(\pi mx/l)$, $m > 1$, считая, что они пренебрежимо малы. Это приводит к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= x_0 - (x_0 - c_2y_0)(\rho_0^2 + \rho_1^2/2) - s(x_1 - c_2y_1), \\
\dot{y}_0 &= y_0 - (c_2x_0 + y_0)(\rho_0^2 + \rho_1^2/2) - s(c_2x_1 + y_1), \\
\dot{x}_1 &= x_1 - (x_1 - c_2y_1)(\rho_0^2 + 3\rho_1^2/4) - 2s(x_0 - c_2y_0) - k^2(x_1 - c_1y_1), \\
\dot{y}_1 &= y_1 - (c_2x_1 + y_1)(\rho_0^2 + 3\rho_1^2/4) - 2s(c_2x_0 + y_0) - k^2(c_1x_1 + y_1),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2$; $\rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2$; $s = x_0x_1 + y_0y_1$. Перепишем эту систему в более удобном для дальнейшего анализа виде. Если положить $x_0 = \rho_0 \cos\varphi_0$, $y_0 = \rho_0 \sin\varphi_0$, $x_1 = \rho_1 \cos\varphi_1$, $y_1 = \rho_1 \sin\varphi_1$, то

получатся соотношения

$$\dot{\rho}_0 = \rho_0 - \rho_0(\rho_0^2 + \rho_1^2/2) - \rho_0\rho_1^2 \cos\Psi[\cos\Psi + c_2 \sin\Psi],$$

$$\dot{\rho}_1 = \rho_1 - \rho_1(\rho_0^2 + 3\rho_1^2/4) - 2\rho_0^2\rho_1 \cos\Psi[\cos\Psi - c_2 \sin\Psi] - k^2\rho_1, \quad (2.4)$$

$$\dot{\varphi}_0 = -c_2(\rho_0^2 + \rho_1^2/2) + \rho_1^2 \cos\Psi[\sin\Psi - c_2 \cos\Psi],$$

$$\dot{\varphi}_1 = -c_2(\rho_0^2 + 3\rho_1^2/4) - 2\rho_0^2 \cos\Psi[\sin\Psi + c_2 \cos\Psi] - c_1k^2,$$

где $\Psi = \varphi_0 - \varphi_1$.

Найдем несколько частных решений системы (2.3). Первое, неустойчивое, решение

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0. \quad (2.5)$$

В задаче (2.1) ему соответствует $W = 0$. Другое решение мы получим, положив $x_1 = 0$, $y_1 = 0$:

$$x_0 = \cos(-c_2t + \alpha), \quad y_0 = \sin(-c_2t + \alpha), \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad (2.6)$$

где α — произвольная постоянная. В системе (2.1) ему соответствует пространственно однородное решение (1.5). Вычисления показывают, что условие устойчивости решения (2.6), как и в исходной задаче, определяется формулой (1.6).

Рассмотрим теперь решения уравнений (2.4), в которых нет нулевой моды $\rho_0(t) = 0$. Их естественно сопоставить с нечетными решениями задачи в частных производных. Из (2.4) получим

$$\rho_1 \underset{t\to\infty}{\to} \bar{\rho}_1 = \begin{cases} \sqrt{4(1-k^2)/3}, & k \leqslant 1, \\ 0, & k > 1, \end{cases}$$

$$\varphi_1 \underset{t\to\infty}{\to} \omega = -3c_2\bar{\rho}_1^2/4 - c_1k^2, \quad (2.7)$$

если $\rho_0(0) = 0$. Из формул (2.7) следует, что при $t \to \infty$ $\rho_1 \to$ const. Численное решение задачи (2.1) показывает, что $\rho_{2n+1} \to$ const и при $n > 0$. Обратим внимание, что во многих случаях решение обладает этим свойством и после потери симметрии (рис. 3).

Соотношение $\bar{\rho}_1 = 0$ при $k > 1$ позволяет предположить, что при $l < \pi$ нечетные решения задачи в частных производных стремятся к $W = 0$. Расчеты подтверждают этот вывод. При $l < 4\pi$ — 5π формулы (2.7) не только качественно, но и количественно хорошо согласуются с решениями задачи (2.1) [15]. Неустойчивость нечетных решений можно связать с тем обстоятельстом, что особая точка (2.7) является седлом.

3. Рассмотрим другие классы симметричных решений уравнения Курамото—Цузуки. Можно проверить, что коэффициенты Фурье

решения задачи (2.1) будут связаны соотношениями

$$\dot{a}_0 = a_0 - 0{,}5\left[r_0(a_0 - c_2 b_0) + \sum_{m=0}^{\infty} r_m(a_m - c_2 b_m)\right],$$

$$\dot{b}_0 = b_0 - 0{,}5\left[r_0(c_2 a_0 + b_0) + \sum_{m=0}^{\infty} r_m(c_2 a_m + b_m)\right],$$

$$\dot{a}_p = a_p - k^2 p^2 (a_p - c_1 b_p) - 0{,}5\left[\sum_{m=0}^{p} r_m(a_{p-m} - c_2 b_{p-m}) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{\infty} r_m(a_{p+m} - c_2 b_{p+m}) + \sum_{m=0}^{\infty} r_{p+m}(a_m - c_2 b_m)\right], \qquad (2.8)$$

$$\dot{b}_p = b_p - k^2 p^2 (c_1 a_p + b_p) - 0{,}5\left[\sum_{m=0}^{p} r_m(c_2 a_{p-m} + b_{p-m}) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{\infty} r_m(c_2 a_{p+m} + b_{p+m}) + \sum_{m=0}^{\infty} r_{p+m}(c_2 a_m + b_m)\right], \quad p = 1, 2, \ldots,$$

где $k = \pi/l$; $r_0 = 0{,}5\left[\rho_0^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m^2\right]$; $a_p = \rho_p \cos\varphi_p$; $b_p = \rho_p \sin\varphi_p$; $r_n = \sum_{m=0}^{\infty}(a_m a_{m+n} + b_m b_{m+n}) + 0{,}5 \sum_{m=0}^{n}(a_m a_{n-m} + b_m b_{n-m})$. Сформулируем условия, при которых часть коэффициентов Фурье будет равна нулю в течение всего процесса $0 \leqslant t < \infty$. Сопоставим начальным распределениям $u_0(x)$, $v_0(x)$ последовательность целых чисел $\{L\}$ следующим образом. Если $n \notin \{L\}$, то $\rho_n(0) = 0$. Другими словами, $\{L\}$ содержит в себе все номера гармоник с ненулевой амплитудой. Справедливы следующие утверждения [24, 25].

Лемма 1. *Если последовательность $\{L\}$ такова, что для любых чисел $m \in \{L\}$, $n \notin \{L\}$ выполнено условие $m \pm n \notin \{L\}$, то все коэффициенты Фурье решений задачи (2.1) с номерами $n \notin \{L\}$ равны нулю при $0 \leqslant t < \infty$.*

Лемма 2. *Если последовательность $\{L\}$ такова, что*

1) *для всех m, $n \in \{L\}$ выполнено $m \pm n \notin \{L\}$,*

2) *для всех m, $n \notin \{L\}$ выполнено $m \pm n \notin \{L\}$, то все коэффициенты Фурье решения задачи (2.1) с номерами $n \notin \{L\}$ равны нулю при $0 \leqslant t < \infty$.*

Последовательность $\{L\} = \{0, m, 2m, \ldots\}$ удовлетворяет первой лемме при любом m. Лемме 2 удовлетворяет последовательность нечетных чисел. Сформулированные утверждения оказываются полезными и в более общем случае. Пусть, например, $\{L\} = \{3, 9, 15, 21, \ldots\}$. Эта последовательность не удовлетворяет условиям лемм 1 и 2. Однако она целиком содержится как в $\{L_1\} = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$, так и в $\{L_2\} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$; $\{L_1\}$ удовлетворяет условиям первой леммы, $\{L_2\}$ — второй. Поэтому решение задачи в частных производных будет содержать только моды с номерами $n \in \{L_1\} \cap \{L_2\} = \{L\}$. Решение такого типа представлено на рис. 4. Можно пока-

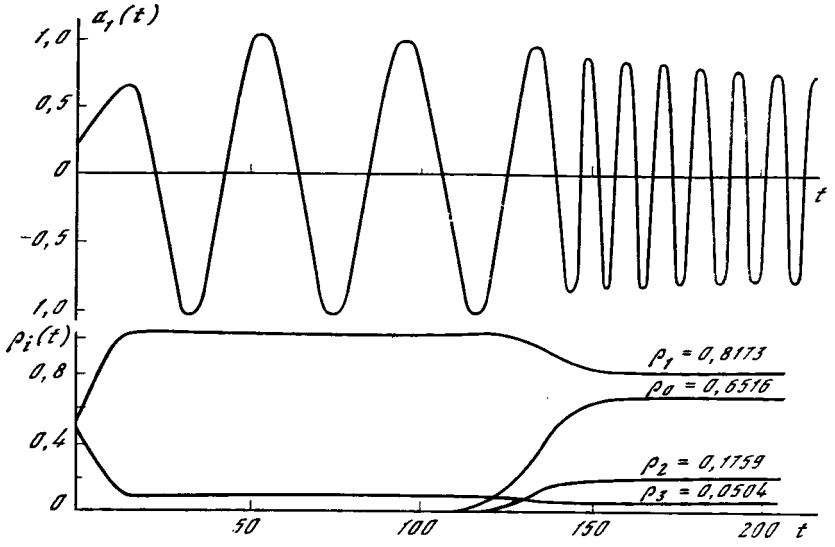


Рис. 3. Эволюция решения при нечетных начальных данных

$c_1 = 4$; $c_2 = -1$; $l = 7{,}9$

а — зависимость коэффициента Фурье a_1 от времени; *б* — поведение [величин $\rho_n(t)$

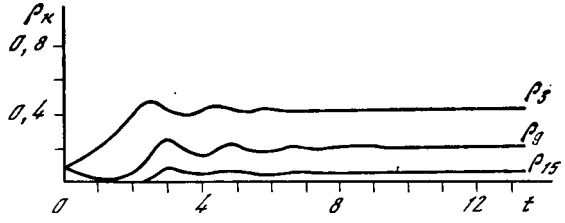


Рис. 4. Пример симметричного решения, соответствующего последовательности $\{L\} = \{3, 9, 15, 21...\}$

$c_1 = 1$; $c_2 = -13$; $l = 6\pi$

зать, что чем больше длина области, тем больше неоднородных симметричных решений существуют в ней [24]. К вопросу об их устойчивости мы вернемся ниже.

4. Асимптотику решений задачи (2.1) могут определять автомодельные решения вида (1.8). Рассмотрим их свойства на примере первой краевой задачи

$$u(0) = u_1, \quad v(0) = v_1, \quad u(l) = u_2, \quad v(l) = v_2. \tag{2.9}$$

Пусть $c_1 = c_2$. Этот случай достаточно прост и вместе с тем интересен. Как показано в работе [6], все стационарные распределения при λ, близких к λ_0, описываются уравнением (1.2) с действительными коэффициентами, т. е. с $c_1 = c_2 = 0$. В частности, эти параметры используются при математическом моделировании морфогенеза [26]. Следует отметить, что при этом (2.1) не сводится к одному уравнению для $|W|$. И модуль, и аргумент W остаются равноправными, и для их определения нужно решать систему двух уравнений. Это обстоя-

тельство оказывается существенным при исследовании устойчивости полученных решений.

При $\omega = -c_1$ оба уравнения можно проинтегрировать [15, 16]:

$$R^2 a_x = \beta_1,$$
$$R_x^2/2 + [0{,}5\beta_1^2/R^2 + 0{,}5R^2(1 - 0{,}5R^2)] = \beta_2, \tag{2.10}$$

здесь β_1 и β_2 — постоянные интегрирования. После замены переменных система (2.10) упрощается:

$$ra_x = \pm\sqrt{-\beta_3/2}, \quad r = R^2/2,$$
$$r_x^2/2 + [-2\beta_2 r + 2r^2 - 2r^3] = \beta_3, \quad \beta_3 = -\beta_1^2/2. \tag{2.11}$$

Она имеет аналитическое решение

$$x = \frac{1}{\sqrt{b_3 - b_1}} F\left(\arcsin\sqrt{\frac{r - b_1}{b_2 - b_1}} \,\middle|\, \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}\right), \tag{2.12}$$

где $F(\varphi \mid m) = \int_0^x [(1 - t^2)(1 - mt^2)]^{-1/2}\, dt$; $\varphi = \arcsin x$ — эллиптический интеграл первого рода; b_i (β_2, β_3) — корни кубического уравнения $y^3 - y^2 + \beta_2 y + \beta_3/2 = 0$; $b_1 < b_2 < b_3$. Из формул (2.11) следует вид простейших частных решений уравнения (1.2) при $c_1 = c_2$:

$$W = R_0 \exp[-ic_1 t \pm i\sqrt{1 - R_0^2}x], \; R_0 = \text{const}, \; 0 \leqslant R_0 \leqslant 1. \tag{2.13}$$

Условие устойчивости этих решений в линейном приближении: $R_0^2 > 2/3$.

Функция (2.12) удовлетворяет начальному условию $r(0) = b_1$, т. е. является решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Но нас интересуют решения краевой задачи с условиями, которые получаются из (2.9):

$$r(0) = r_1, \quad r(l) = r_2, \quad a(0) = a_1, \quad a(l) = a_2,$$
$$r_1 = (u_1^2 + v_1^2)/2, \quad \cos a_1 = u_1/\sqrt{2r_1}, \quad \sin a_1 = v_1/\sqrt{2r_1},$$
$$r_2 = (u_2^2 + v_2^2)/2, \quad \cos a_2 = u_2/\sqrt{2r_2}, \quad \sin a_2 = v_2/\sqrt{2r_2}. \tag{2.14}$$

Отметим, что a_1 и a_2 определены неоднозначно: значения $\tilde{a}_i = a_i \pm 2\pi n$ приводят к тем же значениям u и v на границах, что и a_i. Поэтому первая краевая задача для уравнения Курамото—Цузуки может иметь несколько автомодельных решений. Кроме того, неединственным может быть решение краевой задачи (2.11), (2.14). Формула (2.12) не позволяет достаточно просто оценить число решений этой задачи. Численный алгоритм, позволяющий построить все автомодельные решения рассматриваемой задачи, предложен в работе [15]. Набор автомодельных решений, построенный с помощью этой методики, приведен на рис. 5. Расчеты, проведенные в этом и других случаях для задачи в частных производных [15], показали, что с нуле-

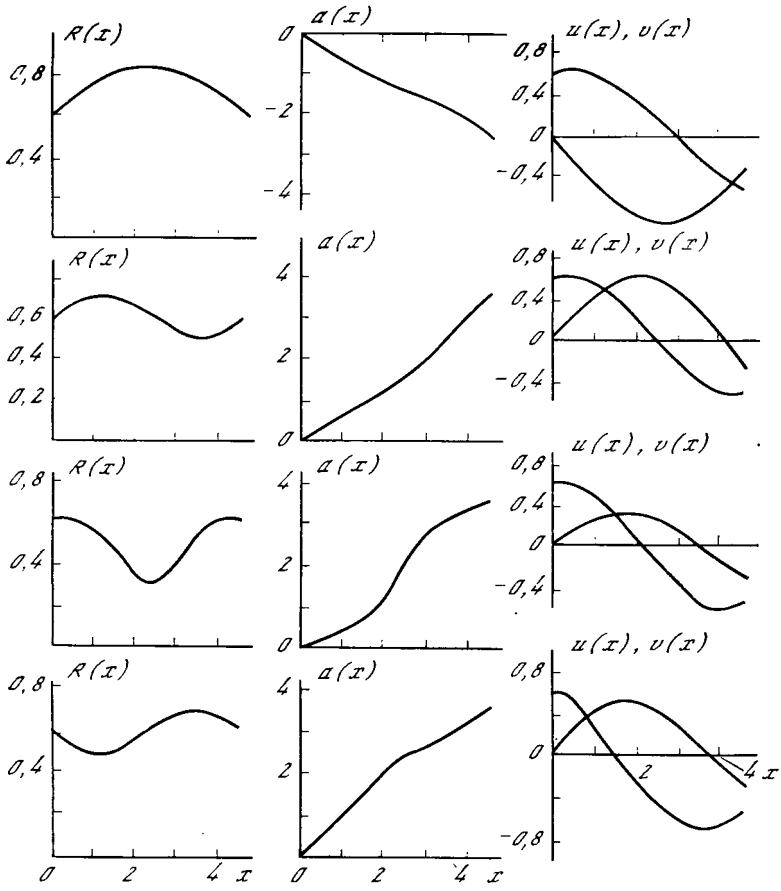


Рис. 5. Полный набор автомодельных решений для задачи с параметрами $c_1 = c_2$; $l = 4{,}663$; $u(0) = 0{,}6$; $v(0) = 0$; $u(l) = -0{,}51$; $v(l) = -0{,}31$

Устойчиво только первое решение

вых начальных данных $u(x, t)$, $v(x, t)$ выходят на автомодельное решение, у которого функция $R(x)$ имеет наименьшее количество экстремумов.

3. Основные свойства двухмодовой системы

Исследование нечетных решений задачи (2.1) показало, что при небольших значениях l двухмодовая система позволяет хорошо предсказывать их количественные характеристики. Поэтому было бы интересно подробно изучить эту систему как самостоятельный математический объект.

1. Все функции в правых частях уравнений (2.4) зависят только от разности углов Ψ и ρ_0, ρ_1. Поэтому можно записать замкнутую

систему для трех функций: $\xi = \rho_0^2$, $\eta = \rho_1^2$, $\theta = 2\Psi$ ($\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$):

$$\dot{\xi} = 2\xi - 2\xi(\xi + \eta) - \xi\eta(\cos\theta + c_2 \sin\theta),$$

$$\dot{\eta} = 2\eta - 2\eta(2\xi + 3\eta/4) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2 \sin\theta) - 2k^2\eta, \qquad (3.1)$$

$$\dot{\theta} = c_2(2\xi - \eta/2) + \sin\theta(2\xi + \eta) + c_2\cos\theta(2\xi - \eta) + 2c_1k^2.$$

Будем исследовать асимптотическое поведение ее решений при $t \to \infty$. Идеальной была бы ситуация, в которой можно было бы предсказывать характер решений и их параметры при разных c_1, c_2, k, не решая самих уравнений. Как и в задаче (2.1), здесь достаточно рассматривать область параметров $c_1 \geqslant 0$.

Система уравнений (3.1) не имеет решений, в которых ξ или η неограниченно возрастают. Это следует из неравенства

$$(2\dot{\xi} + \dot{\eta}) \leqslant 2(2\xi + \eta) - (2\xi + \eta)^2. \qquad (3.2)$$

Важной характеристикой динамической системы является величина Ω, определяющая скорость изменения малого объема в фазовом пространстве при движении по траекториям [21]: $\dot{V} = -\Omega V$,

$$\Omega = \partial\dot{\xi}/\partial\xi + \partial\dot{\eta}/\partial\eta + \partial\dot{\theta}/\partial\theta. \qquad (3.3)$$

Для системы (3.1)

$$\Omega = 4 - 2k^2 - 8\xi - 5\eta. \qquad (3.4)$$

Если $k^2 > 2$, то фазовый объем сокращается вдоль любой траектории (система диссипативна). При $k^2 < 2$ ($l > \pi/\sqrt{2}$) в фазовом пространстве системы (3.1) существует область, в которой $\Omega > 0$, где нет устойчивых особых точек и предельных циклов.

К настоящему времени подробно исследовано небольшое число систем трех обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. По-видимому, наиболее полно изучена система Лоренца [21]. В ней и целом ряде других систем величина Ω постоянна во всем фазовом пространстве, что упрощает их анализ. С этой точки зрения система (3.1) является более сложным объектом.

2. Три особые точки этой системы $\{\xi = 0, \eta = 0\}$, $\{\xi = 1, \eta = 0\}$, $\{\xi = 0, \eta \neq 0\}$ и их соответствие с решениями задачи (2.1) были рассмотрены выше. Других особых точек, у которых $\xi = 0$ или $\eta = 0$, нет. Для точек с $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ из (3.1) получаем систему уравнений

$$2 - 2(\xi + \eta) - \eta(\cos\theta + c_2\sin\theta) = 0,$$

$$2 - 2(2\xi + 3\eta/4) - 2\xi(\cos\theta - c_2\sin\theta) - 2k^2 = 0, \qquad (3.5)$$

$$c_2(2\xi - \eta/2) + \sin\theta(2\xi + \eta) + c_2\cos\theta(2\xi - \eta) + 2c_1k^2 = 0.$$

Два первых уравнения позволяют выразить ξ и η через $\cos\theta$ и $\sin\theta$. Подставив эти выражения в третье уравнение и обозначив $\varepsilon = (c_2^2 + 1)/[k^2(c_1 - c_2)]$, $y = \operatorname{tg}\theta/2 - \varepsilon/2$, получим следующее

равенство:

$$y^4 + by^2 + cy + d = 0,$$

$$b = -1{,}5\,\varepsilon^2 + 8\,\varepsilon c_1 k^2 - 14, \quad c = \varepsilon\,(\varepsilon^2 - 8\,\varepsilon c_1 k^2 + 8k^2), \quad d = -3\varepsilon^4/16 + 2c_1 k^2 \varepsilon^3 + \varepsilon^2\,(3{,}5 - 4k^2) - 15. \tag{3.6}$$

Координаты особой точки определяются соотношениями

$$\xi = \frac{(1+2k^2)\,x^2 + 4c_2\,(k^2-1)\,x + (6k^2-3)}{x^4 + (8c_2^2 - 6)\,x^2 - 15}\,(1+x^2), \quad x = y + \varepsilon/2,$$

$$\eta = \frac{4\,(1+x^2)\,(-k^2x^2 + 2c_2x - k^2 - 2)}{x^4 + (8c_2^2 - 6)\,x^2 - 15}, \quad \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \tag{3.7}$$

$$\sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Из уравнения (3.6) следует, что при всех $c_1 \neq c_2$ у него есть по крайней мере два действительных корня. В самом деле, функция в левой части (3.6) непрерывна, при $y = -\varepsilon/2$ она равна -15, а при $y \to \pm\infty$ ее значения положительны. Записав уравнение четвертой степени для величины x, можно убедиться, что его свободный член всегда отрицателен. Отсюда следует, что уравнение (3.6) не может иметь четырехкратного корня. Оно имеет двукратный корень, если выполнено одно из равенств

$$(-b \pm \sqrt{b^2 + 12d})^{1/2}\,[2b \pm \sqrt{b^2 + 12d}] = +3\sqrt{3/2}\,c,$$
$$(-b \pm \sqrt{b^2 + 12d})^{1/2}\,[2b \pm \sqrt{b^2 + 12d}] = -3\sqrt{3/2}\,c, \tag{3.8}$$

и корень кратности три при условии

$$b^2 + 12d = 0, \quad -8b^3 = 27c^2. \tag{3.9}$$

Особая точка $\{\xi, \eta, \theta\}$, которая определяется соотношениями (3.6), (3.7), устойчива, если отрицательны действительные части всех собственных значений матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{L} & \mathfrak{P} & \mathfrak{S} \\ \mathfrak{M} & \mathfrak{Q} & \mathfrak{T} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{R} & \mathfrak{U} \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

в которой $\mathfrak{L} = 2 - 4\xi - 2\eta - \eta\,(\cos\theta + c_2 \sin\theta)$, $\mathfrak{M} = -4\eta - 2\eta\,(\cos\theta - c_2\sin\theta)$, $\mathfrak{N} = 2c_2 + 2\,(\sin\theta + c_2\cos\theta)$, $\mathfrak{P} = -\xi\,(2 + \cos\theta + c_2\sin\theta)$, $\mathfrak{Q} = 2 - 3\eta - 2\xi\,(2 + \cos\theta - c_2\sin\theta) - 2k^2$, $\mathfrak{R} = -c_2/2 + \sin\theta - c_2\cos\theta$, $\mathfrak{S} = \xi\eta\,(\sin\theta - c_2\cos\theta)$, $\mathfrak{T} = 2\xi\eta\,(\sin\theta + c_2\cos\theta)$, $\mathfrak{U} = (2\xi + \eta)\cos\theta - c_2\,(2\xi - \eta)\sin\theta$.

Формулы (3.6)—(3.10) дают полную информацию о каждой особой точке системы уравнений (3.1). Посмотрим, какие качественные выводы можно сделать исходя из этих соотношений.

3. Основные закономерности рассмотрим на примере систем с $k = 1$. Зафиксируем значение c_1 и будем уменьшать параметр c_2.

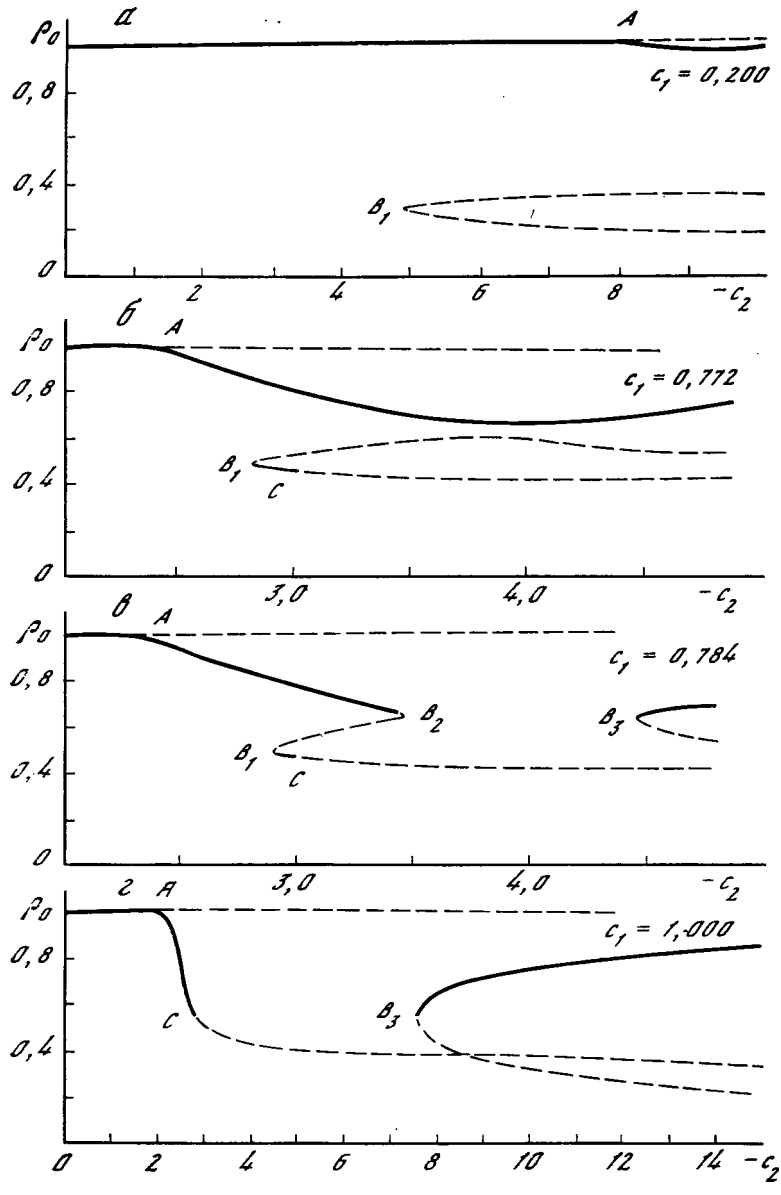


Рис. 6. Картина появления особых точек при разных значениях c_1

Сплошная кривая — устойчивые точки, штриховая — неустойчивые точки. Ось $\rho_0 = 0$ неустойчива

Изменение величины $\rho_0 = \xi^{1/2}$ всех особых точек с $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$, полученное в расчетах для разных c_1, показано на рис. 6. Те значения параметра c_2, при которых меняется число особых точек или их устойчивость, обозначены на этом рисунке буквами A, B_1, B_2, B_3, C.

В точке A решение $\{\xi = 1, \eta = 0\}$ теряет устойчивость. Появляется новая устойчивая особая точка с $\xi > 0$, $\eta > 0$ (при бо́льших значениях c_2 эта точка тоже существует [27], однако у нее $\eta < 0$, поэтому на рисунке она не показана).

В точках B_1 и B_3 у системы (3.1) появляются два новых состояния равновесия. В точке B_2 два состояния равновесия исчезают. При этом уравнение (3.6) имеет кратные корни и справедливо одно из равенств (3.8). Отметим, что одна из возникших особых точек может быть устойчива. Это особенно интересно. Усложнение системы при изменении параметра в синергетике обычно связывают с последовательными бифуркациями и в качестве основного аппарата используют теорию ветвления. В изучаемой модели наблюдается совершенно другое поведение: устойчивая точка, определяющая асимптотику системы, появляется не в результате ветвления ранее имевшихся решений. По-видимому, такая ситуация является достаточно общей. Ее анализ требует привлечения других методов (например, идей теории катастроф [28]) и дальнейшего развития существующих представлений.

В точке C одна из особых точек системы уравнений (3.1) теряет устойчивость, соответствующая ей матрица $\mathbf{A}$ имеет два чисто мнимых собственных значения (происходит бифуркация Хопфа [7]).

Итак, если $|c_1| \ll 1$, то у системы (3.1) всегда есть одна устойчивая особая точка (типичная ситуация представлена на рис. 6, *а*). Когда $c_1 \gtrsim 1$, в некоторой области параметров устойчивых точек нет (рис. 6, *г*) и предельные множества имеют более сложную структуру. В промежуточном случае система может иметь две устойчивые особые точки и, следовательно, обладать триггерными свойствами.

На рис. 7 показаны области на плоскости параметров $\{c_1, c_2\}$, в которых уравнения (3.1) имеют разное число стационарных устойчивых точек. На линии ABC происходит первая бифуркация. Эта линия определяется формулой (1.6), если поставить в ней знак равенства. Выше и левее ABC (в том числе при всех $c_2 > 0$) устойчива точка $\{\xi = 1, \eta = 0\}$. Линия $DMEQF$ — кривая кратных корней. Она определяется формулами (3.8). На участке QF она близка к прямой. Можно найти ее асимптотику при $|c_2| \gg 1$, полагая $|c_1| \sim |c_2| \sim |\varepsilon| \to \infty$. Оставляя в выражениях для b, c, d в формуле (3.6) главные члены, можно получить [27]

$$c_2/c_1 = -4k^4 \pm \sqrt{16k^8 + 8k^4} \approx -8{,}9. \qquad (3.11)$$

Именно такая зависимость и наблюдается в расчетах.

Бифуркация Хопфа происходит на линии $MQNP$. Обратим внимание на область EQM (см. рис. 7), где система имеет две устойчивые особые точки. В области параметров, ограниченной линией $FQNP$, устойчивых особых точек нет. Аттракторы являются предельными циклами или имеют более сложную структуру.

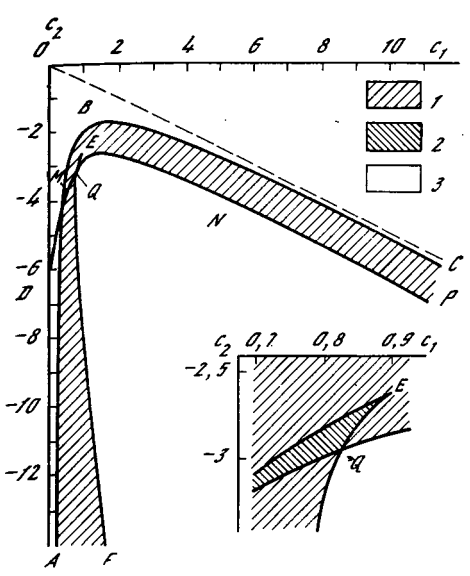


Рис. 7. Число устойчивых особых точек с $\xi > 0$, $\eta > 0$ при $k = 1$

1 — одна точка;
2 — две точки;
3 — устойчивых точек нет

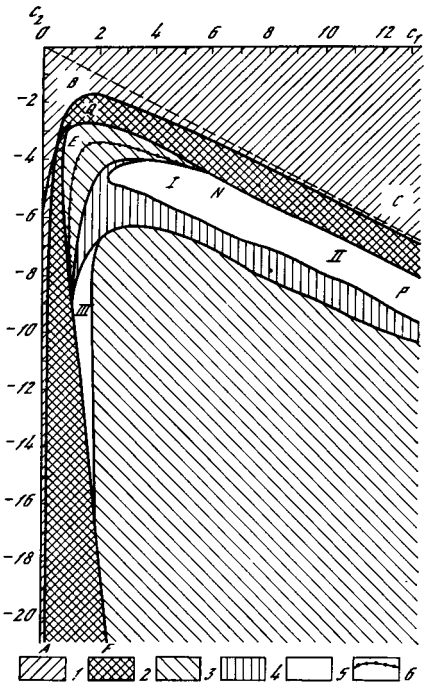


Рис. 8. Типы аттракторов для системы уравнений (3.1) при $k = 1$

1 — решение $\xi = 1$, $\eta = 0$; *2* — особая точка с $\xi > 0$, $\eta > 0$; *3* — простой цикл; *4* — цикл S^2; *5* — более сложные решения; *6* — линия, на которой происходит переход $S_0^1 \to S_1^1$. QNP — линия бифуркации Хопфа.

Картина получена в результате численного решения уравнений (3.1). По параметру c_1 шаг $h_1 = 1{,}0$, по параметру c_2 $h_2 = 0{,}5$. В окрестности границ между областями шаг уменьшался до 0,1. Начальными данными для задачи с параметрами $\{c_1, c_2 - h_2\}$ ниже линии ABC служила точка, принадлежащая аттрактору системы уравнений (3.1) для значений $\{c_1, c_2\}$. Расчеты начинались при $c_2 = 0$

Поведение системы (3.1) при $c_2 \to -\infty$ всегда определяется одной из особых точек. Результаты проведенного анализа содержатся в таблице. Они приводят к неожиданному выводу: решения уравнений (3.1) ведут себя качественно одинаково при $c_2 \to 0$ и $c_2 \to -\infty$. В первом случае устойчива особая точка $\{\xi = 1, \eta = 0\}$. Во втором — другая особая точка $\{\xi^*, \eta^*\}$, причем $\xi^* \to 1$, $\eta^* \to +0$ при $c_2 \to -\infty$. Отметим, что при $c_2 \to -\infty$ есть диапазон параметров, где также устойчивы две особые точки. Так обстоит дело, например, если $k = 3$, $c_1 = 3$, $c_2 \to -\infty$ [27].

4. Остановимся теперь на периодических решениях уравнений (3.1). Пусть функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\theta(t)$ удовлетворяют этой системе уравнений, причем $\xi(t + T) = \xi(T)$, $\eta(t + T) = \eta(t)$. Тогда можно проверить, что

$$\theta(t + T) - \theta(t) = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \ldots \tag{3.12}$$

Асимптотическое поведение особых точек системы уравнений (3.1) при $c_2 \to \infty$

Корни уравнения четвертой степени	Особые точки системы (3.1)	Матрица линеаризованной системы уравнений (3.1)*
$x_1 = -\frac{15}{(8k^2-14)\varepsilon}$, $x_1 \to 0$, $c_2 \to \infty$	$\xi_1 = \frac{7-4k^2}{35}$, $\eta_1 = \frac{8}{3}\frac{7-4k^2}{35}$, $\theta_1 = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1\ldots$	$\begin{pmatrix} \frac{8k^2-14}{35} & -\frac{3k^2+21}{35} & -c_2\frac{8}{3}\frac{(7-4k^2)^2}{35^2} \\ \frac{16(9k^2-7)}{35} & \frac{4(4k^2-7)}{35} & c_2\frac{16}{3}\frac{(7-4k^2)^2}{35^2} \\ 4c_2 & -3c_2/2 & \frac{2(49-13k^2)}{105} \end{pmatrix}$
$x_2 = -2\varepsilon + 4c_1k^2$, $x_2 \to \infty$, $c_2 \to \infty$	$\xi_2 = 1$, $\eta_2 = \frac{-8c_1k^6}{c_2(1+2k^4)}$, $\eta_2 \to 0$, $c_2 \to \infty$, $\theta_2 = \pi + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1\ldots$	$\begin{pmatrix} -2 & -1-k^2 & -\frac{8c_1k^6}{1+2k^4} \\ 0 & 0 & \frac{16c_1k^6}{1+2k^4} \\ 0 & c_2/2 & -2(1+k^2) \end{pmatrix}$
$x_{3,4} = -1c_1k^2 \pm \pm \sqrt{4c_1^2k^4 - 4k^2 + 7}$	$\xi_{3,4} = \frac{(k^2-1)(1+x_{3,4}^2)}{2c_2x_{3,4}}$, $\eta_{3,4} = \frac{1+x_{3,4}^2}{c_2x_{3,4}}$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{2x_{3,4}}{1+x_{3,4}^2}$, $\cos\theta_{3,4} = \frac{1-x_{3,4}^2}{1+x_{3,4}^2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1-k^2 & -\frac{(1-x_{3,4}^4)(k^2-1)}{2c_2x_{3,4}^2} \\ 4 & 0 & \frac{(1-x_{3,4}^4)(k^2-1)}{c_2x_{3,4}^2} \\ \frac{4c_2}{1+x_{3,4}^2} & \frac{c_2(x_{3,4}^2-3)}{2(1+x_{3,4}^2)} & 4-2k^2 \end{pmatrix}$

* В матрице линеаризованной системы выписаны только главные члены.

Обычным предельным циклам, которые представляют собой замкнутые траектории в пространстве ξ, η, θ ($0 \leqslant \xi < \infty$, $0 \leqslant \eta < \infty$, $-\infty < \theta < \infty$), соответствуют решения с $m = 0$. Если $m \neq 0$, то функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\theta(t)$ определяют спирали. В литературе их называют предельными циклами второго рода в отличие от решений с $m = 0$, которые называют предельными циклами первого рода. Для краткости и те и другие решения будем называть циклами.

Удобно различать циклы по числу оборотов n, которые делает проекция точки $\{\xi, \eta, \theta\}$ на плоскости $\{\xi, \eta\}$ вокруг некоторой цен-

Уравнение для собственных значений этой матрицы	Условие устойчивости особой точки при $c_2 \to \infty$
$\lambda^3 + \frac{28-46k^2}{105}\lambda^2 + \frac{56}{3}c_2^2\frac{(7-4k^2)^2}{35^2}\lambda + \frac{16}{3}c_2^2\frac{(7-4k^2)^3}{35^2} = 0$	Неустойчива, если $\xi_1 > 0$, $\eta_1 > 0$
$(\lambda+2)(\lambda^2 + 2(1+k^2)\lambda - \frac{8c_1c_2k^6}{1+2k^4}) = 0$	$c_1c_2 < 0$
$\lambda^3 + (2k^2-4)\lambda^3 + \frac{k^2-1}{2x_{3,4}^2}(x_{3,4}^4 + 7)\lambda - \frac{k^2-1}{x_{3,4}^2}(x_{3,4}^2+1)(x_{3,1}^2 - 4k^2 + 7) = 0$	Либо $\begin{cases} k^2 > 2, \\ x_{3,4}^2 < 4k^2 - 7, \\ x_{3,4}^2 < \min\left[1, \frac{3k^2-7}{k^2-1}\right], \end{cases}$ либо $\begin{cases} k^2 > 2, \\ x_{3,4}^2 < 4k^2 - 7, \\ x_{3,4}^2 > \max\left[1, \frac{3k^2-7}{k^2-1}\right] \end{cases}$

тральной области, возвращаясь в начальное положение [27]. Циклы, которые характеризуются числами m и n, будем обозначать S_m^n. Циклы S_m^1 будем называть простыми.

Вновь рассмотрим системы, у которых $k = 1$. Выделим наиболее интересные качественные особенности решений и отметим их общие черты.

На рис. 8 показано разбиение плоскости параметров $\{c_1, c_2\}$ на области, в которых аттракторы системы уравнений (3.1) имеют различный тип. На кривой QNP (см. рис. 7, 8) особая точка, опреде-

лявшая асимптотику системы, теряет устойчивость. Происходит бифуркация рождения предельного цикла S_0^2, или, как ее часто называют, бифуркация Хопфа. Возникающий цикл устойчив на участке QN и неустойчив на участке NP. В последнем случае в расчетах при переходе через линию QNP скачком появляются непериодические решения [27].

При уменьшении параметра c_2 амплитуда устойчивого цикла растет. Начиная с некоторого значения этого параметра, асимптотика системы определяется циклом S_1^1. По мере приближения к точке перехода $S_0^1 \to S_1^1$, как показывают расчеты, период цикла $T(c_2) \to \to \infty$. Линия, на которой происходит этот переход, показана на рис. 8.

Существует область параметров на плоскости $\{c_1, c_2\}$, где происходит усложнение периодических решений (см. рис. 8). В этой области наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода, теория которых интенсивно развивается в настоящее время [29, 30]. При этом цикл типа S_m^n переходит в S_{2m}^{2n}, и его период удваивается. На рис. 9 показаны решения, возникшие в результате нескольких первых удвоений на линии $c_1 = 1{,}5$. По оси абсцисс отложена величина $\rho_0 = \xi^{1/2}$, по оси ординат — $\rho_1 = \eta^{1/2}$. После нескольких бифуркаций $S_m^n \to S_{2m}^{2n}$ в расчетах наблюдаются непериодические решения, примеры которых мы рассмотрим ниже. Как правило, при дальнейшем уменьшении c_2 происходят бифуркации $S_{2m}^{2n} \to S_m^n$, в результате которых снова возникают простые циклы (см. рис. 8).

Наиболее сложные периодические решения наблюдаются при небольших значениях c_1: $1 \lesssim c_1 \lesssim 2$. Они могут иметь релаксационный характер. При одних и тех же значениях параметров здесь могут существовать два устойчивых предельных цикла.

Рис. 8 показывает, что в широкой области параметров асимптотику решений определяют простые циклы. В изучаемой системе наблюдается интересная закономерность: период устойчивого предельного цикла остается постоянным при изменении параметра c_2 в широких пределах. Например, при $|c_2| \geqslant 1$, $k = 1$ выполняется соотношение $T = 3/c_1$. При этом остальные характеристики решения могут меняться сложным образом. В работе [27] это явление было названо эффектом постоянства периода.

Напомним, что решения системы (3.1) $\{\xi(t), \eta(t), \theta(t)\}$ определяют эволюцию функций $\{x_0(t), y_0(t), x_1(t), y_1(t)\}$ в системе (2.3). Каждой устойчивой точке системы (3.1) соответствует автоколебательный процесс в системе (2.3). Амплитуды колебаний, их частоты и разность фаз в таком решении остаются постоянными. Если асимптотику системы (3.1) определяет предельный цикл, то в уравнениях (2.3) ему соответствует двухчастотный режим, промодулированный по амплитуде колебания.

Каждой точке на плоскости $\{c_1, c_2\}$ (см. рис. 8) соответствует один аттрактор, выход на который происходит с определенных начальных данных. Возникает вопрос: будет ли происходить выход на то же решение, если изменится начальная точка? Проведенные расчеты пока-

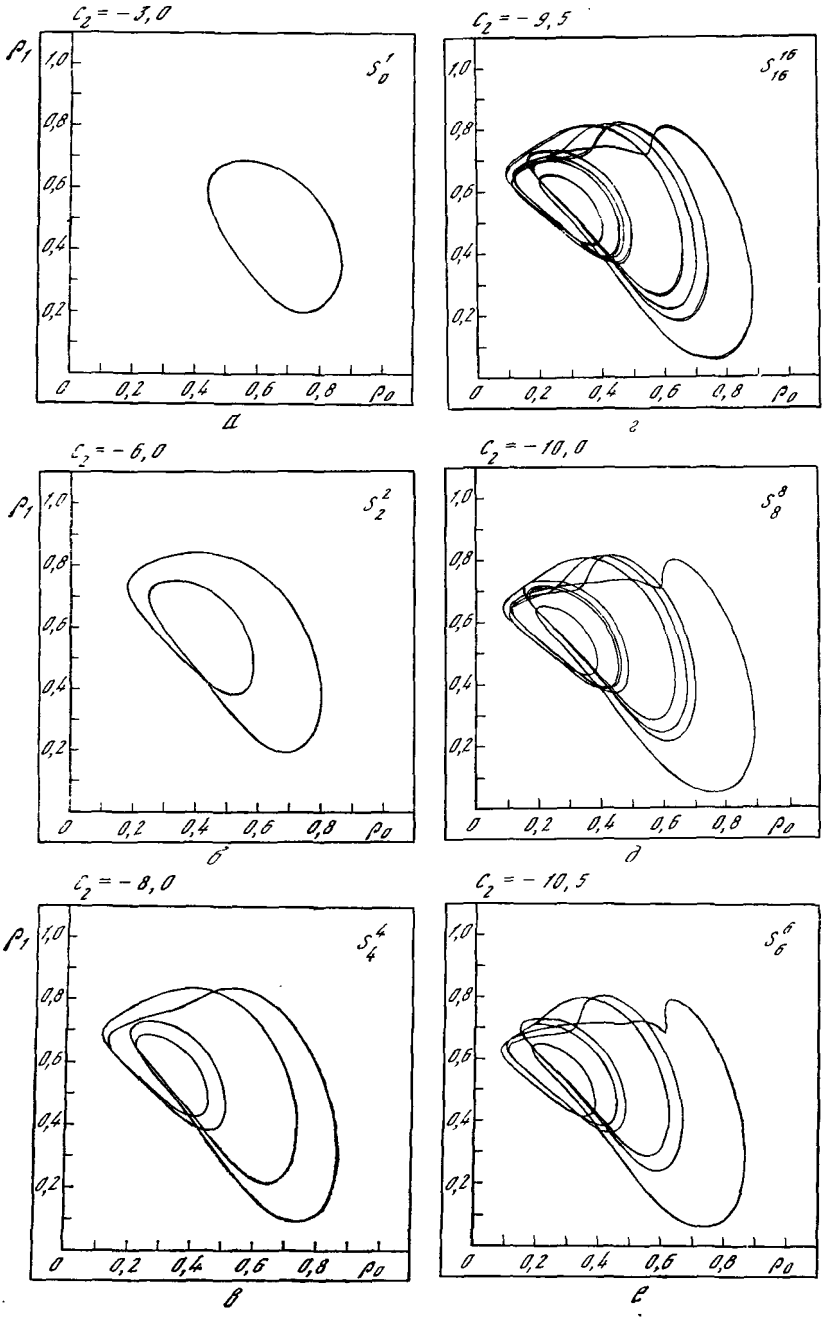


Рис. 9. Усложнение решений системы (3.1) при $c_1 = 1{,}5$, $k = 1$

зывают, что в изучаемом случае сосуществование аттракторов является скорее исключением, чем правилом. Вместе с тем вблизи некоторых линий бифуркации изменение начальных данных может привести к выходу на другое решение.

5. Рассмотрим непериодические решения системы уравнений (3.1). Проекция таких решений на плоскость $\{\rho_0, \rho_1\}$ оказывается очень сложной и не дает качественной информации о процессе. Поэтому здесь можно воспользоваться приемом, предложенным Э. Лоренцем [21]. Будем следить за значениями локальных максимумов функции $\rho_0(t) = \xi^{1/2}(t)$. По оси абсцисс отложим значения n-го максимума, по оси ординат — $(n+1)$-го. Замечательным свойством системы (3.1) является то, что эти точки обычно не заполняют какие-либо области на плоскости. Они лежат вблизи некоторой кривой $M_{n+1} = f(M_n)$, которая определяет одномерное отображение отрезка в себя. В пределах точности расчетов это отображение часто оказывается непрерывным и однозначным.

Непериодическим решениям соответствуют последовательности точек, заполняющие целые отрезки на кривой $M_{n+1} = f(M_n)$ или всю кривую. Предельный цикл определяет на ней конечное число точек. Зная функцию f, можно по данному M_p определить $M_{l+n} = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(M_p)))$, $n \geqslant 1$. Такая процедура неустойчива, поэтому достоверные предсказания можно получить лишь для небольших значений n. Существование непрерывной однозначной функции f, которая в определенном смысле характеризует сложное решение системы (3.1), позволяет использовать при его исследовании методы теории одномерных отображений. К настоящему времени в этой теории получен ряд принципиальных результатов [29—31].

На рис. 10 показаны одномерные отображения, полученные при численном решении задачи (3.1) для разных значений c_2 и $c_1 = 5$. Непериодические решения ведут себя по-разному в трех областях параметров, примерное положение которых показано на рис. 8. В области I функция $f(M)$ во всех рассмотренных случаях непрерывна, однозначна, имеет один острый максимум (рис. 10). Качественно она аналогична одномерному отображению в системе Лоренца [21].

Если в области параметров I переход к хаосу при уменьшении значения c_2 происходил в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, то в области II переход от особой точки к непериодическому режиму может происходить скачком [32]. Выше линии QNP (см. рис. 8) система (3.1) имеет устойчивую особую точку и (одновременно) непериодические решения, которые наблюдаются в расчетах при определенных начальных данных [32]. Механизм возникновения сложных решений в этом случае требует отдельного изучения. Функция $f(M)$ в области II качественно будет такой же, как в области параметров I.

В области III зависимость M_{n+1} от M_n оказывается более сложной. Функция f может быть неоднозначной и иметь разрывы. По-видимому, это обусловлено тем, что при близких значениях парамет-

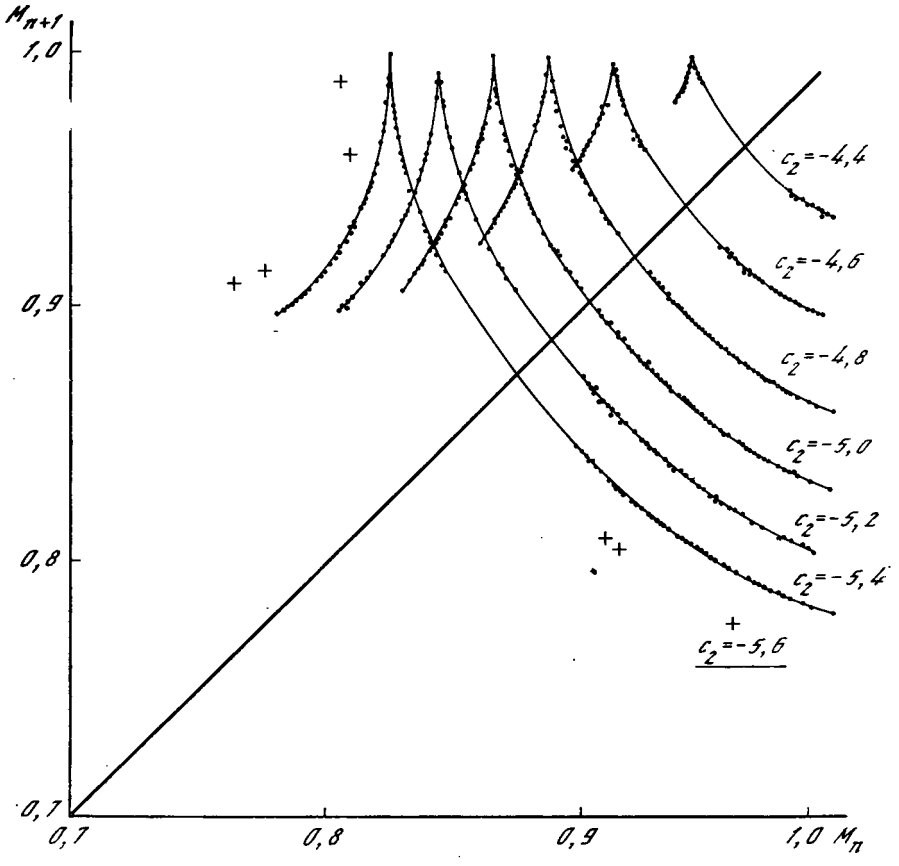


Рис. 10. Одномерные отображения, соответствующие решениям упрощенной системы при $c_1 = 5{,}0$; $k = 1$

При $c_2 = -5{,}6$ в системе есть устойчивый цикл S^8

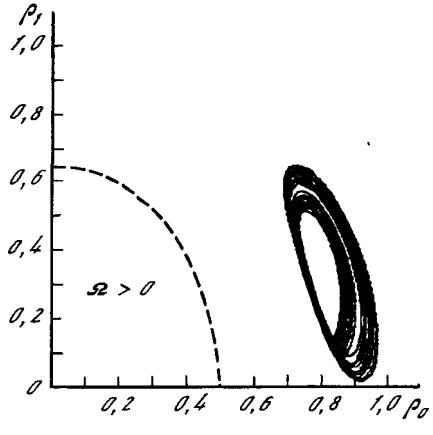


Рис. 11. Проекция непериодического решения уравнений (3.1) на плоскость $\{\rho_0, \rho_1\}$

$c_1 = 7$, $c_2 = -6$, $k = 1$, $1000 < t < 1100$. Пунктиром показана линия, на которой система становится недиссипативной

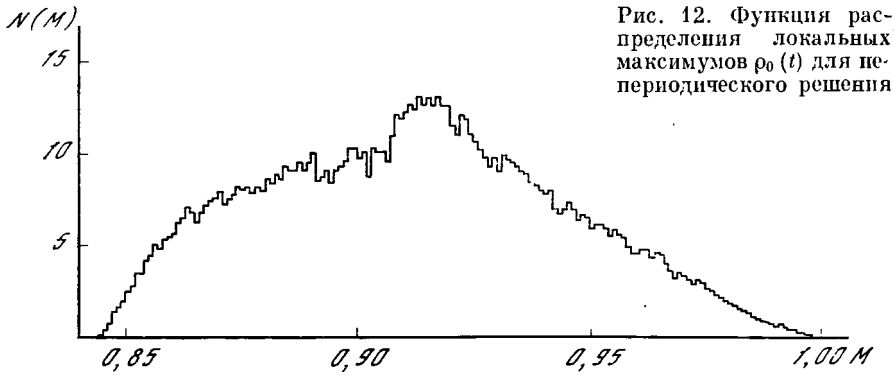


Рис. 12. Функция распределения локальных максимумов $\rho_0(t)$ для непериодического решения

ров у системы (3.1) появляется устойчивая особая точка (на линии кратных корней EF).

6. Рассмотрим подробнее один пример непериодического решения системы уравнений (3.1). Для того чтобы выяснить, насколько часто величины M_n принимают то или иное значение, удобно ввести дискретный аналог функции распределения максимумов $\rho_0 - N(M)$. При $c_1 = 7$, $c_2 = -6$, $k = 1$ (рис. 11) эта функция получается такой, как показано на рис. 12. Она зависит от общего числа максимумов N_0 и шага ε по оси абсцисс. Расчеты показывают, что $N(M)$ устанавливается при больших значениях N_0. На рис. 12 $N_0 = 88\,729$, $\varepsilon = 10^{-3}$. В изучаемом решении локальные максимумы $\rho_0(t)$ непрерывно распределены по отрезку. Это приводит к выводу, что мы действительно имеем дело с непериодическим решением или с таким решением, которое имеет $300 \div 400$ различных максимумов. Важно отметить, что одна и та же функция $N(M)$ была получена при нескольких различных начальных данных.

Важной характеристикой решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений являются показатели Ляпунова $\{\lambda_i\}$, характеризующие поведение близких к нему траекторий, показывающие, насколько быстро траектории расходятся ($\lambda_p > 0$) или стремятся друг к другу ($\lambda_p < 0$) вдоль разных направлений [33]. Для особой точки ляпуновские показатели совпадают с действительными частями собственных значений матрицы линеаризованной системы. В случае предельного цикла один из показателей равен нулю. Существование у сложного решения положительных показателей Ляпунова говорит о том, что близкие траектории экспоненциально расходятся. Это дает основание полагать, что наблюдаемое решение является странным аттрактором.

Для вычисления ляпуновских показателей удобно воспользоваться методикой, предложенной в работе [33]. Решение системы (3.1), представленное на рис. 11, характеризуется следующими показателями: $\lambda_1 = +0{,}23$, $\lambda_3 = -4{,}39$, λ_2 близок к нулю. Эти же значения λ_i были получены в расчетах при других начальных данных. Отметим, что установившееся решение лежит в той области $\{\xi, \eta\}$, где $\Omega = \partial\dot{\xi}/\partial\xi + \partial\dot{\eta}/\partial\eta + \partial\dot{\theta}/\partial\theta < 0$, т. е. система (3.1) диссипа-

тивна (область, где это неравенство нарушается, показана на рис. 11).

Важной характеристикой аттрактора является его размерность. Есть два типа определений размерности странного аттрактора — метрические и вероятностные [34]. Первые рассматривают его просто как множество точек в фазовом пространстве, вторые учитывают также вероятность попадания интегральной кривой в ту или иную точку. Ляпуновские показатели дают возможность оценить вероятностную размерность аттрактора. Формула, предложенная Капланом и Йорке, в нашем случае принимает вид [34]

$$d = 2 + (\lambda_1 + \lambda_2)/|\lambda_3| \approx 2{,}05.$$

Для достаточно полного описания поведения сложных решений системы уравнений (3.1) можно рассматривать соответствующие им двумерные отображения Пуанкаре. Мы будем рассматривать последовательные пересечения траекторий с плоскостью $\theta = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$: $\xi_{n+1} = h(\xi_n, \eta_n)$, $\eta_{n+1} = g(\xi_n, \eta_n)$. Расчеты показывают, что для изучаемого решения (см. рис. 11) функции h и g непрерывны, но имеют разрыв производных на некоторой линии. Точки последовательных пересечений траектории с плоскостью оказываются близки к одномерной кривой. Этот факт и малая дробная часть размерности d показывают, что аттрактор должен хорошо описываться одномерным отображением. Действительно, точки с координатами $\{\xi_n, \xi_{n+1}\}$ с высокой точностью определяют непрерывную однозначную функцию $\xi_{n+1} = \chi(\xi_n)$. Повышение точности расчетов показало, что аттрактор двумерного отображения имеет сложную внутреннюю структуру.

Подведем некоторые итоги. Проведенный анализ системы (3.1) позволил получить разбиение плоскости параметров $\{c_1, c_2\}$ при $k = 1$ на области, в которых аттракторы имеют один и тот же тип. Рис. 8 дает классификацию решений по их поведению при $t \to \infty$. Полученная картина является достаточно простой. В большей части пространства параметров асимптотика определяется особыми точками и простыми предельными циклами, границы этих областей задаются сравнительно простыми соотношениями. В некоторой области параметров система уравнений (3.1) имеет странный аттрактор, который хорошо описывается непрерывным одномерным отображением. Это значительно упрощает анализ непериодических решений. Возможно, многие свойства этих решений окажутся общими для многих диссипативных систем.

4. Решения задачи в частных производных в случае малой длины области

После исследования упрощенной модели (3.1) возникает ряд вопросов. Как связана система обыкновенных дифференциальных уравнений и задача в частных производных? Имеет ли место количественное соответствие или качественно одинаковое поведение их решений? Какова область применимости двухмодовой системы?

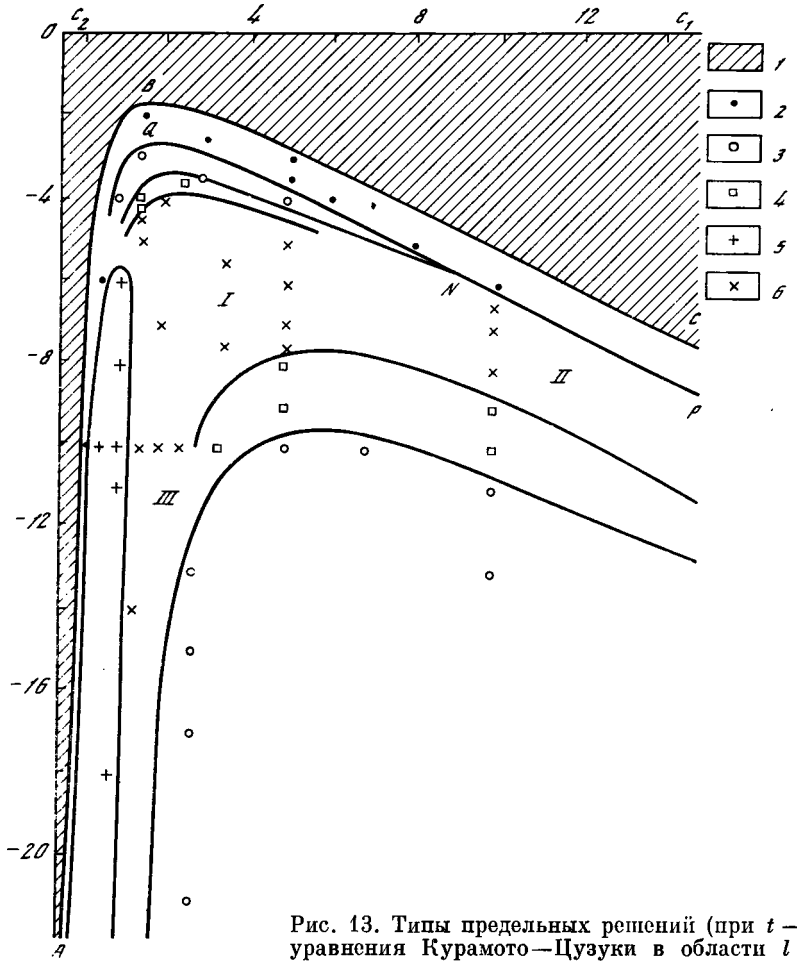


Рис. 13. Типы предельных решений (при $t \to \infty$) уравнения Курамото—Цузуки в области $l = \pi$

1 — устойчиво пространственно однородное решение; *2* — решение, у которого величины ρ_n не зависят от времени; *3* — периодическое решение, у которого $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ определяют простой цикл; *4* — $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ определяют двойной цикл; *5* — четное решение; *6* — более сложные режимы. Сплошные линии приближенно показывают положение границ, на которых решение меняет свой тип

1. Сравним поведение решений системы уравнений (3.1) и задачи (2.1) при $t \to \infty$. На рис. 13 показаны результаты расчетов для задачи в частных производных при $l = \pi$ ($k = 1$). В качестве начальных данных использовались функции, не обладающие пространственной симметрией:

$$W_0(x) = \Big[\sum_{m=0}^{3} \cos(2\pi m x/l)\Big] + i\Big[\sum_{m=0}^{3} \cos((2m+1)\pi x/l)\Big].$$

На плоскости параметров $\{c_1, c_2\}$ удобно выделить несколько областей, где асимптотика решений имеет один и тот же тип.

Выше линии ABC обе системы обладают одинаковыми свойствами. В линейном приближении здесь устойчиво пространственно однородное решение (1.5) или его аналог — особая точка $\{\xi = 1, \eta = 0\}$. При переходе через эту линию в упрощенной модели возникает новая устойчивая особая точка, поэтому при $t \to \infty$ $\rho_0 = \xi^{1/2} \to$ $\to$ const, $\rho_1 = \eta^{1/2} \to$ const, $0 \to$ const. Функции x_0, x_1, y_0, y_1 в (2.3) меняются по гармоническому закону. В этом диапазоне параметров в задаче в частных производных происходит выход на решения, у которых величины ρ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и $\Psi_n = \varphi_n - \varphi_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, постоянны (ρ_n и φ_n определяются формулой (2.8)). Справедлива следующая лемма [24].

Л е м м а. *Пусть* $W(x, t)$ — *решение задачи* (2.1). *Необходимым и достаточным условием того, чтобы оно было автомодельным решением вида* $W = R(x) \exp[i\omega t + ia(x)]$, *является выполнение равенств* $\rho_n(t) = \text{const}$, $\Psi_n(t) = \text{const}$.

Таким образом, особым точкам упрощенной системы в исходной задаче соответствуют автомодельные решения. Естественно сравнивать величины $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$, характеризующие решение задачи (2.1), со значениями $\xi^{1/2}(t)$ и $\eta^{1/2}(t)$ в системе (3.1). Например, при $c_1 = 3{,}0$, $c_2 = -2{,}5$, $k = 1$ в задаче (2.1) $\rho_0 = 0{,}845$, $\rho_1 = 0{,}331$; в системе (3.1) $\rho_0 = 0{,}857$, $\rho_1 = 0{,}337$. При $c_1 = 8{,}0$, $c_2 = -5{,}0$, $k = 1$ в исходном уравнении $\rho_0 = 0{,}909$, $\rho_1 = 0{,}229$; в упрощенной модели $\rho_0 = 0{,}919$, $\rho_1 = 0{,}234$. Другие примеры сравнения автомодельных решений и особых точек есть в работе [24]. Они позволяют сделать вывод, что в этой области параметров приближенная система дает хорошее количественное описание решений задачи в частных производных. Нижняя граница области параметров, в которой асимптотику определяет автомодельное решение (участок QNP на рис. 13), также близка к той, которая получена в упрощенной системе (участок QNP на рис. 8). На этой границе происходит бифуркация Хопфа. В приближенной системе рождается предельный цикл. В исходной задаче появляются решения, у которых функции $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ меняются периодически. Можно проверить, что при этом решение задачи (2.1) имеет вид

$$W(x, t) = R(x, t) \exp[i\omega_0 t + i\omega_1(t) + ia(x, t)], \qquad (4.1)$$

где $R(x, t + T) = R(x, t)$; $\omega_1(t + T) = \omega_1(t)$; $a(x, t + T) = a(x, t) + 2\pi p$; $p \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$; $\omega_0 = \text{const}$; T — период функций $\rho_n(t)$ и $\Psi_n(t)$. Если с различных начальных данных происходит выход на такое решение, то для краткости мы также будем называть его циклом и использовать обозначение S^n. Характеризующие это решение функции $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ будем сравнивать с предсказаниями упрощенной системы [24].

Выше границы перехода к сложным решениям (см. рис. 13) амплитуды и периоды простых циклов в системе (3.1) и в задаче в частных производных отличаются не более чем на 10—15%. Ниже области сложных решений близки периоды циклов, хотя их размеры могут отличаться в несколько раз. Причиной того, что размеры не совпадают, является влияние второй гармоники. Это показывает

решение более сложной приближенной системы, в которой учтены не только нулевая и первая, но и вторая гармоника: оно практически не отличается от того, что дает задача в частных производных [24].

В упрощенной модели (3.1) в широком диапазоне изменения параметра c_2 период простых циклов от этого параметра не зависел. Оказывается, что и в исходном уравнении наблюдается та же закономерность. Причем значения периода близки к тем, которые предсказывает упрощенная система. Можно ожидать, что эффект постоянства периода характерен для многих двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации.

Во многих работах, где исследуются диссипативные структуры, отмечается независимость возникающих структур от многих параметров, их соответствие внутренним свойствам нелинейной системы. Не раз подчеркивалась независимость от начальных данных («забывание» деталей начальных данных [3, 4, 2]), от краевых условий (эффекты локализации процессов [3, 4]). Здесь мы видим новый тип независимости процессов от параметра. Величина c_2 определяет частоту колебаний пространственно однородного решения (1.5). Диссипативные процессы приводят к тому, что частота модуляции колебаний всей системы (которую и определяет период цикла) от c_2 не зависит.

2. Выше мы видели, что простейшие решения задачи в частных производных и приближенной системы хорошо согласуются между собой. Тем не менее в плоскости параметров $\{c_1, c_2\}$ есть две области, где они существенно различаются (см. рис. 13). Эта область четных автомодельных решений $c_1 \lesssim 1{,}2$ и асимптотическая область $c_2 \to -\infty$. Рассмотрим их подробнее.

Из упрощенной системы следует, что в области параметров AEF (см. рис. 8) существует устойчивая особая точка. Поэтому в задаче (2.1) здесь должен происходить выход на автомодельное решение вида (1.8). Обратимся к результатам расчетов. Зафиксируем значение c_2 и будем увеличивать параметр c_1. Типичная картина показана на рис. 14. При $c_1 = c_1'$ пространственно однородное решение теряет устойчивость, в системе возникает автомодельное решение. Однако при $c_1 > c_1''$ это решение качественно меняется. В его рядах Фурье исчезают гармоники с нечетными номерами. Функции $R(x)$ и $a(x)$ при $t \to \infty$ являются четными, несмотря на то что начальные данные не обладали пространственной симметрией. Параметры этих решений также могут быть предсказаны с точностью до нескольких процентов на основе упрощенной системы (3.1). В ней надо положить $k = 2\pi/l$, так как наибольшую амплитуду имеют нулевая и вторая гармоники.

Для того чтобы качественно объяснить наблюдаемую картину, нужно использовать более сложную модель, чем система (3.1). Ее можно получить из первых шести уравнений системы (2.8), отбросив члены вида $\cos(\pi m x/l)$, $m > 2$, и записав уравнения в переменных $\{\rho_0, \rho_2, \Psi_2, \rho_1, \Psi_1\}$. Чтобы оценить границы интервала (c_1'', c_1'''), где устойчиво четное автомодельное решение, исследуем устойчивость «четного» решения полученной приближенной системы.

Пусть величины $\{\rho_0, \rho_2, \Psi_2, 0, \Psi_1\}$ определяют особую точку этой системы для $k = 1$. Тогда $\{\rho_0, \rho_2, \Psi_2\}$ является особой точкой системы (3.1) для $k = 2$. Значение Ψ_1 можно найти из условия $\dot{\Psi}_1 = 0$. Расчеты показывают, что эта точка устойчива в рассматриваемой области параметров, а, значит, соответствующая ей матрица A (см. (3.10)) отрицательно определена. Линеаризованная система пяти уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_0 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\Psi}_2 \\ \dot{\rho}_1 \\ \dot{\Psi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & a_{14} & 0 \\ & \mathrm{A} & & a_{24} & 0 \\ & & & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_2 \\ \Psi_2 \\ \rho_1 \\ \Psi_1 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Три ее собственных значения совпадают с собственными значениями матрицы A и имеют отрицательные действительные части. Два других определяются формулами

$$\lambda_1 = P + \sqrt{Q\,(1 + c_2^2) - R^2}, \quad \lambda_2 = -2\sqrt{Q\,(1 + c_2^2) - R^2}, \tag{4.3}$$

где $P = 1 - k^2 - 2\rho_0^2 - \rho_2^2 - 2\rho_0\rho_2\cos\theta_2$;

$$Q = \rho_0^4 + \rho_2^4/4 + 2\rho_0\rho_2\cos\theta_2\,[\rho_0^2 + \rho_2^2/2 + \rho_0\rho_2\cos\theta_2];$$

$$R = -c_1k^2 - c_2\rho_0^2 - 2c_2\rho_0\rho_2\cos\theta_2 + 0{,}5\rho_2^2\,[\sin 2\theta_2 + c_2\cos 2\theta_2].$$

Четное решение теряет устойчивость относительно первой гармоники, если $\lambda_1(c_1) = 0$. Это условие и формулы (4.3) дают оценки для c_1' и c_1''. Эти оценки хорошо согласуются со значениями, наблюдаемыми в расчетах для задачи (2.1) [24].

Таким образом, асимптотику решений уравнения Курамото—Цузуки может определять четное решение. Этот факт очень интересен. В отличие от большинства открытых нелинейных систем, где происходит спонтанная потеря симметрии [1, 2], здесь наблюдается спонтанное ее возникновение. При $t \to \infty$ решение обладает симметрией, которой нет у начальных данных. Четное решение удовлетворяет условию отсутствия потоков в точке $x = l/2$. Поэтому его можно получить, рассматривая асимптотику решений задачи (2.1) в области вдвое меньшей длины. Нелинейная система распадается при $t \to \infty$ на две одинаковые невзаимодействующие подсистемы. Более сложные симметричные решения, соответствующие распаду на большее число невзаимодействующих частей, могут оказаться устойчивыми в областях большей длины.

Рассмотрим область параметров $c_2 \to -\infty$. Пусть $c_1 = 3{,}0$. При $c_2 \lesssim -35$ решения системы (3.1) и задачи (2.1) ведут себя по-разному. В упрощенной системе существует устойчивая особая точка (см. рис. 8), в исходном уравнении ее аналога нет (см. рис. 13), здесь по-прежнему устойчив простой цикл. Его период медленно уменьшается с уменьшением параметра c_2 и при $c_2 \lesssim -400$ становится

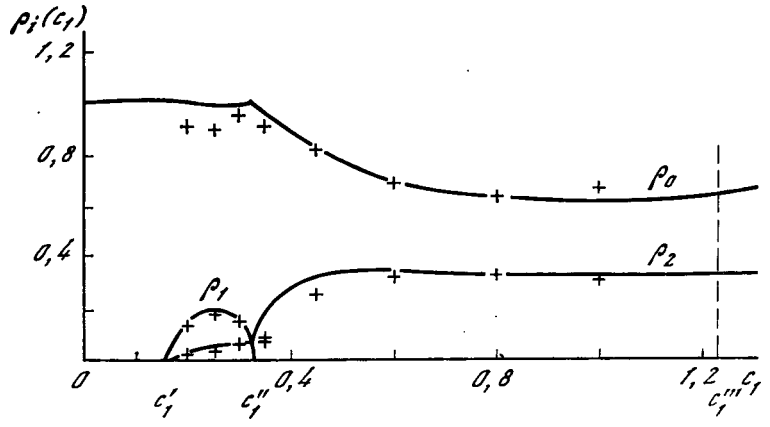


Рис. 14. Изменение параметров автомодельного решения с ростом c_1

Шаг по параметру c_1 равен 0,01, $c_2 = -10$, $l = \pi$. Сплошные линии соответствуют пяти обыкновенным дифференциальным уравнениям, маркеры — расчетам в частных производных

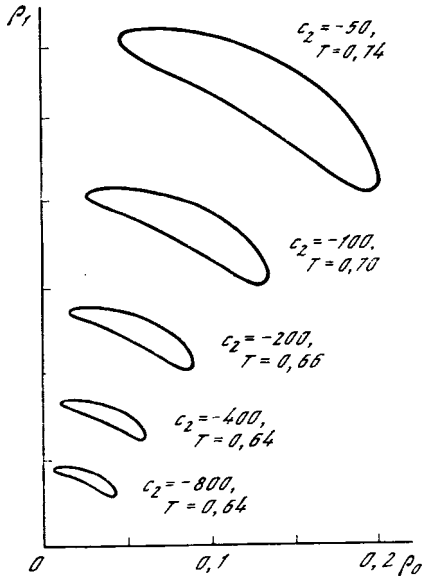


Рис. 15. Периодические решения задачи (2.1) при $c_2 \to -\infty$

Деления на оси ρ_1 — 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3

постоянным. Размеры цикла меняются по закону $\sim |c_2|^{-1/2}$ (рис. 15), решения исходного уравнения и уравнения

$$W_t = W + (1 + ic_1)W_{xx} - ic_2 W |W|^2 \qquad (4.4)$$

близки. Область применимости уравнения (4.4) ограничена; его однородные решения бесконечно возрастают при $t \to \infty$. Тем не менее его анализ может оказаться полезным.

Поскольку $|W| \sim |c_2|^{-1/2} \to 0$, $c_2 \to -\infty$, то в этой области параметров $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ также близки к нулю. Аналог такого решения в системе (3.1) должен лежать вблизи начала координат, там, где величина Ω строго положительна и, следовательно, устойчивых циклов нет. Этим обусловлено различие в поведении решений исходной задачи и упрощенной модели.

3. Выше мы сравнивали простые циклы и особые точки в упрощенной системе (3.1) с их аналогами в уравнении (2.1). Продолжим это сравнение для более сложных решений. Как и раньше, будем сопоставлять амплитуды нулевой $\rho_0(t)$ и первой $\rho_1(t)$ гармоник с решениями $\xi^{1/2}(t)$ и $\eta^{1/2}(t)$ упрощенной системы (3.1).

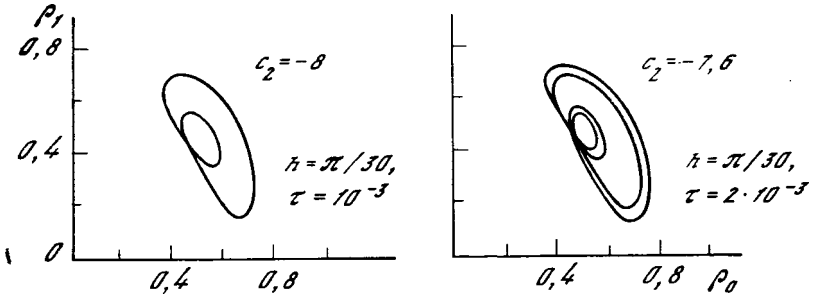


Рис. 16. Примеры решений задачи (2.1) на линии $c_1 = 5$, $l = \pi$

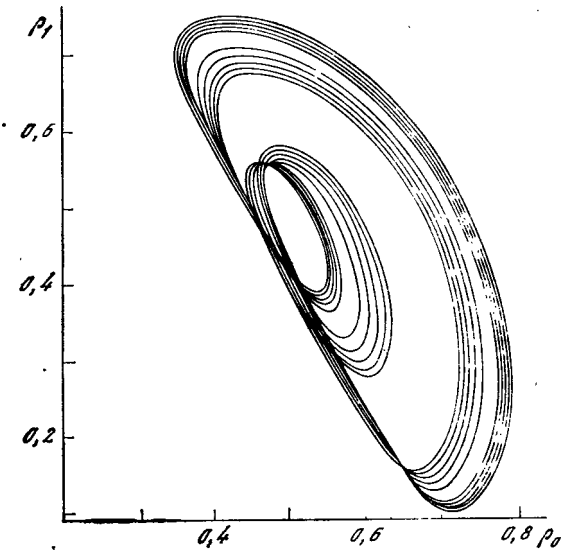


Рис. 17. Сложный цикл типа S^{20}, определяющий асимптотику решений задачи (2.1) при $c_1 = 5$, $c_2 = -7{,}3$. $l = \pi$ ($h = \pi/30$, $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$)

Период цикла $T = 24{,}1$

Рассмотрим задачу (2.1) при $c_1 = 5{,}0$, $l = \pi$. Асимптотику ее решений при $c_2 = -10$ определяет простой цикл. Циклы S^2 и S^4 показаны на рис. 16. Можно проследить и следующие удвоения, которые наблюдаются при увеличении параметра c_2 [32]. Напомним, что в уравнениях (3.1) переход к хаосу в этом диапазоне параметров также происходил в результате последовательности бифуркаций удвоения периода. Следовательно, этот механизм усложнения решений широко распространен не только в одномерных отображениях или обыкновенных дифференциальных уравнениях, но и в открытых диссипативных системах, которые описываются уравнениями в частных производных. По-видимому, применение теории Фейгенбаума [30] позволит количественно предсказывать те значения c_2, при которых происходят высшие бифуркации.

Задача в частных производных имеет и более сложные решения, к которым нельзя перейти только в результате бифуркаций удвоения. Пример одного из них, цикла S^{20}, показан на рис. 17.

Кроме сложных упорядоченных решений вида (4.1), в задаче (2.1) в широком диапазоне параметров наблюдаются хаотические решения.

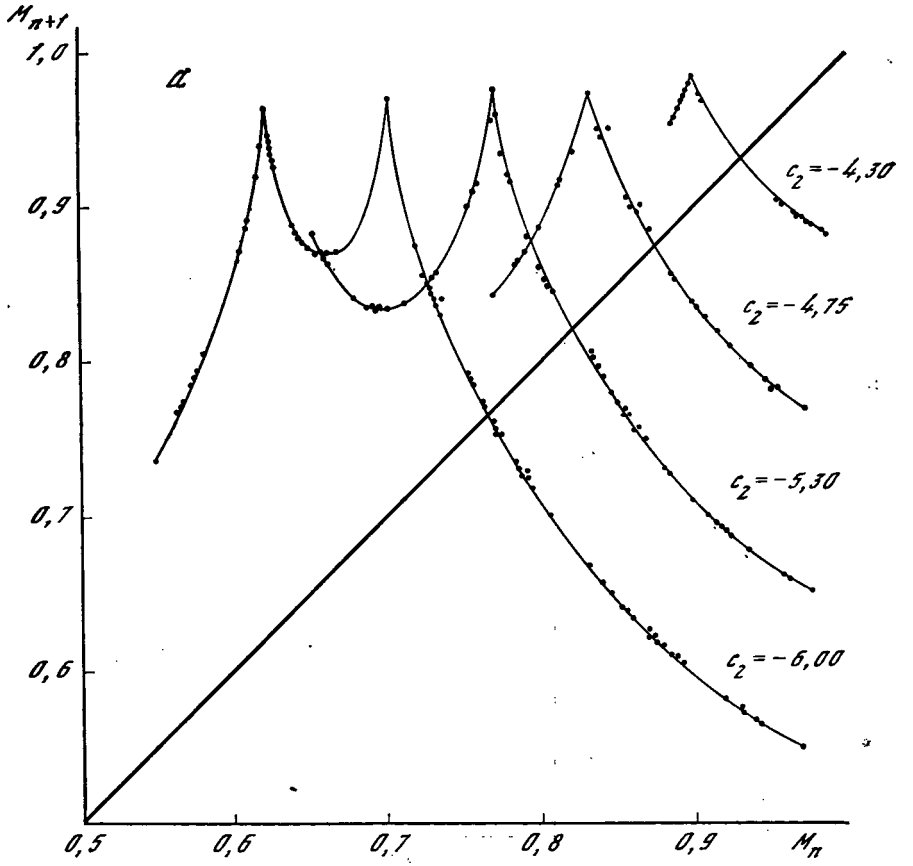
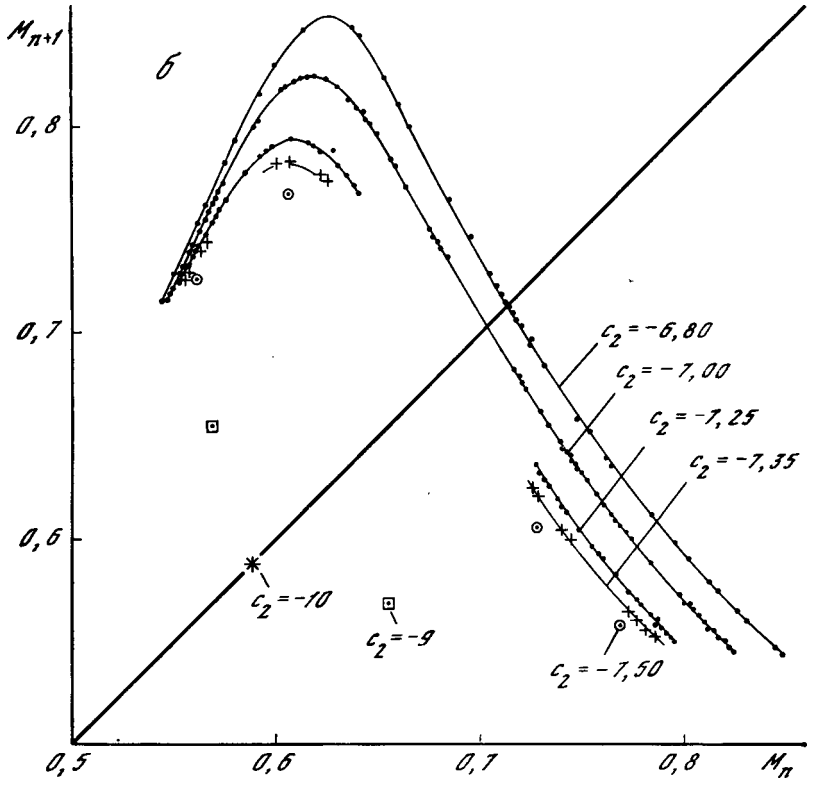


Рис. 18. Изменение одномерных отображений $M_{n+1} = f(M_n)$ в зависимости от параметра c_2

Задача в частных производных решалась при $c_1 = 5$, $l = \pi$

Странные аттракторы в двухмодовой системе порождали непрерывные одномерные отображения. Этой же замечательной особенностью обладает и задача в частных производных. Некоторые отображения показаны на рис. 18. В качестве M_n здесь также взяты последовательные максимумы функции $\rho_0(t)$.

Сравним вид одномерных отображений и их зависимость от параметра c_2 в упрощенной системе (см. рис. 10) и в исходной задаче. В системе (3.1) функция $f(M)$ качественно не меняется на линии $c_1 = 5{,}0$, которую мы рассматриваем. Она непрерывна, однозначна и имеет один острый максимум. В задаче (2.1) отображение имеет примерно такой же вид при достаточно больших значениях c_2. Если уменьшать этот параметр, то решение изменяется так, что у функции f появляется минимум ($c_2 \cong -5{,}3$), затем еще один острый максимум ($c_2 \cong -6{,}0$). При $c_2 \cong -6{,}3$ однозначность теряется, решение



задачи в частных производных по-прежнему непериодично. Потом происходит еще одна перестройка, после которой функция f становится гладкой и однозначной (см. рис. 18). Точки $\{M_n, M_{n+1}\}$ заполняют всю кривую.

При дальнейшем уменьшении c_2 координата максимума $f(M)$ уменьшается, весь ее правый склон смещается влево (см. рис. 18). При этом само решение качественно изменяется. При $c_2 = -7{,}25$ точки $\{M_n, M_{n-1}\}$ лежат в пределах двух «островов». Наблюдаемая картина аналогична переходам между решениями различных типов в модели Лоренца. В работе [35] было введено обозначение χ^n для непериодических решений с n «островами», мы также будем его использовать. Рис. 18 показывает, что в исследуемой задаче происходят переходы $\chi^1 \to \chi^2$ и $\chi^2 \to \chi^4$.

В той области параметров, где $f(M)$ является гладкой функцией, между непериодическими решениями лежат сложные циклы. Например, при $c_2 = -5{,}6$ — цикл S^8, при $c_2 = -7{,}3$ — S^{20}. Можно показать, что непрерывные одномерные отображения, характеризующие решения задачи (2.1), при этих же значениях параметров имеют раз-

личные неустойчивые циклы [29, 31]. В некоторых случаях их бесконечно много. По виду функции $f(M)$ можно также выяснить, определяет ли она непериодические решения. Для большинства непрерывных отображений на рис. 18 ответ утвердительный. Для них можно воспользоваться т е о р е м о й Ли—Йорке [29].

Если F — непрерывное отображение отрезка в себя и существуют точки a, b, c, d, такие, что $b = F(a)$, $c = F(b)$, $d = F(c)$ и $d \leqslant a < b < c$, то F имеет циклы любого периода и несчетное множество непериодических траекторий (теорема не гарантирует их устойчивости).

Непосредственно к функции $f(M)$ применить эту теорему не удается, однако точки a, b, c, d можно найти для отображения $f^2(M) = f(f(M))$ [32]. Этот факт дает основание полагать, что уравнение (2.1) в случае небольших областей описывает диффузионный хаос.

Особенно сложные непериодические решения уравнения (2.1) наблюдаются в области параметров *III* (см. рис. 13). Здесь последовательные элементы $\{M_n\}$, как правило, не определяют одномерного отображения. В некоторых случаях точки $\{M_n, M_{n+1}\}$ заполняют целые участки плоскости. Этот тип диффузионного хаоса оказывается более сложным, чем все рассмотренные выше. Результаты одного из расчетов представлены на рис. 19. По-видимому, анализ таких решений требует их предварительной обработки, а также исследования отображений более высокой размерности.

Проведенный анализ и результаты ряда других расчетов [24, 27, 32] позволяют ответить на вопрос профессора Курамото о связи явления диффузионного хаоса с наличием странного аттрактора в некоторой конечномерной системе. Можно утверждать, что такая связь существует. Двухмодовая система (3.1) позволяет предсказать многие важные свойства хаотических решений задачи в частных производных. Среди них можно выделить следующие: 1) наличие трех областей параметров, где по-разному происходит переход к непериодическим режимам; 2) последовательность бифуркаций, приводящая к хаосу; 3) вид одномерных отображений, соответствующих сложным решениям.

4. Выше мы приводили результаты решения задачи (2.1) для $l = \pi$. Интересно было бы выяснить, что происходит в больших областях. Возможны ли в них другие последовательности бифуркаций, приводящие к диффузионному хаосу? Каковы пределы применимости двухмодовой модели?

Первый вопрос рассматривался в работе [36]. Было показано, что при увеличении l также наблюдается усложнение решений задачи (2.1) и переход к хаосу. Однако механизм его возникновения не связан с бифуркациями удвоения, как это было при $l = \pi$. В этом случае в системе (2.1) наблюдаются последовательные бифуркации Хопфа [36]. Если снова выделить локальные максимумы $\rho_0(t)$ и построить график $M_{n+1} = f(M_n)$, то его типичный вид после двух бифуркаций будет таким, как показано на рис. 20. Механизм возникновения непериодических решений в результате нескольких бифуркаций Хопфа был рассмотрен Рюэлем и Такенсом [21]. Проведенные

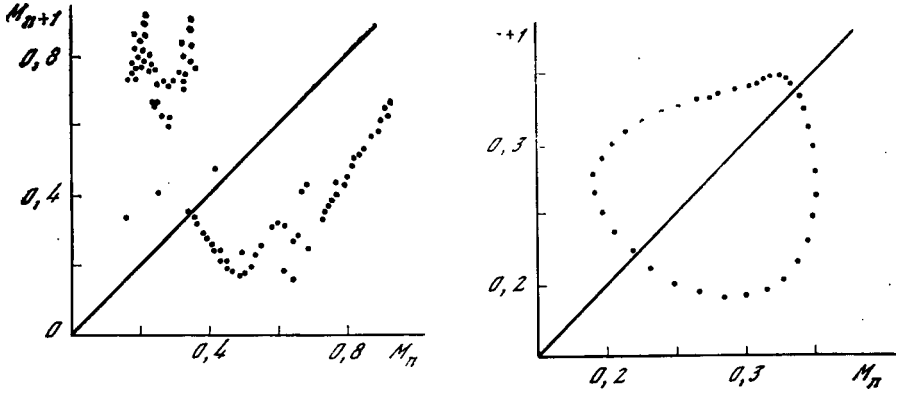


Рис. 19. Последовательность $\{M_n\}$, соответствующая непериодическому решению уравнения в частных производных

$c_1 = 1{,}5$, $c_2 = -8$, $l = \pi$

Рис. 20. Зависимость $M_{n+1} = f(M_n)$, полученная при численном решении задачи (2.1)

$c_1 = 4$, $c_2 = -4$, $l = \pi/0{,}51$

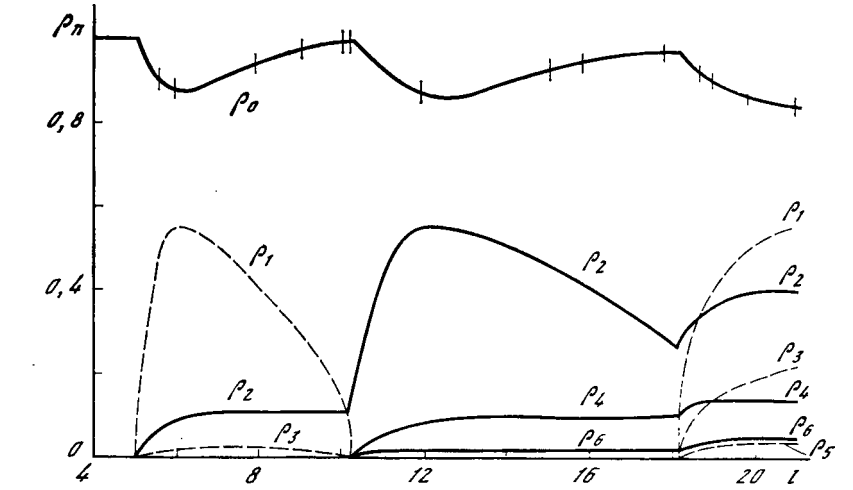


Рис. 21. Изменение автомодельных решений при увеличении длины области

$c_1 = 2$, $c_2 = -1$

расчеты позволяют предположить, что и во многих других случаях усложнение решений задачи (2.1) будет идти в соответствии с этим механизмом.

О границах применимости двухмодовой системы позволяют судить результаты следующего расчета. Будем увеличивать длину области при $c_1 = 2$, $c_2 = -1$. На рис. 21 показано, как ведут себя величины ρ_n $(t \to \infty)$ при разных значениях l. При $l = \sqrt{5/2}\pi \approx 5$

пространственно однородное решение теряет устойчивость, и далее асимптотику определяет автомодельное решение вида (1.8). Вначале наибольшую амплитуду имеют нулевая и первая гармоники. При этом хорошо работает система (3.1). Затем первая гармоника убывает, но упрощенную систему можно использовать, положив $k = 2\pi/l$. Далее происходит интересное явление: начиная с $l \cong 18$ число гармоник с близкими амплитудами быстро возрастает. При $l \simeq 22$ в системе наблюдается сложный колебательный режим. Вопрос о простых и эффективных упрощенных моделях в этой области параметров пока остается открытым.

5. При численном решении задачи (2.1) большое значение имеет методика расчетов. Решения этой задачи могут иметь сложный, часто непериодический характер, и практически единственным источником информации о них является вычислительный эксперимент. Недостатки алгоритма могут качественно изменить картину процессов.

В этой работе, а также в работах [15, 24, 32], при численном решении задачи (2.1) использовалась чисто неявная схема со вторым порядком аппроксимации краевых условий, для решения линейной системы — матричная прогонка [37]. Для изучаемой задачи обычно нужны большие времена расчетов (сильно зависящие от c_1 и c_2 и быстро растущие с увеличением длины области), за которые система успевает выйти на установившийся режим. Другая особенность — необходимость небольших шагов по времени и пространству. Жестким тестом для выбора шага по времени τ является расчет пространственно однородного решения, период которого известен и равен $2\pi/c_2$. Как правило, найденный шаг позволяет вычислять и другие решения, период которых обычно больше. Шаг τ должен убывать с ростом c_1. Ряд методических расчетов, иллюстрирующих выбор шага по пространству h, приведен в работе [24].

Коэффициенты Фурье решений изучаемой задачи быстро убывают с ростом их номера. Поэтому естественно использовать метод Галеркина и его модификации. Именно такие методы используются в работах [24, 25] при расчете симметричных решений. Для получения решений общего вида при $l = \pi$, как правило, достаточно 4—5 мод. Вместе с тем возмущения, которые вносят в решение разностная схема и метод Галеркина, различны. При численной реализации симметричных решений различных типов методом Галеркина эти решения сохраняют свойства симметрии при $0 \leqslant t < \infty$, что совпадает со свойствами исходной задачи. Применение разностной схемы приводит к другому результату: большинство симметричных решений, в том числе нечетные (см. рис. 2), распадаются. Поэтому выход на некоторое решение в этом случае говорит о его устойчивости, что очень важно в изучаемой задаче.

5. Простейшие типы упорядоченности в многомерном случае

1. Большой интерес представляет исследование аналогов уравнения (2.1) в пространственно-многомерном случае. Такие уравнения возникают в химии [14], биологии [26, 38], теории волн. Рассмотрим

следующую краевую задачу:

$$W_t = W + (1 + ic_1)(W_{xx} + W_{yy}) - (1 + ic_2) \mid W \mid^2 W,$$
$$0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant y \leqslant l,\ W(x, y, 0) = W_0(x, y), \qquad (5.1)$$
$$W_x(0, y, t) = W_x(l, y, t) = W_y(x, 0, t) = W_y(x, l, t) = 0.$$

Для уравнения (5.1) ранее рассматривалась задача Коши. Было показано, что решениями этой задачи могут быть спиральные волны, т. е. функции вида

$$W = R(r) \exp[i\omega t + ia(r) + im\varphi], \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \qquad (5.2)$$

Большая библиография по спиральным волнам содержится в работах [14, 38]. В работе [39] были численно построены функции $R(r)$ и $a(r)$ для одновитковой ($m = 1$) и многовитковой спиральных волн, высказаны соображения относительно их устойчивости. В работе [40] рассмотрены осредненные уравнения для характеристик таких волн в различных системах. Проведены также расчеты [41], показывающие, по-видимому, неустойчивость спиральной волны при некоторых значениях параметров. Тем не менее эти исследования не позволяют ответить на вопросы, касающиеся основных типов решений задачи (5.1) и способов их усложнения при изменении параметров задачи.

Будем изучать поведение решений задачи (5.1) при разных значениях c_1 и c_2 в случае небольших областей. В приводимых ниже расчетах, как правило, $l = \pi$, начальные данные несимметричны и имеют вид

$$u(x, y, 0) = 0{,}1 \sum_{m,\, n=0}^{4} \cos(\pi m x/l)\cos(\pi n y/l),$$
$$v(x, y, 0) = 0{,}1 \sum_{m,\, n=0}^{4} \cos(\pi m x/l)\cos(\pi n y/l)/(m + 1). \qquad (5.3)$$

В такой постановке будут существенны только простейшие симметричные решения. А именно:

а) пространственно однородное решение (1.5);

б) одномерные решения $W(x, y, t) = W(x, t)$, $W(x, y, t) = W(y, t)$;

в) решения, симметричные относительно диагоналей квадрата $W(x, y, t) = W(y, x, t)$ или $W(x, y, t) = W(l - y, l - x, t)$.

2. Анализ задачи (5.1), как и в одномерном случае, естественно начать с изучения упрощенных моделей. Для их построения решения этой задачи удобно представить в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} a_{mn}(t)\cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n y}{l}\right),$$

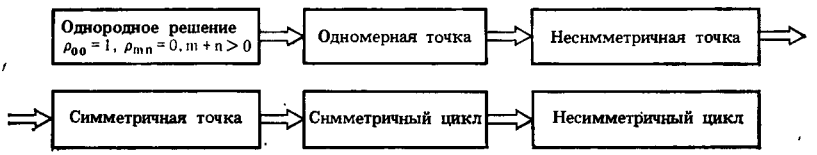
$$v(x, y, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}(t)\cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n y}{l}\right).$$

Далее можно записать систему уравнений, связывающую коэффициенты Фурье $a_{mn}(t)$ и $b_{mn}(t)$, $0 \leqslant t < \infty$. Упрощенные модели получаются из этой бесконечной системы, если оставить в ней конечное число уравнений. Это можно сделать разными способами, например отбрасывая гармоники a_{mn}, b_{mn} с номерами, у которых $m \geqslant p$ или $n \geqslant p$. Полученную таким образом упрощенную систему мы будем называть системой с $N = p$, она содержит $2p^2$ уравнений.

Рассмотрим упрощенную модель с $N = 2$. Число входящих в нее уравнений можно на единицу уменьшить, если перейти к переменным ρ_{mn}, θ_{mn} по формулам $a_{mn} = \rho_{mn} \cos \varphi_{mn}$, $b_{mn} = \rho_{mn} \sin \varphi_{mn}$, $\theta_{mn} = \varphi_{mn} - \varphi_{00}$. Уравнение для φ_{00} можно решать отдельно. Это означает, что функции $a_{mn}(t)$, $b_{mn}(t)$ изменяются более сложно, чем $\rho_{mn}(t)$ и $\theta_{mn}(t)$. В частности, особым точкам $\rho_{mn} = \text{const}$, $\theta_{mn} = \text{const}$ соответствуют периодические решения a_{mn}, b_{mn}; предельным циклам — двухчастотные режимы. Поэтому далее мы будем называть решения системы с $N = 2$ особыми точками, если у них $\rho_{mn}(t) = \text{const}$, предельными циклами, если функции $\rho_{mn}(t)$ периодичны.

В упрощенной модели с $N = 2$ есть аналог простейших симметричных решений. Однородному решению (1.5) соответствует особая точка $\rho_{00} = 1$, $\rho_{mn} = 0$, $m + n \neq 0$, одномерным по оси y решениям задачи (5.1) — такие решения упрощенной системы, у которых $a_{mn} = 0$, $b_{mn} = 0$ при $n \neq 0$. Имея в виду сопоставление упрощенной модели и задачи в частных производных, эти решения условно можно назвать одномерными. Решениям задачи (5.1), симметричным относительно диагонали квадрата $y = x$, можно сопоставить интегральные кривые, на которых $a_{mn} = a_{nm}$, $b_{mn} = b_{nm}$. Такие решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений мы будем также называть симметричными.

Проследим, как меняется тип решений упрощенной системы при уменьшении параметра c_2. Пусть $c_1 = 1{,}5$. Условно последовательность бифуркаций на этой липии можно представить следующей схемой:



После потери устойчивости однородного решения у системы появляется одномерная особая точка $\rho_{mn} = 0$, $m \neq 0$. (Заметим, что в силу симметрии задачи одновременно в системе появляется и другая особая точка, у которой $\rho_{mn} = 0$, если $n \neq 0$). В случае одномерных решений система с $N = 2$ переходит в упрощенную систему (3.1), подробно рассмотренную выше; это позволяет предсказывать их параметры. При дальнейшем уменьшении c_2 одномерная точка также теряет устойчивость, и асимптотику определяет несимметричная особая точка (рис. 22). Затем при некотором значении c_2 ρ_{01} становится

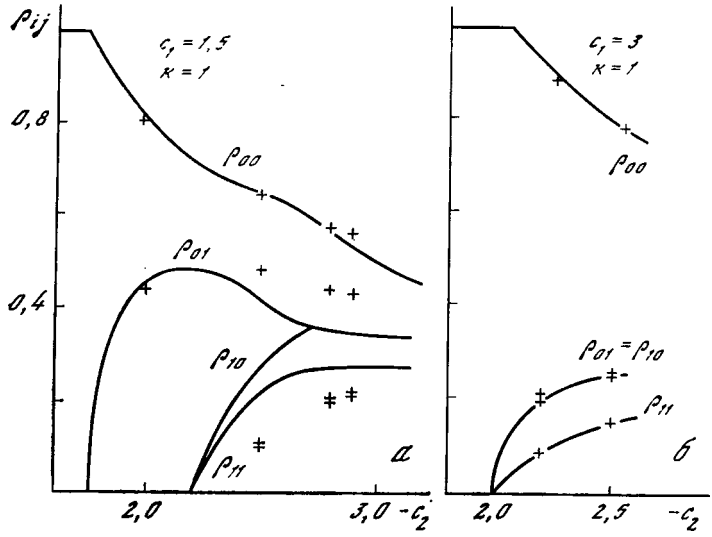


Рис. 22. Устойчивые особые точки в упрощенной модели с $N = 2$

Маркерами показаны результаты расчетов для задачи (5.1)

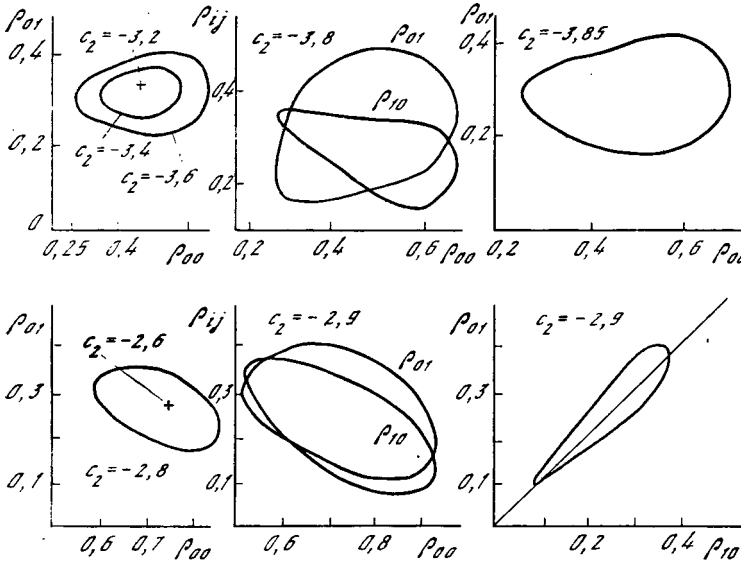


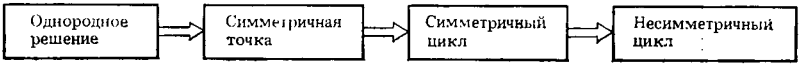
Рис. 23. Устойчивые предельные циклы в упрощенной системе

Сверху — на линии $c_1 = 1{,}5$, снизу — $c_1 = 3{,}0$

в точности равным ρ_{10}, и далее в расчетах наблюдается выход на симметричное решение с $\rho_{01} = \rho_{10}$. При $c_2 \approx -3{,}3$ происходит бифуркация Хопфа, и рождается симметричный предельный цикл ($\rho_{01}(t) = \rho_{10}(t)$), который при $c_2 \approx -3{,}7$ теряет симметрию (рис. 23). Обратим внимание на то, что большинство бифуркаций в описанной

последовательности связано с потерей или возникновением симметрии, что существенно отличает двумерную задачу от одномерной.

Первый переход в последовательности бифуркаций (см. схему на с. 44) связан с возникновением одномерной особой точки. На первый взгляд, его можно объяснить исходя из соотношения (1.6). Действительно, первыми гармониками, для которых это условие начинает нарушаться при уменьшении c_2, являются $\cos(\pi x/l)$ и $\cos(\pi y/l)$. Этим и обусловлена одномерность возникающих решений. Однако ситуация является более сложной. В этом можно убедиться, проследив за изменением решений на линии $c_1 = 3{,}0$ (см. рис. 22, 23). Схема усложнения решений, определяющих асимптотику упрощенной системы с $N = 2$, будет следующей:



Важно отметить, что симметричная особая точка появляется при том же значении параметра c_2, где могут появиться одномерные решения. Выход на симметричное решение происходит с начальных данных общего вида. В связи с этим возникают два вопроса. Есть ли аналогичное явление в двумерной задаче? Как его объяснить

3. Рассмотрим задачу (5.1) вблизи критических значений параметров, при которых однородное решение (1.5) потеряло устойчивость. Результаты соответствующих расчетов показаны маркерами на рис. 22. При $t \to \infty$ асимптотику определяют решения с $\rho_{mn} = \mathrm{const}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ На линии $c_1 = 1{,}5$, как и в упрощенной модели, возникающее решение одномерно, на линии $c_1 = 3{,}0$ оно оказывается симметричным. Совпадает не только тип решений этих двух задач, близки оказываются и их количественные характеристики.

Аналогом особых точек упрощенной модели являются периодические решения задачи в частных производных. Справедлив двумерный аналог леммы из разд. 4.

У двумерного автомодельного решения задачи (5.1) *вида*

$$W(x, y, t) = R(x, y) \exp[i\omega t + ia(x, y)] \qquad (5.4)$$

амплитуды гармоник ρ_{mn} *и сдвиги фаз между ними* θ_{mn} *постоянны.* Верно и обратное утверждение.

Отметим, что частным случаем этого решения является спиральная волна. Формулы (5.2) и (5.4) совпадают, если $R(x, y) = R(r)$, $a(x, y) = a(r) + m\varphi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Автомодельные решения, возникающие после потери устойчивости однородного решения, близки к нему. Поэтому для их анализа естественно воспользоваться асимптотическими методами. Запишем уравнение (5.1) в переменных ρ, φ ($u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$):

$$\rho_t = \rho - \rho^3 + (\rho_{xx} - \rho\varphi_x^2 + \rho_{yy} - \rho\varphi_y^2) - c_1(2\rho_x\varphi_x + \rho\varphi_{xx} + 2\rho_y\varphi_y + \rho\varphi_{yy}), \qquad (5.5)$$

$$\rho\varphi_t = -c_2\rho^3 + (2\rho_x\varphi_x + \rho\varphi_{xx} + 2\rho_y\varphi_y + \rho\varphi_{yy}) + c_1(\rho_{xx} - \rho\varphi_x^2 + \rho_{yy} - \rho\varphi_y^2).$$

Решение будем искать в виде ряда по малому параметру ε, характеризующему отклонение c_2 от критического значения $\bar{c}_2$, при котором решение (1.5) теряет устойчивость:

$$\rho = 1 + \varepsilon r_1(x, y) + \varepsilon^2 r_2(x, y) + \varepsilon^3 r_3(x, y) + \ldots,$$
$$\varphi = (-\bar{c}_2 + \varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2 + \varphi_3\varepsilon^3 + \ldots)]\, t + \varepsilon a_1(x, y) + \varepsilon^2 a_2(x, y) + \ldots, \qquad (5.6)$$
$$c_2 = \bar{c}_2 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \omega_3\varepsilon^3 + \ldots, \quad \varphi_i, \omega_i = \text{const}.$$

Подставим формулы (5.6) в уравнения (5.5) и приравняем члены при одинаковых степенях ε. Это даст системы уравнений для последовательного определения $r_n(x, y)$, $a_n(x, y)$. В нулевом порядке по ε уравнения удовлетворяются тождественно. В первом порядке их можно привести к виду

$$\Delta r_1 + k^2 r_1 = c_1(\varphi_1 + \omega_1)/(1 + \bar{c}_1^2),$$
$$\Delta a_1 = 2Lr_1 + (\varphi_1 + \omega_1)/(1 + \bar{c}_1^2), \qquad (5.7)$$

где $k^2 = -2(1 + c_1\bar{c}_2)/(1 + \bar{c}_1^2)$; $L = (\bar{c}_2 - c_1)/(1 + \bar{c}_1^2)$.

Структура уравнений n-го порядка аналогична: r_n и a_n входят в них так же, как r_1 и a_1 в формулы (5.7), но правые части гораздо сложнее.

Из граничных условий задачи (5.1) следуют равенства

$$\frac{\partial r_n}{\partial x}\Big|_{x=0,\, l} = 0, \quad \frac{\partial r_n}{\partial y}\Big|_{y=0,\, l} = 0, \quad \frac{\partial a_n}{\partial x}\Big|_{x=0,\, l} = 0, \quad \frac{\partial a_n}{\partial y}\Big|_{y=0,\, l} = 0. \qquad (5.8)$$

Можно проверить, что задача (5.7), (5.8) разрешима при условии $\varphi_1 + \omega_1 = 0$. Ее решение имеет вид

$$r_1 = \sum_{m,\, n} A_{mn}\cos(\pi m x/l)\cos(\pi n y/l), \qquad (5.9)$$
$$a_1 = -2Lr_1/k^2 + \text{const}, \quad \pi^2(m^2 + n^2)/l^2 = k^2$$

(m, n — целые числа). Из формулы для k^2 следует, что в точке первой бифуркации $m = 0$, $n = 1$ либо $m = 1$, $n = 0$. В дальнейшем будем считать, что $k = \pi/l$, r_1 и a_1 имеют вид

$$r_1 = A\cos kx + B\cos ky, \quad a_1 = -2Lr_1/k^2 + \text{const}. \qquad (5.10)$$

Уравнения высших порядков будут разрешимы, если их правые части ортогональны ко всем нетривиальным решениям соответствующих однородных уравнений (альтернатива Фредгольма). Рассматривая условия разрешимости для уравнений второго и третьего порядков, можно определить значения A и B. Малый параметр ε ранее был определен с точностью до множителя. Далее мы будем

считать, что

$$\varepsilon = |c_2 - \bar{c}_2|^{1/2} + \ldots \tag{5.11}$$

Это упростит соотношения для A и B:

$$A(XA^2 + YB^2 - \alpha Z) = 0,$$
$$B(YA^2 + XB^2 - \alpha Z) = 0, \tag{5.12}$$
$$X = 2L^4/(3k^6) - 3L^2/(2k^2) + L^2 + 5k^2/4 + k^4/4, \quad Z = |c_1|/(1 + c_1^2),$$
$$Y = 4L^2/k^2 + L^2 - k^2 + k^4/4, \quad \alpha = \operatorname{sign} c_1 \cdot \operatorname{sign}(\bar{c}_2 - c_2).$$

Из формул (5.12) ясно, что $X + Y > 0$, $Z > 0$; можно убедиться также, что $X > 0$.

Легко проверить, что при $\alpha = -1$ система уравнений (5.12) имеет только тривиальное решение. Это соответствует той области параметров, где устойчиво однородное решение (1.5). Поэтому бифуркация в изучаемой системе всегда надкритична. При $\alpha = +1$ система уравнений (5.12) имеет девять решений:

$$\text{а) } A = 0, \quad B = 0;$$
$$\text{б) } A = 0, \quad B = \pm (Z/X)^{1/2}; \tag{5.13}$$
$$\text{в) } B = 0, \quad A = \pm (Z/X)^{1/2};$$
$$\text{г) при } X \neq Y \quad A^2 = B^2 = Z/(X + Y).$$

Соотношения (5.13) показывают, что в общем случае ($X \neq Y$) решения, возникшие после ветвления, будут либо одномерны, либо симметричны. Этот вывод подтверждается в расчетах.

Рассмотрим вопрос об устойчивости возникших автомодельных решений. Пусть $\tilde{r}(x, y, t)$ и $\bar{\Psi}(x, y, t)$ — малые возмущения.

$$\rho = R(x, y) + \tilde{r}(x, y, t), \quad \varphi = \omega t + a(x, y) + \bar{\Psi}(x, y, t). \tag{5.14}$$

Устойчивость решения определяется из линеаризованной относительно $\tilde{r}$ и $\bar{\Psi}$ задачи в частных производных. Решения ее будем искать в виде $\tilde{r} = e^{\lambda t} r(x, y)$, $\bar{\Psi} = e^{\lambda t}\Psi(x, y)$. В результате получится задача на собственные значения:

$$\Delta r + r\left[\frac{1 - c_1\omega}{1 + c_1^2} - 3\frac{1 + c_1c_2}{1 + c_1^2} R^2 - (a_x^2 + a_y^2)\right] - 2R(a_x\Psi_x + a_y\Psi_y) =$$
$$= \lambda \frac{r + c_1 R\Psi}{1 + c_1^2},$$
$$R\Delta\Psi + r\left[\frac{-\omega - c_1}{1 + c_1^2} + 3\frac{c_1 - c_2}{1 + c_1^2} R^2 + \Delta a\right] + 2a_x r_x + 2a_y r_y + \tag{5.15}$$
$$+ 2R_x\Psi_x + 2R_y\Psi_y = \lambda \frac{R\Psi - c_1 r}{1 + c_1^2}.$$

Краевые условия для $r(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ будут такими же, как в формулах (5.8).

Поскольку нас интересуют решения в окрестности критического значения $\bar{c}_2$, то можно вновь воспользоваться асимптотическими методами. Это позволяет получить критерий устойчивости решений различных типов [42]. Если величина K отрицательна, будет устойчиво одномерное автомодельное решение, при положительном K устойчиво симметричное автомодельное решение. Значение K связано с параметрами задачи следующим образом:

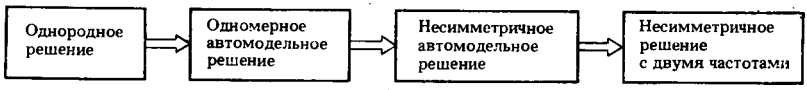
$$K = 2L^4/(3k^6) - 11L^2/(2k^2) + 9k^2/4, \quad L = (-2 - k^2)/(2c_1),$$
$$k = \pi/l. \tag{5.16}$$

Сравним полученные результаты с проведенными двумерными расчетами. Из формул (5.6), (5.10)—(5.13) следует, что в окрестности точки бифуркации $\bar{c}_2$ выполняются соотношения

$$\rho_{00} = 1 - |c_2 - \bar{c}_2|\,(A^2 + B^2)\,[L^2/k^4 + L^2/k^2 + k^2/4 + 5/4] + \ldots,$$
$$\rho_{10} = |c_2 - \bar{c}_2|^{1/2}\,|A|\,[1 + 4L^2/k^4]^{1/2} + \ldots, \tag{5.17}$$
$$\rho_{01} = |c_2 - \bar{c}_2|^{1/2}\,|B|\,[1 + 4L^2/k^4]^{1/2} + \ldots,$$
$$\rho_{11} = |c_2 - \bar{c}_2|\,|AB|\,[9 + 40L^2/k^4 + 16L^4/k^8]^{1/2} + \ldots$$

При $c_1 = 3$, $k = 1$ $K = 11/12$, здесь должно быть устойчиво симметричное автомодельное решение. Критическое значение $\bar{c}_2$ равно -2, $L = -0{,}5$. Для $c_2 = -2{,}1$, $\varepsilon^2 = 0{,}1$ формулы (5.17) предсказывают значения $\rho_{00} = 0{,}937$, $\rho_{01} = \rho_{10} = 0{,}177$, $\rho_{11} = 0{,}070$. В задаче в частных производных получено $\rho_{00} = 0{,}942$, $\rho_{01} = 0{,}162$, $\rho_{10} = 0{,}156$, $\rho_{11} = 0{,}057$; в упрощенной системе с $N = 2$: $\rho_{00} = 0{,}945$, $\rho_{01} = \rho_{10} = 0{,}157$, $\rho_{11} = 0{,}055$. Это означает, что формулы (5.17) хорошо описывают решения задачи (5.1) в окрестности точки бифуркации, когда $\varepsilon = \sqrt{0{,}1} \approx 0{,}316$. Другие примеры приведены в работе [42]. Полученные выше разложения хорошо согласуются с решениями задачи в частных производных и упрощенной системы с $N = 2$.

4. Посмотрим, как меняются решения задачи (5.1) при уменьшении параметра c_2. На линии $c_1 = 1{,}5$ последовательность устойчивых решений такова:



Первые две бифуркации совпадают с бифуркациями в упрощенной системе с $N = 2$. При этом параметры одномерной особой точки с точностью до нескольких процентов совпадают с характеристиками одномерных автомодельных решений. Однако в целом в задаче (5.1)

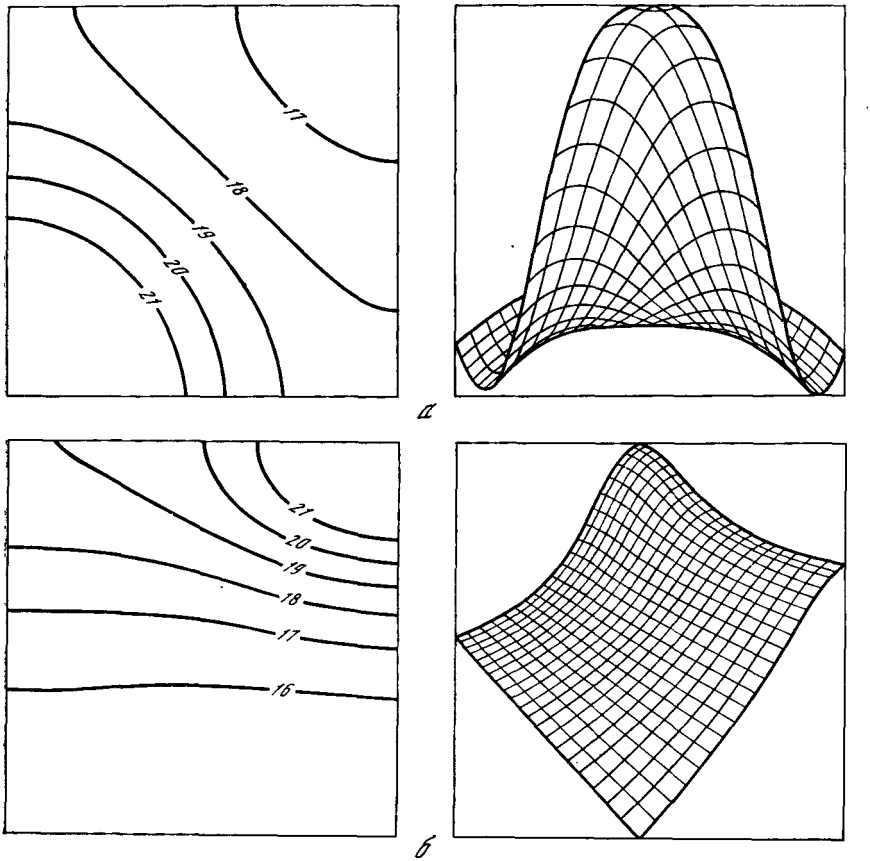


Рис. 24. Функция $R(x, y)$ в двумерном автомодельном решении

$а$: $c_1 = 3{,}0$; $c_2 = -2{,}5$; $l = \pi$; $h = \pi/20$; $\tau = 10^{-2}$, $б$: $c_1 = 1{,}5$; $c_2 = -2{,}9$; $l = \pi$; $h = \pi/20$; $\tau = 10^{-2}$

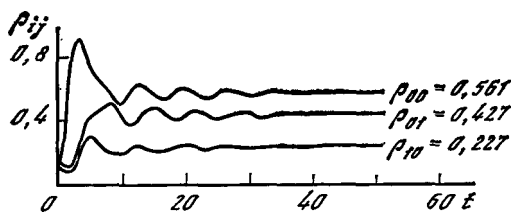


Рис. 25. Процесс выхода на несимметричное автомодельное решение

$c_1 = 1{,}5$; $c_2 = -2{,}9$; $l = \pi$; $h = \pi/20$; $\tau = 10^{-2}$

последовательность переходов проще: в ней нет аналогов симметричных особых точек и симметричных предельных циклов.

На линии $c_1 = 3{,}0$ последовательность бифуркаций в упрощенной системе и исходной задаче одна и та же — такая, как на схеме с. 46. Параметры решений вида (5.4) и особых точек здесь также хорошо согласуются между собой (см. рис. 22).

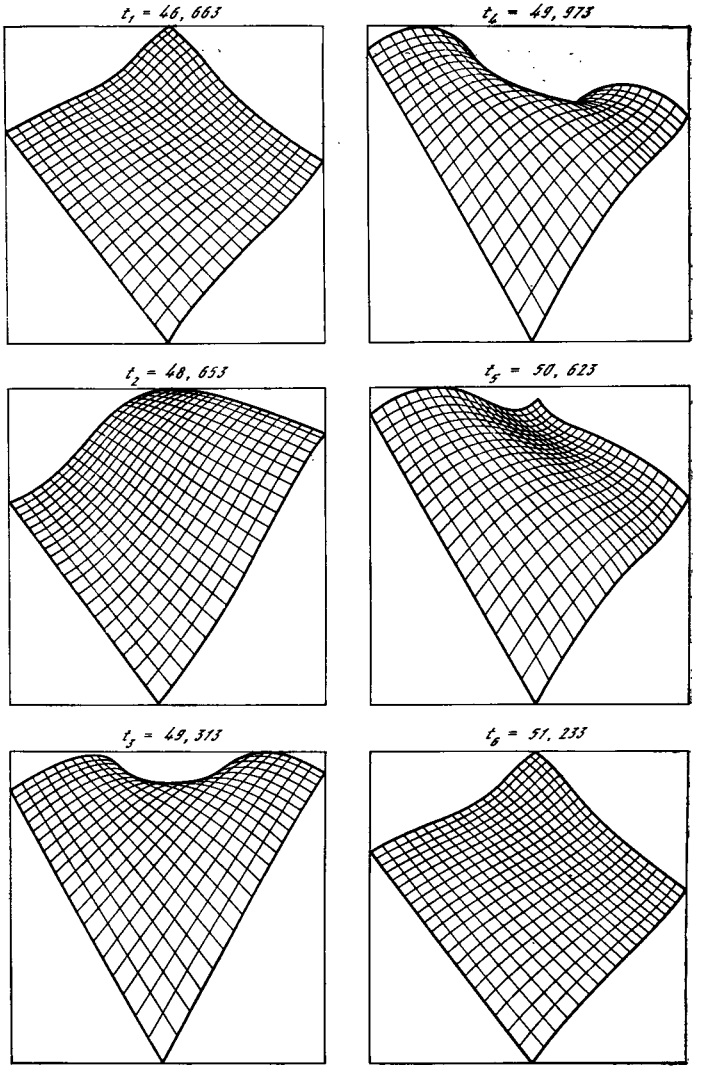
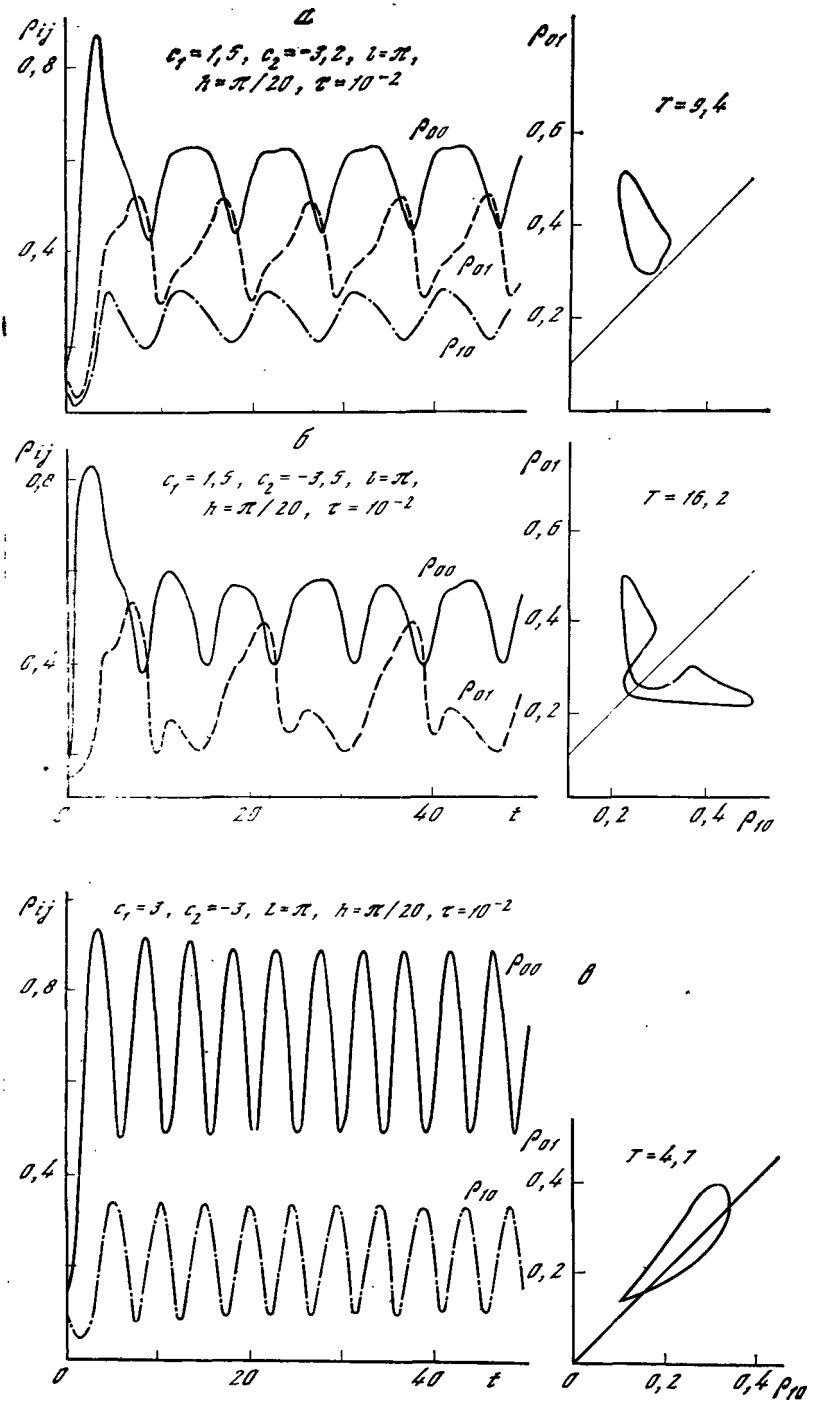


Рис. 26. Изменение компоненты $u\ (x,\ y,\ t)$ в решении, показанном на рис. 25

Если решение задачи (5.1) автомодельно, то $R^2 = u^2 + v^2$ не зависит от времени. На рис. 24 показаны линии уровня и видовые проекции функции $R\ (x, y)$ для симметричного и несимметричного автомодельных решений. Типичный процесс выхода на такое решение показан на рис. 25. Функции $\rho_{mn}\ (t)$ стремятся к постоянным значениям при $t \to \infty$, причем $\rho_{01} \neq \rho_{10}$ в этом расчете.

Функции u и v в автомодельном решении меняются достаточно сложно, причем $u\ (x, y, t) = v\ (x, y, t + T/4)$. Эволюция компоненты $u\ (x, y, t)$ показана на рис. 26.


а
$c_1=1,5,\ c_2=-3,2,\ l=\pi,$
$h=\pi/20,\ \tau=10^{-2}$
ρ_{ij}
0,8
0,4
ρ_{00}
ρ_{01}
ρ_{10}
ρ_{01}
0,6
0,4
0,2
$T=9,4$
б
$c_1=1,5,\ c_2=-3,5,\ l=\pi,$
$h=\pi/20,\ \tau=10^{-2}$
ρ_{ij}
0,8
0,4
ρ_{00}
ρ_{01}
ρ_{01}
0,6
0,4
0,2
$T=16,2$
0
20
40
t
0,2
0,4
ρ_{10}
в
$c_1=3,\ c_2=-3,\ l=\pi,\ h=\pi/20,\ \tau=10^{-2}$
ρ_{ij}
0,8
0,4
ρ_{00}
ρ_{10}
ρ_{01}
0,4
0,2
$T=4,7$
0
20
40
t
0
0,2
0,4
ρ_{10}

Двумерные расчеты в этой работе проводились с использованием метода переменных направлений [37]. Шаги по времени τ и по пространству h указаны на рисунках, они определялись после проведения тестовых расчетов. В тех случаях, когда в двумерной задаче асимптотика определяется одномерным решением, последнее практически совпадает с решением, построенным по другой методике для одномерной задачи [24].

5. Рассмотрим такие решения задачи в частных производных, у которых функции R и a периодичны по времени. Можно убедиться, что в этом случае $\rho_{mn}(t)$ также периодичны: $\rho_{mn}(t) = \rho_{mn}(t + T)$, $\theta_{mn}(t) = \theta_{mn}(t + T) + 2\pi p_{mn}$, $p_{mn} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Такие решения являются аналогами предельных циклов в системе с $N = 2$. Отметим, что функции u и v не являются периодическими — в системе будет наблюдаться установившийся двухчастотный режим. Такая же ситуация имела место в упрощенной модели.

Для того чтобы выяснить характер качественной перестройки периодических решений, удобно рассмотреть их проекции на плоскость $\{\rho_{10}, \rho_{01}\}$ и графики функций $\rho_{mn}(t)$ при разных значениях параметров (рис. 27).

Первое решение (рис. 27, *а*) целиком проектируется на кривую, лежащую выше диагонали $\rho_{01} = \rho_{10}$. В течение всего периода направления x и y «неравноправны». Другому решению (рис. 27, *б*) соответствует замкнутая кривая, которая лежит по обе стороны от диагонали. Эта линия почти симметрична относительно прямой $\rho_{01} = \rho_{10}$. Направления x и y через время, примерно равное $T/2$, «меняются местами»: $R(x, y, t + T/2) \cong R(y, x, t)$. Будем называть такое решение решением типа II в отличие от первого, которое отнесем к типу I.

Важно подчеркнуть, что решения I и II качественно отличаются друг от друга. При малом изменении параметра c_2 период решения увеличивается примерно в 2 раза, функция $\rho_{00}(t)$ близка к $\rho_{00}(t + T/2)$ (см. рис. 27). Однако $\rho_{01}(t)$ и $\rho_{10}(t)$ ведут себя иначе: часть периода функция $\rho_{10}(t)$ на рис. 27, *б* (решение типа II) повторяет ход $\rho_{10}(t)$ на рис. 27, *а*; оставшуюся часть — ход функции $\rho_{01}(t)$. При приближении к точке перехода c_2^* период решений резко возрастает.

Наблюдаемую картину можно объяснить тем, что одновременно с решением типа I (оно показано на рис. 27, *а*) существует и устойчиво симметричное ему относительно плоскости $\rho_{01} = \rho_{10}$ решение. С уменьшением c_2 их амплитуда растет, и циклы приближаются к плоскости симметрии и друг к другу, подходя к симметричному решению с $\rho_{mn} = \rho_{nm}$. В конечномерной модели оно соответствует особой точке. Это приводит к росту их периода. После перехода ($c_2 < c_2^*$) в расчетах наблюдается решение типа II (см. рис. 27, *б*) и симметричное ему решение. Следовательно, усложнение может и дальше идти по этому пути, существенно связанному с симметрией задачи.

←

Рис. 27. Примеры решений задачи (5.1) с периодической функцией $R(x, y, t)$

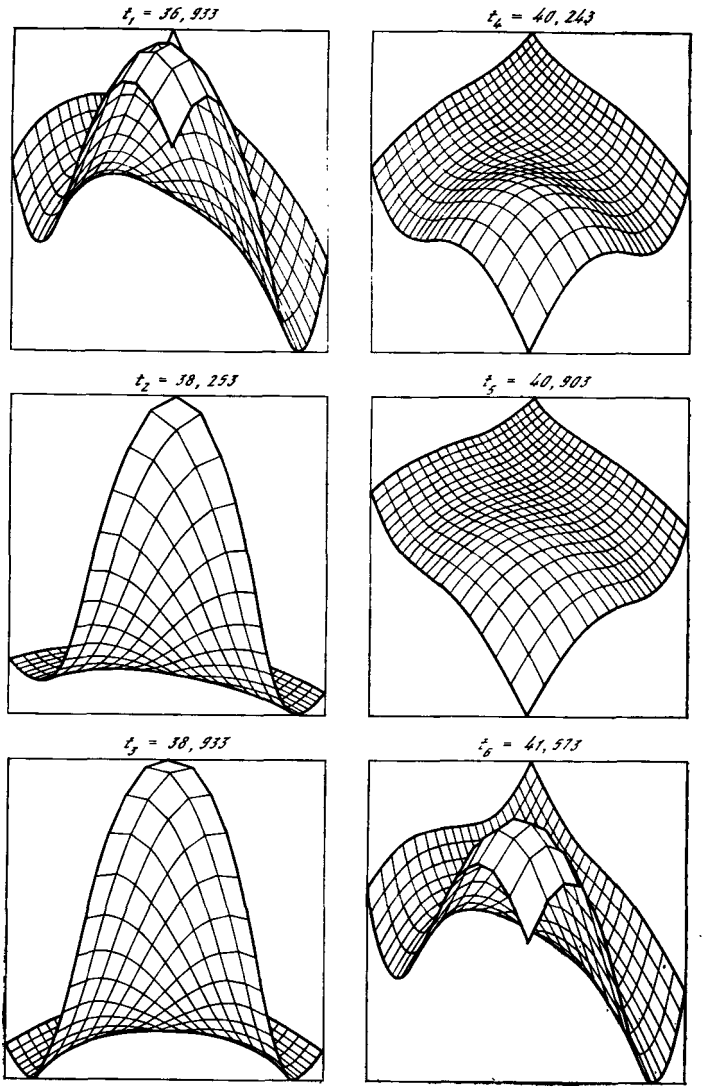


Рис. 28. Изменение функции $R\ (x,\ y,\ t)$ в решении, показанном на рис. 27, *в*.

Совершенно другая картина наблюдается при $c_1 = 3{,}0$. Это обусловлено тем, что бифуркацию Хопфа в этом случае претерпевает симметричное автомодельное решение, как это было и в упрощенной системе с $N = 2$. Возникший цикл затем теряет симметрию, появляется периодическое решение, которое нельзя отнести ни к типу I, ни к типу II. На рис. 27, *в* показано изменение функций $\rho_{mn}\ (t)$ в таком решении. На рис. 28 представлены видовые проекции $R\ (x, y, t)$ на разные моменты времени, полученные в этом же расчете.

При дальнейшем уменьшении параметра c_2 в двумерной задаче появляются решения, в которых за время расчетов не удается обнаружить никакой упорядоченности. Двумерные непериодические решения и переход к ним требуют отдельного анализа.

6. Проведенные исследования показали, что после потери устойчивости однородного решения $W = \exp(-ic_2 t)$ в двумерной задаче возникают автомодельные решения, которые могут быть симметричны или одномерны. Формула (5.16) показывает, что в большом диапазоне параметров одномерные решения устойчивы, т. е. решения задач (5.1) и (2.1) совпадают.

При дальнейшем уменьшении параметра c_2 асимптотику двумерной задачи определяют двухчастотные решения. Это обстоятельство является очень важным. Широко распространено представление о том, что основными формами упорядоченности в активных нелинейных средах являются ведущие центры и спиральные волны. В задаче (5.1) они являются частным случаем двумерного автомодельного решения, в котором еще раз разделились переменные. И действительно, в определенном диапазоне параметров именно автомодельные решения определяют асимптотику процесса. Однако в большой области c_1, c_2 и l они неустойчивы. Здесь возникает более сложная упорядоченность. Ее описывают решения с периодическими функциями R и a. Естественно ожидать, что такие решения будут наблюдаться во многих открытых диссипативных системах вблизи точки бифуркации.

Важно отметить, что в двумерной задаче, так же как в одномерном случае, оказывается полезным анализ конечномерной модели. Рассмотренная упрощенная система с $N = 2$ не только правильно передает многие качественные черты изучаемой системы, но и хорошо предсказывает количественные характеристики простейших решений задачи (5.1).

6. Дальнейшее исследование уравнения Курамото — Цузуки и его обобщения

Остановимся на перспективах исследования двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации и на некоторых нерешенных задачах.

1. Полученные к настоящему времени результаты в основном относятся к установившимся процессам в небольших областях. Важно было бы выяснить, что происходит с решением задачи (2.1) при увеличении длины области l. При $l = \pi$ упрощенная система трех обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо передает свойства исходной задачи. При увеличении l естественно ожидать, что в соответствующей упрощенной модели число уравнений также будет увеличиваться. Встает вопрос о зависимости $N(l)$. Он близок к вопросу о том, как меняется размерность аттрактора в гидродинамике с увеличением числа Рейнольдса [43]. Анализ этой зависимости был бы полезен не только для аналитического, но и для численного исследования таких систем.

С увеличением l быстро растет время выхода на установившийся режим. Поэтому встает задача изучения переходного процесса, который в течение длительного времени может описываться решениями задачи Коши. Результаты изучения простейших одномерных решений задачи Коши для уравнения Курамото—Цузуки приведены в работах [8, 13]. Большой интерес представляло бы изучение этой задачи при всех значениях c_1, c_2 и различных типах начальных данных.

Исследование краевой задачи (2.1) показало, что во многих случаях решения уравнения в частных производных адекватно описываются гораздо более простыми моделями. Этот замечательный факт позволяет широко использовать полученные ранее результаты, например теорию одномерных отображений отрезка в себя. В последние годы в этой области были обнаружены новые интересные явления (кризисы странных аттракторов, перемежаемость и т. д.). Остается, однако, неясным, будут ли наблюдаться эти эффекты в более сложных моделях, таких, как уравнения в частных производных. Вопросы, касающиеся качественной перестройки одномерных отображений при изменении параметров задачи, а также диффузионного хаоса, не порождающего одномерных отображений, также остаются открытыми.

Рассмотренное уравнение предсказывает ряд интересных явлений, которые должны наблюдаться в двухкомпонентных диссипативных системах в окрестности точки бифуркации [44, 45]. Важно было бы обнаружить их в известных моделях, например в модели брюсселятора, а также проследить за перестройкой решений по мере удаления от точки бифуркации.

2. От уравнения (1.2) можно перейти к другим нелинейным уравнениям, которые также было бы полезно исследовать. В предположении о близости решения уравнения (2.1) к пространственно однородному решению в работе [46] было получено следующее уравнение:

$$\dot{v} = \nu\nabla^2 v - \mu\nabla^2\nabla^2 v - \lambda\,(v\nabla v). \tag{6.1}$$

Здесь v — градиент фазы W; $\nu = 1 + c_1c_2$; $\lambda = 2\,(c_1 - c_2)$; $\mu = (1 + c_1^2)/2$. Для уравнения (6.1) было найдено аналитическое решение типа бегущей волны. Проведенные расчеты [47] показали, что оно, по-видимому, также может иметь хаотические решения. В широкой области параметров c_1, c_2 и l изменения амплитуды и фазы функции W сравнимы между собой, поэтому область применения уравнения (6.1) намного меньше, чем исходного.

Одно из обобщений уравнения Курамото—Цузуки связано с учетом следующих членов в разложениях по малому параметру в задаче (1.1). Пусть нелинейные источники в этой системе зависят от двух параметров: λ и μ. Запишем уравнение (1.2) в виде

$$W_t = d_0 W_{xx} + (a_1 + a_2 \mid W \mid^2) W. \tag{6.2}$$

Пусть при $\mu < \mu_0$ $\mathrm{Re}\, a_2 < 0$, при $\mu > \mu_0$ $\mathrm{Re}\, a_2 > 0$. В последнем случае уравнение (6.2) неприменимо: при изменении параметра λ амплитуда решения меняется скачком на конечную величину. При-

мер такого поведения дает модель Фиц-Хью—Нагумо [48] и другие модели, где существенную роль играют пороговые эффекты. Чтобы описать эти эффекты, нужен учет следующих членов и переход к уравнению

$$W_t = d_0 W_{xx} + (a_1 + a_2 \mid W \mid^2 - a_3 \mid W \mid^4) W, \qquad (6.3)$$

где d_0, a_1, a_2, a_3 — комплексные постоянные [48]. Возможность такого перехода связана с наличием еще одного малого параметра, пропорционального $(\mu - \mu_0)^{1/2}$. Поэтому уравнение (6.3) не обладает такой общностью, как уравнение (1.2), и имеет гораздо меньшую область приложений.

При переходе от исходной задачи (1.1) к уравнению (1.2) существенна одномерность задачи: из линеаризованного уравнения можно однозначно определить вид функций f в формуле (1.3). В многомерном случае ситуация сложнее — у линеаризованной задачи может быть несколько решений, их число существенно зависит от геометрии области. Например, для квадрата $f_1 = \exp(ikx)$, $f_2 = \exp(iky)$, $f_3 = \alpha f_1 + \beta f_2$.

Уравнения, описывающие двухкомпонентные системы в окрестности точки бифуркации в многомерном случае, были получены в работе [49]. Для областей различной геометрии эти уравнения различны. Их подробный анализ также был бы очень полезен.

Другое обобщение уравнения (1.2) возникает в задаче о ветровых волнах на поверхности воды [8]. Это двумерное уравнение, производные по направлениям x и y входят в него с разными коэффициентами.

3. Широкий круг вопросов связан с экспериментальным исследованием двухкомпонентных систем. В настоящее время исследуются десятки химических реакций, в которых возможны колебательные режимы [50]. Это реакции Белоусова—Жаботинского, Бриггса—Раушера, Брэя, Моргана и т. д. Для моделирования их основных черт обычно используются сложные математические модели (большие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, системы уравнений в частных производных и т. д.). Как правило, все они описывают процессы, протекающие вдали от точки потери устойчивости термодинамической ветви. Их детальное исследование оказывается очень сложной задачей. Некоторые модели описывают формирование пространственно неоднородных диссипативных структур, другие описывают колебательные режимы, в третьих есть бистабильность и гистерезис, в некоторых моделях возможен хаос.

Анализ уравнения Курамото—Цузуки показывает, что все эти режимы могут наблюдаться в окрестности точки первой бифуркации. Вероятно, многие качественные особенности колебательных реакций, в которых распределения реагентов пространственно неоднородны, можно будет объяснить на основе достаточно простой и общей модели (1.2). Поэтому теоретическое и экспериментальное исследование открытых диссипативных систем в окрестности точки бифуркации является естественным и необходимым шагом в их анализе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979, 512 с.
2. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
3. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.— В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217—243.
4. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1983, т. 23, № 2, с. 380—390.
5. *Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах.— Успехи физ. наук, 1979, т. 128, вып. 4, с. 625—666.
6. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems.— Progr. Theor. Phys., 1975, vol. 54, N 3, p. 687—699.
7. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
8. *Андронов А. А., Фабрикант А. Л.* Затухание Ландау, ветровые волны и свисток.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 68—104.
9. *Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.* Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1979, т. 77, вып. 2(8), с. 617—629.
10. *Stewartson K., Stuart J. T.* A nonlinear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow.— J. Fluid Mech., 1971, vol. 48, pt 3, p. 529—545.
11. *Blow K. J., Doran N. J.* Global and local chaos in the pumped nonlinear Schrödinger equation.— Phys. Rev. Lett., 1984, vol. 52, N 7, p. 526—529.
12. *Kuramoto Y.* Diffusion-induced chaos in reaction systems.— Suppl. Progr. Theor. Phys., 1978, N 64, p. 346—367.
13. *Kopell N., Howard L. N.* Plane wave solutions to reaction-diffusion equations.— Stud. Appl. Math., 1973, vol. 52, N 4, p. 291—328.
14. *Hagan P. S.* Spiral waves in reaction-diffusion equations.— SIAM J. Appl. Math., 1982, vol. 42, N 4, p. 762—786.
15. *Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г.* Колебательные процессы в нелинейных диссипативных средах. О некоторых упрощенных моделях: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 53. М., 1982. 29 с.
16. *Берман В. С., Данилов Ю. А.* О групповых свойствах обобщенного уравнения Ландау—Гинзбурга.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 1, с. 67—70.
17. *Kuramoto Y., Yamada T.* Turbulent state in chemical reactions.— Progr. Theor. Phys., 1976, vol. 56, N 2, p. 679—681.
18. *Kuramoto Y., Koga S.* Turbulized rotating chemical waves.— Progr. Theor. Phys., 1981, vol. 66, N 3, p. 1081—1083.
19. *Жаботинский А. М.* Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974. 178 с.
20. *Roux J. C.* Experimental studies of bifurcations leading to chaos in the Belousof—Zhabotinsky reaction.— Physica D, 1983, vol. 7D, p. 57—68.
21. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. 256 с.
22. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А.* и др. Диссипативные структуры в триггерных средах.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826—1841.
23. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
24. *Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г.* О новых свойствах нелинейных диссипативных систем: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 118. М., 1983. 28 с.
25. *Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г.* О симметричных решениях уравнения Курамото—Цузуки.— Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 7, с. 1281—1283.

26. *Белинцев Б. И.* Диссипативные структуры и проблемы биологического формообразования.— Успехи физ. наук. 1983, т. 111, вып. 1, с. 54—101.
27. *Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г.* Двухкомпонентные системы в окрестности точки бифуркации. Поведение решений в малых областях: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 29. М., 1983. 28 с.
28. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 608 с.
29. *Collet P., Eckmann J. P.* Iterated maps on the interval as dynamical systems. Basel etc.: Birkhauser, 1980. 248 p.
30. *Feigenbaum M.* Universal behavior in nonlinear systems.— Los Alamos Sci., 1980, vol. 1, N 1, p. 4—27.
31. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя.— Укр. мат. журн., 1964. т. 16, № 1, с. 61—71.
32. *Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г.* О диффузионном хаосе: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 140. М., 1983. 28 с.
33. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcin J. M.* Lyapunov characteristic exponents for smoth dynamical systems: A method for computing all of them.— Meccanica, 1980, vol. 15, N 1, p. 9—30.
34. *Farmer J. D., Ott E., Yorke J. A.* The dimension of chaotic attractors.— Physica D, 1983, vol. 7, p. 153—180.
35. *Tomita K., Tsuda I.* Towards the interpretation of the global bifurcation structure of the Lorenz system.— Suppl. Progr. Theor. Phys., 1980, N 69, p. 185—189.
36. *Moon H. T., Huerre P., Redekopp L. G.* Transitions to chaos in the Ginzburg—Landau equation.— Physica D, 1983, vol. 7, p. 135—150.
37. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
38. *Winfree A. T.* The geometry of biological time. B. etc.: Springer, 1980. 530 p. (Lect. Notes Biomath.).
39. *Koga S.* Rotating spiral waves in reaction-diffusion systems.— Progr. Theor. Phys., 1982, vol. 67, N 1, p. 164—178.
40. *Koga S.* Schrödinger equation approach to rotating spiral waves in reaction-diffusion systems.— Progr. Theor. Phys., 1982, vol. 67, N 2, p. 454—463.
41. *Kuramoto Y.* Chemical waves and chemical turbulence.— In: Synergetics: A workshop. B.: Springer, 1977, p. 164—173.
42. *Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г.* Простейшие типы упорядоченности в двумерных диссипативных системах: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 112. М., 1984. 28 с.
43. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. 342 с.
44. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* О классификации двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации.— Докл. АН СССР, 1984, т. 279, № 3, с. 591—595.
45. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* О диффузионном хаосе в нелинейных диссипативных системах.— Докл. АН СССР, 1984, т. 279, № 5, с. 1091—1096.
46. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* Persistent propogation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium.— Progr. Theor. Phys., 1976, vol. 55, N 2, p. 356—359.
47. *Yamada T., Kuramoto Y.* A reduced model showing chemical turbulence.— Progr. Theor. Phys., 1976, vol. 56, N 2, p. 681—683.
48. *Yamafuji K., Toko K., Nitta J., Urahama K.* A reductive perturbation approach to hard mode instabilities of inverted-type bifurcations.— Progr. Theor. Phys., 1981, vol. 66, N 1, p. 143—153.
49. *Nitzan A., Ortoleva P.* Scaling and Ginzburg criteria for critical bifurcations in nonequilibrium reacting systems.— Phys. Rev. A — Gen. Phys., 1980, vol. 21, N 5, p. 1735—1755.
50. Synergetics: Far from equilibrium. B. etc.: Springer, 1979. 176 p.

УДК 517.957:[536.2+537.84]

РАЗЛИЧНЫЕ РЕЖИМЫ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ И ТРЕХТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

П. П. Волосевич, Е. И. Леванов

Введение

Развитие современной технологии и энергетики потребовало детального анализа сложных нелинейных задач, связанных с физикой плазмы. Физико-математические модели многих из этих задач основаны на системе уравнений газовой динамики. При этом в зависимости от диапазона изменения параметров требуется учитывать разнообразные физические эффекты: электронную и ионную теплопроводность, процессы, связанные с поглощением и испусканием излучения, обмен энергией между электронами и ионами, источники энергии различной природы и др. Эффективным способом теоретического анализа упомянутых выше задач является вычислительный эксперимент [1]. С его помощью моделируются процессы в экспериментальных установках, проводится расчет и оптимизация параметров проектируемых устройств и конструкций.

Вычислительный эксперимент состоит не только в разработке численных алгоритмов и их реализации на быстродействующих ЭВМ. Он включает в себя также анализ применимости различных физико-математических моделей исследуемых процессов, усовершенствование моделей и улучшение методов решения на основе результатов сравнения численных и опытных данных, а также на основе результатов качественного анализа отдельных закономерностей процессов. Поэтому, помимо численных методов, важную роль в исследовании изучаемых явлений играют и традиционные методы математической физики: построение асимптотик, анализ размерностей и критериев подобия и в особенности различные типы инвариантно-групповых решений, в том числе автомодельные решения.

Аппарат автомодельных решений широко применяется в газовой динамике. Обычно в понятие автомодельности вкладывается тот смысл, что распределения зависящих от времени величин в пространстве в разные моменты времени связаны друг с другом некоторым преобразованием масштабов измерения зависимых и независимых переменных. Поэтому автомодельными принято называть такие решения, которые получаются применением теории размерностей [2, 3]. Более общий групповой подход показывает, что автомодельные решения являются частным случаем инвариантных решений, вид которых

можно определить с помощью алгоритмов теории групповых свойств дифференциальных уравнений [4, 5].

Автомодельные решения могут играть существенную роль не только в анализе отдельных качественных сторон явлений, но и в исследованиях принципиального характера, позволяющих установить общие закономерности процессов на определенной стадии их развития. Большое теоретическое и практическое значение имело, например, решение классической задачи о сильном точечном взрыве [2, 3, 6, 7]. Это решение описывает явления, имеющие место при взрывах зарядов малого объема и веса, но обладающих большой энергией. Несмотря на некоторую идеализацию, принятую при постановке задач, теория точечного взрыва, основанная на автомодельных решениях, дает возможность получать не только качественные, но и с достаточной для практики точностью многие количественные данные о характере возникающего при взрывах неустановившегося движения среды. Эта теория используется также в задачах обтекания тонких затупленных тел потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью [8], в задачах распространения ударных волн при электрических разрядах и др.

Большой интерес представляют автомодельные решения асимптотического типа, описывающие явления кумуляции [9], т. е. процессы, в которых в каком-то виде происходит концентрация энергии, и притом неограниченно сильно. К таким решениям относятся, например, решение задачи о движении ударной волны к центру и оси симметрии, о течении газа под действием кратковременного удара и др. [10—14]. Прикладной интерес упомянутых выше задач связан с существенной необходимостью для современной науки и техники реализации «экстремальных состояний» вещества (достижения высоких давлений, температур, плотностей).

Автомодельные решения позволяют детально исследовать ряд свойств явлений, которые проявляются и в общем «неавтомодельном» случае. Так, анализ автомодельных решений о движении газа перед поршнем в условиях адиабатичности показал различный качественный характер течений в зависимости от скорости поршня и начального распределения плотности [3, 15—20]. В работах [18—20] было показано, что существенное влияние на распределение гидродинамических величин оказывает изменение со временем функции энтропии на фронте ударной волны, движущейся перед поршнем.

Широкий класс автомодельных задач посвящен анализу специфических свойств распространения тепловых возмущений при нелинейном коэффициенте теплопроводности. В работах [21—25] (см. также [13]) исследовался процесс переноса тепла в неподвижной первоначально холодной среде с коэффициентом теплопроводности $\varkappa$, зависящим от температуры T по степенному закону ($\varkappa = \varkappa_0 T^a$, где $\varkappa_0$, a — постоянные). Было установлено, что нелинейный коэффициент теплопроводности существенным образом меняет характер теплопереноса.

Известно, что если коэффициент теплопроводности постоянен ($a = 0$), то внесенное в среду тепловое возмущение мгновенно рас-

пространяется до бесконечности по пространству (см., например, [26]). Аналогичная ситуация имеет место и при $a < 0$ (коэффициент теплопроводности растет с уменьшением температуры). Однако, если $a > 0$, $\varkappa(0) = 0$, то тепловое возмущение в среде распространяется по фону с нулевой температурой с конечной скоростью. В этом случае в каждый фиксированный момент времени $0 < t < \infty$ в пространстве существует граница (фронт температурной волны), отделяющая нагретую область от холодной, до которой еще не дошло возмущение. В работах [24, 27, 28] для уравнения теплопроводности были доказаны теоремы сравнения, которые с помощью автомодельных решений позволили получить достаточно общие условия конечности скорости распространения температурных волн.

В работе [29] приведен пример решения уравнения теплопроводности, описывающий так называемые остановившиеся температурные волны, при которых тепло не проникает с течением времени в холодную среду, несмотря на неограниченный рост температуры, заданной на границе. В дальнейшем это явление локализации тепла, которое при определенных условиях возникает в теплопроводной среде, было подробно исследовано с помощью автомодельных решений и было показано, что эффект локализации тепла не уничтожается ненулевым фоном температуры и может существовать при произвольной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры (см. [30—35] и библиографию в этих работах).

Автомодельные решения особенно ценны в том случае, когда движение газа требуется рассматривать с учетом дополнительных нелинейных эффектов, вследствие чего использование многих других теоретических методов математической физики весьма затруднено.

Ряд характерных свойств газодинамических и тепловых процессов при существенном влиянии на движение нелинейного коэффициента теплопроводности установлен с помощью решения автомодельных задач о поршне и о разлете плазмы в вакуум с заданным на границе вакуум—газ или поршень—газ тепловым режимом. Анализ упомянутых выше автомодельных решений, проведенный как для однотемпературного случая [36—41], так и для случая, когда температура электронов (T_e) и ионов (T_i) не совпадает [42—48], показал, что при учете движения среды описанные выше свойства нелинейной теплопроводности сохраняются. Если коэффициент теплопроводности убывает с уменьшением температуры, то тепловые и газодинамические возмущения распространяются с конечной скоростью по начальному фону (температура и скорость которого равны нулю), т. е. в любой момент времени существует конечный фронт газодинамической температурной волны (ТВ). Тепловые возмущения, распространяющиеся по холодному фону с конечной скоростью, могут быть обусловлены не только нелинейным коэффициентом теплопроводности. Анализ автомодельных решений уравнений газовой динамики без учета теплопроводности, но с учетом поглощения лазерного излучения [49—52] показал, что ТВ конечной скорости существуют, если начальная температура равна нулю, а коэффициент поглощения K имеет вид $K = K_0 T^{-d}$, где K_0, $d > 0$ — постоянные.

В работах [53, 54] проведен анализ автомодельных решений уравнений газовой динамики с учетом лазерного излучения в предположении, что коэффициент поглощения является степенной функцией не только термодинамических величин, но и плотности потока излучения. Последнее обусловлено наличием в разреженной плазме различных видов параметрических неустойчивостей [55, 56]. Анализ показал, что учет зависимости коэффициента поглощения от излучения приводит к существенным изменениям характеристик плазмы. Глубина прогрева вещества излучением оказывается меньше, температура в тепловой волне выше, а плотность и давление ниже, чем в случае, когда коэффициент поглощения зависит только от температуры и плотности.

С помощью упомянутых выше автомодельных задач о поршне и разлете плазмы в вакуум были исследованы два качественно различных режима распространения тепла в движущейся среде. Характерным свойством одного из режимов является сверхзвуковой прогрев вещества при относительно небольших изменениях гидродинамических величин позади фронта температурной волны. При распространении тепла в другом режиме впереди фронта ТВ движется сильная ударная волна. Температурная волна, фронт которой выделяется потоком тепла, равным нулю, движется с дозвуковой скоростью.

Существование двух типов тепловых волн отмечалось в [25, 57, 39] (см. также [13]). В работах [36, 38, 40, 43, 58, 59] были детально исследованы основные свойства различных режимов теплопереноса в движущейся среде, установлена зависимость существования каждого из режимов от параметров задачи. В работах [36, 38] режимы сверхзвукового переноса тепла были названы температурными волнами первого рода (ТВ-I), а режимы дозвукового прогрева, в которых газодинамическое движение играет существенную роль,— температурными волнами второго рода (ТВ-II).

Режимы ТВ-I и ТВ-II играют существенную роль в плазме. Они определяют, например, различный характер сжатия и нагрева лазерной плазмы [60—62], плазмы, создаваемой релятивистскими электронными пучками [63, 64], сильноточными разрядами [65, 66], сильным взрывом с учетом теплопроводности и переноса излучения [67—72].

Упомянутые выше автомодельные решения уравнений газовой динамики с учетом теплопроводности существуют при определенных ограничениях на параметры задачи. Однако теоретический анализ и и численные эксперименты показывают (см. [40, 73, 74] и библиографию в этих работах), что и при отсутствии таких ограничений на стадии режима ТВ-II в области между фронтом температурной волны и границей газа с вакуумом решение с течением времени выходит на некоторый асимптотический автомодельный режим, получаемый в предположении, что плотность на фронте ТВ велика по сравнению с плотностью внутри прогретой области (известное «приближение $\rho_0 = \infty$»).

Решение задачи о разлете теплопроводного газа в вакуум в предположении $\rho_0 = \infty$ является автомодельным при произвольном сте-

пенном законе изменения потока тепла, заданного на границе. С помощью этого автомодельного решения можно приближенно определить параметры «неавтомодельной» ударной волны, распространяющейся впереди фронта ТВ, определить время смены различных режимов теплопереноса в зависимости от параметров задачи.

В работах [38, 54, 58, 59, 75] влияние нелинейного коэффициента теплопроводности на движение газа исследуется с помощью инвариантных решений типа бегущих волн. Заметим, что во многих работах (см., например, [13, 76—81], а также библиографию в этих работах) метод бегущих волн используется для анализа так называемой структуры фронта ударных волн, определяемой различными диссипативными процессами. В основе математической теории структуры фронта ударных волн лежит предположение о стационарности структуры. Все параметры состояния газа внутри волны, т. е. внутри переходного слоя, в котором происходит ударное сжатие, зависят от времени t и пространственной координаты x в комбинации $x - Dt$, где D — постоянная скорость фронта ударной волны. В системе координат, связанной с фронтом, процесс стационарен.

В упомянутых выше работах [38, 54, 58, 59, 75] задача о бегущей волне связывается с задачей о поршне. Благодаря такому подходу рассматривается более общий вид бегущей волны, существенно связанный с нестационарным тепловым и гидродинамическим режимом, заданным на поршне. Свойства таких бегущих волн во многом близки к свойствам процессов, которые описываются автомодельными решениями уравнений газовой динамики с учетом теплопроводности. Так, анализ показывает, что асимптотические выражения, характеризующие поведение газодинамических и тепловых величин вблизи конечного фронта ТВ и полученные с помощью упомянутых выше автомодельных решений, аналогичны соответствующим выражениям, полученным методом бегущих волн. Это указывает на общий (не только автомодельный) характер распределения величин в окрестности фронта температурной волны. Анализ, проведенный методом бегущих волн, показывает, что, так же как и в автомодельных решениях, в глубине фронта ТВ существует изотермический разрыв. При этом бегущие температурные волны с изотермическим разрывом, за исключением случая, соответствующего стационарной структуре фронта ударной волны, являются метастабильными — существуют лишь конечное время.

В настоящей работе дается обзор результатов исследования автомодельных решений уравнений газодинамики, рассматриваемых в одномерном приближении с учетом различных физических эффектов. Целью работы является демонстрация роли автомодельных решений как в исследовании ряда качественных закономерностей процессов, происходящих в высокотемпературной плазме, так и в оценке точности и эффективности методов, используемых для численного моделирования нелинейных задач физики плазмы.

В разделе 1 дается постановка задач. Система уравнений газодинамики рассматривается в одножидкостном двухтемпературном приближении [82, 83], т. е. в предположении, что температура электро-

ков T_e и ионов T_i не совпадает, но вклад электронов в плотность плазмы мал и поэтому можно положить $\rho \equiv \rho_i$. Описание процессов теплового излучения плазмы дается с помощью введения «фотонной температуры» $T_r \neq T_e$, т. е. в известном трехтемпературном приближении [84—88]. Фотонная температура определяется по формуле $T_r = (U/\sigma_0)^{1/4}$, где U — плотность полной энергии излучения, σ_0 — постоянная. В трехтемпературной модели поток излучения описывается в приближении лучистой теплопроводности, а обмен энергией между электронами и фотонами для обратного и прямого тормозного процессов представляется как разность энергий, излученной электронами при температуре T_e и поглощенной теми же электронами от равновесного излучения с температурой T_r. Коэффициенты теплопроводности, электронно-ионной и электронно-фотонной релаксации рассматриваются в виде степенных функций температуры и плотности, что характерно для водородоподобного газа [82, 83, 89].

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ газ покоится, является холодным и имеет в общем случае плотность, распределенную по пространственной координате по степенному закону. Граничные условия соответствуют задачам, часто рассматриваемым в газовой динамике: плоской задаче о разлете плазмы в вакуум и задаче о плоском, цилиндрическом или сферическом поршне с заданным на границе газа с поршнем или с вакуумом потоком тепла в виде степенной функции времени.

Модель поршня часто используется для описания поведения различных физических объектов. Так, задачу о взрыве с учетом движения газообразных продуктов взрыва можно исследовать, моделируя движение этих газообразных продуктов движением поршня, имеющего плоскую, цилиндрическую или сферическую поверхность, пренебрегая при этом начальными размерами массы взрыва [3]. Задача об установившемся обтекании тонкого тела потоком с большой (сверхзвуковой) скоростью с достаточно хорошим приближением (с точностью до τ^2, где τ — безразмерная малая величина, характеризующая наибольший угол отклонения потока) эквивалентна задаче о нестационарном движении поршня [8]. Указанная эквивалентность основана на известном принципе, называемом «законом плоских сечений». Это связано с тем, что тонкое тело, движущееся в газе с большой сверхзвуковой скоростью, вызывает лишь поперечные смещения частиц. Из закона плоских сечений следует, что при перемещении воображаемого наблюдателя вдоль оси (плоскости) симметрии тела в направлении потока наблюдатель в перпендикулярных плоскостях видел бы картину, весьма похожую на ту, которая бывает при расширении цилиндрического (плоского) поршня.

При изучении солнечных вспышек, плазмы солнечного ветра и ударных волн в космическом пространстве привлекаются разнообразные теоретические описания движения газа, в том числе гидродинамическое приближение. С целью идеализации источника возмущений плазмы часто рассматривают модель поршня и модель точечного взрыва с последующим движением поршня [90]. Если предполагать, что энергия вспышки подводится в течение достаточно долгого вре-

мени, то процесс вспышки можно моделировать расширением поршня в газе.

В лазерных мишенях в результате поглощения энергии в некотором слое вблизи поверхности мишени резко повышается температура и давление, и слой начнет расширяться. Часть вещества будет разлетаться наружу, а внутренние области слоя пойдут вглубь, сжимая лежащее впереди него вещество. Другими словами, по отношению к внутренней части мишени нагретый слой действует как поршень, поджимающий вещество [91, 92].

Как известно, при выполнении условий автомодельности исходная система уравнений в частных производных сводится к системе существенно нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (к системе «в автомодельных переменных»). Это не значит, однако, что такое сведение уже решает поставленную задачу,— остается проинтегрировать (например, численно) несколько обыкновенных дифференциальных уравнений. Автомодельные задачи имеют свою специфику, и в большинстве случаев формальный численный расчет «в лоб» не приводит к желаемой цели. Решение таких задач может быть найдено лишь в сочетании численных методов с возможным теоретическим анализом системы. В ряде случаев качественный анализ особенностей системы в автомодельных переменных позволяет выбрать наиболее удобный метод ее численного интегрирования [39, 41, 52]. Важным является также доказательство существования (устойчивости) автомодельных решений путем установления автомодельных режимов численным решением исходной системы в частных производных.

Раздел 2 посвящен качественному анализу соответствующей системы уравнений в автомодельных переменных в предположении, что собственное тепловое излучение плазмы пренебрежимо мало́. Представление об основных свойствах автомодельных решений дает анализ асимптотического поведения искомых величин вблизи особенностей (особых точек) системы [93, 94]. Показывается, что при условии, аналогичном упомянутому выше «чисто тепловому» случаю (коэффициент теплопроводности обращается в нуль при температуре, равной нулю), тепловые и гидродинамические возмущения распространяются с конечной скоростью по начальному неподвижному и холодному фону. Исследуется асимптотика в окрестности границы плазмы с вакуумом. Построенные асимптотики характеризуют свойства решения в окрестности особенностей и используются при численном интегрировании системы в автомодельных переменных.

Устанавливается возможность существования разрывов гидродинамических величин и потока тепла (при непрерывной температуре) в глубине фронта температурной волны. Если ионная теплопроводность пренебрежимо мала, то разрыв является изоэлектронно-термическим (электронная компонента температуры непрерывна, а ионная — разрывна). При учете как электронной, так и ионной теплопроводности обе компоненты температуры на поверхности разрыва непрерывны — разрыв является изотермическим.

В разделе 3 исследуются упоминавшиеся выше различные режимы

теплопереноса в движущейся среде — сверхзвуковой режим ТВ-I и дозвуковой режим ТВ-II. Определяется зависимость области существования каждого из режимов от параметров задачи. Показывается, что в двухтемпературном случае в режиме ТВ-I имеет место существенное несовпадение электронной и ионной температур. При распространении тепла в дозвуковом режиме в области ударной волны и на фронте тепловой волны позади нее имеем $T_e \simeq T_i$.

Приводятся численные примеры, иллюстрирующие перечисленные выше свойства автомодельных решений. Заметим, что число граничных условий, при которых решается соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, оказывается больше, чем число уравнений. «Переопределенность» задач устраняется подбором некоторых заранее неизвестных параметров (собственных значений задачи), которые определяются вместе с решением задачи с помощью «пристрелки». Такими параметрами могут быть координаты положения фронта температурной волны, фронта разрыва и др. В отдельных случаях (задача о закрепленной стенке с заданным тепловым режимом, об адиабатическом поршне — поршне, на котором потоки тепла равны нулю) пристрелка облегчается путем использования преобразований подобия масштабов измерения величин.

В общем случае при $T_e \neq T_i$ ($T_r \equiv 0$) в соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений входят два независимых безразмерных параметра: безразмерная постоянная в коэффициенте электронной теплопроводности ($\varkappa_e^0$) и безразмерная константа в слагаемом, выражающем электронно-ионный обмен ($\bar{Q}_0$). Однако для параметров полностью ионизованной плазмы (формула Спитцера для коэффициента теплопроводности [83] и формула Ландау—Спитцера для обменного члена [83, 89]) имеет место зависимость $\bar{Q}_0 \sim (\varkappa_e^0)^{-1}$, т. е. в этих случаях задача сводится к однопараметрической.

В заключение раздела 3 приводятся примеры различных режимов теплопереноса в неавтомодельном случае. Условие существования этих режимов и момент времени перехода одного режима в другой можно оценить, используя упомянутое выше приближенное автомодельное решение типа $\rho_0 = \infty$.

Анализ показывает, что в зависимости от изменения мощности потока тепла, заданного на границе, режимы ТВ-II существуют либо на начальной, либо на асимптотической стадии по времени.

Аналогичная ситуация имеет место, например, в лазерной плазме. Так, при воздействии мощных потоков лазерного излучения на сферическую мишень в начальной стадии процесса образуются внешняя разреженная часть (так называемая «корона»), охваченная тепловой волной, и волна сильного сжатия, движущаяся впереди фронта ТВ к центру мишени. Это означает, что на начальной стадии имеет место типичный режим ТВ-II. В дальнейшем качественная картина взаимодействия тепловых и газодинамических величин зависит от мощности потока лазерного импульса и конструкции мишени (см., например, [61, 92, 95] и библиографию в этих работах). Так, при воз-

действии излучения на оболочечную мишень теплоперенос во внешней оболочке за все время действия лазера может происходить в режиме ТВ-II. В этом случае определенная (внутренняя) часть оболочки остается сильно сжатой и холодной, оболочка является «сжимающейся» [95].

При увеличении вкладываемой в мишень энергии волна прогрева постепенно охватывает всю внешнюю оболочку мишени. При больших потоках температурная волна обгоняет фронт ударной волны в оболочке еще до окончания времени действия лазерного импульса. Режим ТВ-II переходит в режим ТВ-I — оболочка является «взрывающейся» [95]. Анализ и вычислительные эксперименты показывают [96—99], что оптимальные коэффициенты усиления по энергии (отношение выделившейся термоядерной энергии к вложенной лазерной) в режимах взрывающейся оболочки существенно ниже, чем в режимах сжимающейся оболочки.

В разделе 4 приводятся некоторые результаты анализа автомодельных решений уравнений трехтемпературной газодинамики [46, 100, 112]. Исследование показывает, что автомодельные решения полной системы имеют ряд качественных черт, характерных и для описанных выше случаев. При определенных условиях существует конечный фронт распространения тепловых и газодинамических возмущений. В глубине их фронта возможен разрыв, причем при $T_r \neq 0$ на поверхности разрыва непрерывна как электронная, так и фотонная температура.

Учет дополнительных эффектов приводит к ряду новых свойств. Распределение гидродинамических и тепловых величин может иметь различный характер в зависимости от изменения скорости обмена энергией между фотонами и электронами. Например, при малых значениях безразмерной постоянной, входящей в соответствующий обменный член, фронт фотонной температурной волны может значительно опережать фронт электронной ТВ. При определенных значениях исходных параметров задачи автомодельное решение может иметь сложную структуру, представляющую собой режим ТВ-II, обусловленный электронной теплопроводностью (по температуре электронов T_e), и режим ТВ-I, обусловленный лучистой теплопроводностью (по температуре фотонов T_r).

1. Постановка задачи

Систему уравнений, описывающих процессы движения и нагрева высокотемпературной плазмы в одножидкостном двухтемпературном гидродинамическом приближении, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial m}(r^\nu v),\quad \frac{\partial v}{\partial t} = -r^\nu \frac{\partial p}{\partial m},\quad \frac{\partial r}{\partial t} = v,\quad p = p_e + p_i, \tag{1.1}$$

$$\partial \varepsilon_e/\partial t = -p_e \partial (r^\nu v)/\partial m - \partial (r^\nu W_e)/\partial m + Q_{ie} + Q, \tag{1.2}$$

$$\partial \varepsilon_i/\partial t = -p_i \partial (r^\nu v)/\partial m - \partial (r^\nu W_i)/\partial m - Q_{ie}, \tag{1.3}$$

$$W_e = -\varkappa_e \rho r^\nu \partial T_e/\partial m, \quad W_i = -\varkappa_i \rho r^\nu \partial T_i/\partial m, \tag{1.4}$$

$$\varkappa_e = \varkappa_e^0 T_e^a \rho^b, \quad \varkappa_i = \varkappa_i^0 T_i^a \rho^b,$$

$$Q_{ie} = Q_0 T_e^{-a_1} \rho^{b_1} (T_i - T_e). \tag{1.5}$$

Здесь m — массовая лагранжева переменная; t — время, производная по времени — лагранжева; r — эйлерова переменная; v — скорость; ε_e и ε_i — удельные внутренние энергии электронной и ионной компонент; p_e и p_i — давления электронной и ионной компонент; T_e и T_i — соответственно электронная и ионная температуры; $\rho \equiv \equiv \rho_i$ — плотность; W_e и W_i — тепловые потоки, обусловленные электронной и ионной теплопроводностью; Q_{ie} — скорость обмена энергией между электронами и ионами; Q — энерговыделение; a, b, a_1, b_1, $\varkappa_e^0$, $\varkappa_i^0$, Q_0 — константы; $\nu = 0, 1, 2$ соответственно для случая плоской, осевой и сферической симметрии.

Будем считать, что справедливы уравнения состояния идеального газа

$$p_i = R_0 \rho T_i, \quad p_e = R_0 z \rho T_e, \quad \varepsilon_e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_e}{\rho}, \quad \varepsilon_i = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_i}{\rho}, \tag{1.6}$$

где R_0 — газовая постоянная; z и γ — постоянные значения заряда ионов и отношения удельных теплоемкостей. Как отмечалось выше, свойства автомодельных режимов в газовой динамике часто исследуются с помощью решения задач о движении газа перед поршнем и разлете газа в вакуум.

Задача о поршне в одномерном плоском случае формулируется следующим образом. Однородный покоящийся газ занимает полупространство $m > 0$, ограниченное слева ($m = 0$) плоскостью — поршнем. При $t > 0$ поршень под действием внешних сил начинает двигаться со скоростью, закон изменения которой во времени ($v = = v(0, t)$) задан. При учете в среде теплопроводности на поршне должен быть задан также закон изменения со временем температуры или потока тепла. Наряду с плоским рассматривается цилиндрический поршень, расширяющийся от оси симметрии, или сферический поршень, двигающийся от центра симметрии.

Вместо поршня при $\nu = 0$ плоскость $m = 0$ может представлять собой границу газа с вакуумом с заданным на ней законом изменения со временем температуры или потока тепла. Положим сначала $Q \equiv 0$. Граничные условия на поршне можно записать в виде

$$v(0, t) = v_0 t^{0,5n_0}, \quad W_e(0, t) = W_0 t^g, \quad W_i(0, t) = W_i^0 t^g. \tag{1.7}$$

На границе плазмы с вакуумом задаются условия

$$\rho(0, t) = 0, \quad W_e(0, t) = W_0 t^g, \quad W_i(0, t) = W_i^0 t^g. \tag{1.8}$$

Будем предполагать, что заполняющий полупространство $m > 0$ газ при $t = 0$ покоится, имеет нулевую температуру и в общем

случае распределенную по m плотность:

$$v(m, 0) = 0, \quad T_e(m, 0) = 0, \quad T_i(m, 0) = 0, \quad \rho(m, 0) = \rho_0 m^l. \tag{1.9}$$

Рассмотрим различные случаи.

1. $T_e \equiv T_i$, $Q \equiv 0$. Задача (1.1)—(1.9) имеет автомодельное решение, если выполняются условия

$$n_0 = \frac{2}{\varphi_0}[1 + (\nu - (\nu + 1)b)l], \quad g = 1{,}5n_0 + \frac{(\nu + 1)l}{1 - l}(0{,}5n_0 + 1), \tag{1.10}$$

где $\varphi_0 = 2(a - 1) - [2a - 1 + \nu - (\nu + 1)b]\, l \neq 0$

(в случае условия вакуума (1.8) первое соотношение в (1.10) является обозначением).

2. $T_e \neq T_i$, $Q \equiv 0$. Автомодельные решения задачи (1.1)—(1.9) существуют, если, кроме условия (1.10), выполняется соотношение

$$2(a_1 + 1 - a) + l[(2a - 1)(1 - (\nu + 1)b_1)] + (2a_1 + 1)(\nu - (\nu + 1)b)] = 0. \tag{1.11}$$

Условие (1.11) тождественно выполняется при $a_1 = a - 1$, $b_1 = 1 - b$ и, в частности, при параметрах полностью ионизованного газа [83]: $a = 2{,}5$; $a_1 = 1{,}5$; $b = 0$; $b_1 = 1$.

3. $T_e \neq T_i$, $Q \neq 0$. Пусть Q описывает изменение удельной внутренней энергии за счет собственного теплового излучения плазмы. Обозначим через T_r фотонную компоненту температуры, считая, что в общем случае $T_r \neq T_e$. Тогда функция Q будет характеризовать скорость обмена энергией между фотонами и электронами. Представим ее в виде

$$Q = Q_1 T_e^{a_2} \rho^{b_2} (T_r - T_e). \tag{1.12}$$

Полное давление в уравнении движения (второе уравнение системы (1.1)) в трехтемпературной газодинамике имеет вид

$$p = p_e + p_i + p_r, \quad p_r = {}^1/_3 \sigma_0 T_r^4, \tag{1.13}$$

а функция T_r определяется из уравнений

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} + p_r \frac{\partial}{\partial m}(r^\nu v) + \frac{\partial}{\partial m}(r^\nu W_r) + Q = 0, \quad \varepsilon_r = \sigma_0 \frac{T_r^4}{\rho},$$
$$W_r = -\varkappa_r \rho r^\nu \partial T_r / \partial m, \quad \varkappa_r = \varkappa_r^0 T_r^{a_3} T_e^c \rho^{b_3}. \tag{1.14}$$

Здесь ε_r, p_r — удельная энергия и давление излучения; W_r — поток тепла, обусловленный лучистой теплопроводностью.

При $m = 0$ и $t = 0$, кроме (1.7)—(1.9), должны быть заданы условия

$$W_r(0, t) = W_r^0 t^q, \quad T_r(m, 0) = 0. \tag{1.15}$$

Возможно также условие на границе газа с поршнем (или вакуумом) вида

$$T_r(0, t) = 0. \tag{1.15'}$$

Система уравнений (1.1)—(1.6), (1.12)—(1.14) допускает автомодельные решения, удовлетворяющие граничным и начальным условиям (1.8), (1.9), (1.15) при выполнении (1.10), (1.11) и дополнительных соотношений вида

$$l[\nu + 1 + 0{,}5n_0(\nu + 7)] - 3n_0 = 0, \quad (a_2 - 3b_2)n_0 = 1,$$
$$(a_3 + c + 3b_3 - 4)n_0 = 1. \tag{1.16}$$

Из (1.10), (1.16) имеем $g = 4{,}5n_0$; $n_0 \neq 0$; $l \neq 0$. При выполнении указанных выше условий автомодельности независимые переменные m и t и искомые функции можно представить в следующем виде:

$$m = s(W_0^{\nu+1}\rho_0^{2-\nu})^{\theta_0}t^n, \qquad T_{e,i,r} = f_{e,i,r}R_0^{-1}(W_0^{1-l}\rho_0^{-1})^{2\theta_0}t^{n_0},$$
$$v = \alpha(W_0^{1-l}\rho_0^{-1})^{\theta_0}t^{0{,}5n_0}, \qquad \rho = \delta(\rho_0^3 W_0^{(\nu+1)l})^{\theta_0}t^{nl}, \tag{1.17}$$
$$W_{e,i,r} = \omega_{e,i,r}W_0 t^g, \qquad r = \lambda(\rho_0^{-1}W_0^{1-l})^{\theta_0}t^{0.5n_0+1},$$

где $f_{e.i,r} = f_{e,i,r}(s)$, $\alpha = \alpha(s)$, $\delta = \delta(s)$, $\omega_{e.i\,r} = \omega_{e,i.r}(s)$, $\lambda = \lambda(s)$ — соответствующие функции безразмерной переменной s;

$$n = \frac{(\nu+1)\ 0{,}5n_0 + 1)}{1-l} = \frac{(\nu+1)(2a-1)}{\varphi_0} > 0, \quad \theta_0 = \frac{1}{3-(2-\nu)l},$$
$$l < 1, \quad n_0 > -2.$$

Используя замену переменных вида (1.17), систему уравнений (1.1)—(1.6), (1.12)—(1.14) можно свести к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$-nl\delta + ns\delta' = \delta^2(\lambda^\nu\alpha)', \tag{1.18}$$

$$0{,}5n_0\alpha - ns\alpha' = -\lambda^\nu[\delta' f + f'\delta + {}^1\!/_3\,\tilde{\sigma}_0(f_r^4)'], \quad f = f_i + zf_e, \tag{1.19}$$

$$\frac{n_0}{\gamma-1}f - \frac{n}{\gamma-1}sf' + \delta f(\lambda^\nu\alpha)' + [\lambda^\nu(\omega_e + \omega_i)]' = q, \tag{1.20}$$

$$\frac{n_0}{\gamma-1}f_i - \frac{n}{\gamma-1}sf_i' + \delta f_i(\lambda^\nu\alpha)' + (\lambda^\nu\omega_i)' +$$
$$+ \tilde{Q}_0 f_e^{a_1}\delta^{b_1}(f_i - f_e) = 0, \tag{1.21}$$

$$\omega_e = -\tilde{\varkappa}_e^0 f_e^a \delta^{b+1}\lambda^\nu f_e', \quad \omega_i = -\tilde{\varkappa}_i^0 f_i^a \delta^{b-1}\lambda^\nu f_i', \tag{1.22}$$

$$\tilde{\sigma}_0[n_0 f_r^4/\delta - ns(f_r^4/\delta)'] + {}^1\!/_3\,\tilde{\sigma}_0 f_r^4[(\lambda^\nu\alpha)' + (\lambda^\nu\omega_r)' + q = 0, \tag{1.23}$$

$$q = \tilde{Q}_1 f_e^{a_2}\delta^{b_2}(f_r - f_e), \quad \omega_r = -\tilde{\varkappa}_r^0 f_r^{a_3} f_e^c \delta^{b_3+1}\lambda^\nu f_r'. \tag{1.24}$$

Здесь штрихом обозначены производные по s, а безразмерные постоянные $\tilde{\varkappa}_e^0$, $\tilde{\varkappa}_i^0$, $\tilde{Q}_0$, $\tilde{Q}_1$, $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\varkappa}_r^0$ имеют вид

$$\tilde{\varkappa}_{e,\,i}^0 = \varkappa_{e,\,i}^0 [W_0^{\Phi_0} \rho_0^{-2a-1+3b}]^{\theta_0} R_0^{-(a+1)},$$

$$\tilde{Q}_0 = Q_0 [W_0^{-2a_1+l(2a_1+(\nu+1)b_1)} \rho_0^{2a_1+3b_1}]^{\theta_0} R_0^{a_1-1},$$

$$\tilde{Q}_1 = Q_1 [W_0^{-2a_2+l(2a_2+(\nu+1)b_2)} \rho_0^{2a_2+3b_2}]^{\theta_0} R_0^{a_2-1}, \tag{1.25}$$

$$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 [W_0^{6-(7+\nu)l} \rho_0^{-9}]^{\theta_0} R_0^{-4},$$

$$\tilde{\varkappa}_r^0 = \varkappa_r^0 [W_0^{2(a_3+c-1)-[2(a_3+c)-1+\nu-(\nu+1)b_3]l} \rho_0^{-2(a_3+c)-1+3b_3}]^{\theta_0} R_0^{-(a_3+c+1)}.$$

«Автомодельные переменные» Лагранжа s и Эйлера λ связаны соотношением

$$ns = \delta\lambda^\nu [(0{,}5n_0 + 1)\lambda - \alpha]. \tag{1.26}$$

В переменных (1.17) условия (1.7), (1.8) примут вид для поршня и для вакуума соответственно

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad \omega_e(0) = 1, \quad \omega_i(0) = \omega_i^0, \tag{1.27}$$

$$\delta(0) = 0, \quad \omega_e(0) = 1, \quad \omega_i(0) = \omega_i^0, \tag{1.28}$$

где α_0 и ω_i^0 — безразмерные значения постоянных v_0 и W_i^0.

Начальные условия (1.9) переходят в граничные условия, заданные при $s = \infty$. При этом физический смысл имеют такие решения, для которых при температуре, равной нулю, поток тепла обращается в нуль, т. е. при $s = \infty$

$$\alpha = 0, \quad f_e = 0, \quad f_i = 0, \quad \omega_e = 0, \quad \omega_i = 0 \tag{1.29}$$

и в окрестности $s = \infty$

$$\delta = s^l. \tag{1.29'}$$

Условия (1.15) и (1.15′) в переменных (1.17) примут вид

$$\omega_r(0) = \omega_r^0 \text{ (или } f_r(0) = 0), \quad f_r(\infty) = 0, \quad \omega_r(\infty) = 0, \tag{1.30}$$

где ω_r^0 — безразмерное значение постоянной W_r^0.

Для полностью ионизованной плазмы и в предположении тормозного механизма для процессов излучения показатели зависимости коэффициентов переноса от температуры и плотности имеют следующие значения (см., например, [13, 82, 83, 89]):

$$a = {}^5/_2, \quad a_1 = {}^3/_2, \quad a_2 = {}^1/_2, \quad a_3 = 6, \quad c = {}^1/_2, \tag{1.31}$$

$$b = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = -2. \tag{1.32}$$

В соответствии с (1.31), (1.32) будем считать

$$a > a_1 > 0, \quad a_1 \geqslant a_2 + 1, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad c > 0, \quad b \leqslant 0. \tag{1.33}$$

Ниже, в разделах 2—4, проводится качественный анализ указанной системы уравнений в автомодельных переменных, позволяющий выявить ряд характерных свойств движения высокотемпературной плазмы. При этом рассматривается случай $v(0, t) > 0$ (поршень сжимает газ) и $n_0 \geqslant 0$, т. е. скорость поршня и температура на поршне или на границе плазмы с вакуумом не убывают со временем.

2. Структура автомодельного решения в случае $Q \equiv 0$, $\sigma_0 = 0$

Проведем анализ структуры рассматриваемых автомодельных решений для случая, когда собственное излучение плазмы пренебрежимо мало. Для этого положим $\tilde{\sigma}_0 = 0$, $\tilde{Q}_1 = 0$, $\tilde{\varkappa}_r^0 = 0$.

2.1. Асимптотическое решение в окрестности «начального фона» (фронта температурной волны)

Рассмотрим систему уравнений (1.18)—(1.26) при $\tilde{\sigma}_0 = \tilde{Q}_1 = \tilde{\varkappa}_r^0 = 0$ в окрестности некоторой точки, характеризуемой координатой s $(0 < s \leqslant \infty)$, в которой выполняются условия начального фона (1.29), (1.29′). Эта точка является особой точкой системы. Полагая $\delta = s^l(1 + \tilde{\delta}) + \ldots$, где $\tilde{\delta}$ — малая величина, получим после преобразований следующую систему, отбрасывая члены высокого порядка малости по $\tilde{\delta}$ и другим искомым величинам:

$$\tilde{\delta}' = (\lambda^\nu / n^2 s^{2(1-l)})\,[\lambda^\nu (f' + ls^{-1}f) + (0{,}5n_0 + \nu(0{,}5n_0 + 1))\,\alpha s^{-1}] + \ldots, \tag{2.1}$$

$$\alpha' = (1/ns^{1-l})\,[\lambda^\nu (f' + ls^{-1}f) + 0{,}5n_0 \alpha s^{-1}] + \ldots, \tag{2.2}$$

$$n_0 f - nsf' + (\gamma - 1)(\lambda^\nu \omega_e + \lambda^\nu \omega_i)' + \ldots = 0, \tag{2.3}$$

$$n_0 f_i - nsf_i' + (\gamma - 1)\,\tilde{Q}_0 s^{b_1 l} f_e^{-a_1}(f_i - f_e) + (\gamma - 1)\,s^l f_i (\lambda^\nu \alpha)' + (\gamma - 1)(\lambda^\nu \omega_i)' + \ldots = 0, \tag{2.4}$$

$$\omega_e = -\tilde{\varkappa}_e^0 s^{l(b+1)} \lambda^\nu f_e^a f_e' + \ldots, \tag{2.5}$$

$$\omega_i = -\tilde{\varkappa}_i^0 s^{l(b+1)} \lambda^\nu f_i^a f_i' + \ldots, \tag{2.6}$$

где $\lambda = \left(\dfrac{n}{0{,}5n_0 + 1}\, s^{1-l}\right)^{\frac{1}{\nu+1}} + \ldots$, $\dfrac{n}{0{,}5n_0 + 1} = \dfrac{\nu + 1}{1 - l}$, $f = f_i + zf_e$.

1. Пусть $\omega_i \equiv 0$ $(\tilde{\varkappa}_i^0 = 0)$. Тогда можно считать вблизи начального фона (1.29), (1.29′) $f_i \ll f_e$, и, следовательно, с точностью до главных членов $f = zf_e + \ldots$ Уравнения (2.3), (2.5) можно рассматривать независимо от остальных уравнений системы (2.1)—(2.6).

Для исследования решения системы (2.3), (2.5) введем замену переменных вида

$$f_e = \frac{1}{z} s^{k_0} x, \qquad \omega_e = \frac{n}{\gamma - 1} \left(\frac{1 - l}{\nu + 1} \right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} s^{k_1} y, \tag{2.7}$$

где

$$k_0 = \frac{n_0}{n} + \frac{1}{na} = \frac{2 + l[\nu - 1 - (\nu + 1) b]}{(\nu + 1) a} > 0,$$

$$k_1 = k_0 + \frac{1 + l\nu}{\nu + 1} > 0.$$

Используя (2.7), систему (2.3), (2.5) сведем к следующим уравнениям:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(B_0 + k_1 x^a) y + (n_0/n) x^{a+1}}{B_0 y + k_0 x^{a-1}}, \tag{2.8}$$

$$\frac{ds}{dx} = - \frac{s x^a}{B_0 y + k_0 x^{a+1}}, \tag{2.9}$$

где $B_0 = \frac{n}{\gamma - 1} \left(\frac{1 - l}{\nu + 1} \right)^{\frac{2\nu}{\nu+1}} \frac{z^{a+1}}{\tilde{\varkappa}_e^0} > 0$ — постоянная.

Структуру решения системы (2.3), (2.5) можно выяснить, проведя анализ решения уравнения (2.8) на фазовой плоскости $(x \geqslant 0, y)$.

Уравнение (2.8) в области $0 \leqslant x < \infty$, $y \neq \pm \infty$ имеет особую точку O $(x = 0, y = 0)$. Анализ показывает, что в точку O входит единственная кривая вида

$$y = x + \ldots \tag{2.10}$$

и множество кривых вдоль направления $y = 0$ (особая точка типа «узел»). При $n_0 > 0$ эти кривые имеют вид

$$y = - \frac{n_0}{nB_0} x^{a+1} + \frac{1}{B_0} \exp(-nB_0 x^{-a}) \left[C - \frac{n_0 a (n_0 + n - 1)}{n} \times \right.$$

$$\left. \times \int x^a \exp(nB_0 x^{-a}) \, dx \right] + \ldots, \tag{2.11}$$

и при $n_0 = 0$

$$y = C \exp(-0{,}5 n x^{-a}) + \ldots, \tag{2.12}$$

где C — произвольная постоянная. Ход интегральных кривых уравнения (2.8) в полуплоскости $(x \geqslant 0, y)$ изображен на рис. 1 сплошными линиями. Пунктирные линии обозначают соответственно изоклину нулей (кривая OB) и изоклину бесконечностей (кривая OA). Стрелками на рис. 1 указано направление убывания переменной s, начиная от фона (1.29), (1.29′).

Выясним, какое из полученных выше асимптотических решений уравнения (2.8) вблизи $x = 0$, $y = 0$ соответствует решению системы (2.3), (2.5) вблизи (1.29), (1.29′). Подставим (2.10) в (2.9). Сохраняя

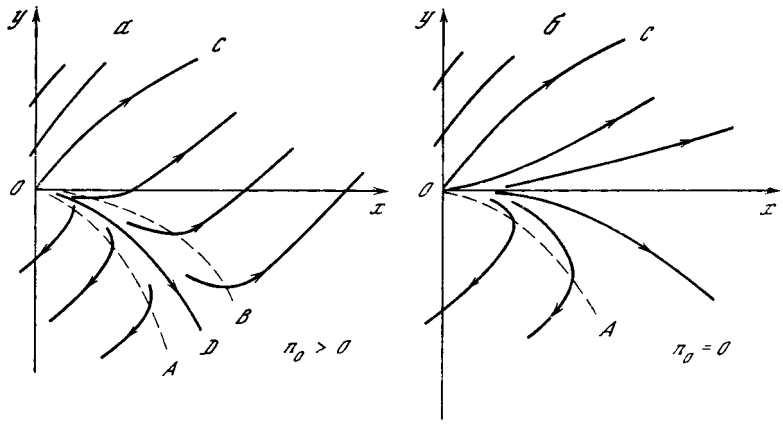


Рис. 1. Ход интегральных кривых уравнения (2.8) в полуплоскости ($x \geqslant 0$, y)
Пунктирные линии — изоклины бесконечностей (кривая OA) и нулей (кривая OB), стрелками указано направление убывания переменной s. Асимптотическому решению в окрестности конечного фронта ТВ соответствует кривая OC вблизи $x = 0$, $y = 0$

далее в знаменателе (2.9) главные члены, имеем после интегрирования

$$s = s_0 \exp\left(-x^a/B_0 a\right) + \ldots = s_0\left(1 - x^a/B_0 a\right) + \ldots, \qquad (2.13)$$

где $s_0 > 0$ — постоянная. Используя (2.13) и (2.10), получаем из (2.7) следующие выражения для функций $f = f(s)$ и $\omega = \omega(s)$ вблизи $s = s_0 - 0$:

$$f_e = \frac{1}{z} s_0^{k_0} \left(\frac{B_0 a}{s_0}\right)^{1/a} (s_0 - s)^{1/a} + \ldots,$$

$$\omega_e = \frac{nz}{\gamma - 1}\left(\frac{1-l}{\nu+1}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} s_0^{\frac{1+l\nu}{\nu+1}} f_e + \ldots \qquad (2.14)$$

Функции (2.14) удовлетворяют условиям начального фона $f_e = 0$, $\omega_e = 0$ при некотором конечном значении $s = s_0 > 0$.

Подставим теперь при $n_0 > 0$ главный член разложения (2.11) в уравнение (2.9). После соответствующего интегрирования получим $s = C_1 x^{-na}$, где C_1 — постоянная. Отсюда следует, что при $x = 0$ переменная $s = \infty$. Используя (2.7), получаем, что вблизи $s = \infty$ функция температуры имеет вид $f_e = Cs^{n_0/n} + \ldots$ и, следовательно, $f_e(\infty) = \infty$. Аналогичным образом получим, что при $n_0 = 0$ семейству кривых (2.12), входящих в точку $x = 0$, $y = 0$, в плоскости (s, f_e) соответствуют кривые $f_e = f_e(s)$, входящие в точку $s = \infty$, $f_e = \text{const}$. Таким образом, искомое решение в окрестности начального фона $f_e = 0$, $\omega_e = 0$ определяется разложением вида (2.14), соответствующим в плоскости (x, y) кривой вида (2.10).

Используя (2.14), из уравнений (2.1), (2.2) получаем следующие асимптотические выражения для функций скорости $\alpha = \alpha(s)$ и

плотности $\delta = \delta(s)$ вблизи $s = s_0$:

$$\delta = s_0^l \left(1 + \frac{\lambda_0^{2\nu} z}{n^2 s_0^{2(1-l)}} f_e + \ldots\right), \qquad \alpha = \frac{\lambda_0^{\nu} z}{n s_0^{1-l}} f_e + \ldots, \tag{2.15}$$

где $\lambda_0 = \left(\frac{\nu+1}{1-l} s_0^{1-l}\right)^{\frac{1}{\nu+1}}$ — значение переменной Эйлера при $s = s_0$.

Из уравнения (2.4) при $\omega_i \equiv 0$ получим следующее выражение для ионной компоненты температуры:

$$f_i = \frac{(\gamma-1) a s_0^{lb} \tilde{Q}_0}{n s_0 (a+1-a_1)} \left[\frac{(\gamma-1)\lambda_0^{2\nu} s_0^{l(b+1)-1}}{nza}\right]^{\frac{a_1-1}{a}} (s_0 - s)^{\frac{1}{a} + \frac{a-a_1}{a}} + \ldots \tag{2.16}$$

Координата $s = s_0$ характеризует положение границы, отделяющей возмущенную и нагретую область среды от неподвижной и холодной,— фронт температурной волны, которая при $t < \infty$ имеет конечную скорость.

Из формул (2.14)—(2.16) следует, что в окрестности фронта ТВ при $a > 1$ производные как тепловых, так и гидродинамических величин терпят разрыв: слева от $s = s_0$ производные равны бесконечности, а справа — нулю; в области $s > s_0$ имеет место тривиальное решение системы (1.18)—(1.22):

$$\alpha(s) \equiv 0, \quad f_e(s) \equiv 0, \quad f_i(s) \equiv 0, \quad \omega_e(s) \equiv 0, \quad \delta(s) \equiv s^l. \tag{2.17}$$

Из проведенного выше анализа следует, что вблизи $s = s_0$ обмен энергией между электронами и ионами в первом приближении не влияет на характер распределения функций $f_e = f_e(s)$, $\alpha = \alpha(s)$ и $\delta = \delta(s)$. Влияние сказывается лишь в слагаемых более высокого порядка малости. Приведем здесь формулы, определяющие безразмерные функции электронной температуры и скорости в окрестности $s = s_0$ с точностью до двух первых членов разложения:

$$\begin{aligned} f_e &= \frac{1}{z} s_0^{k_0} \left(\frac{B_0 a}{s_0}\right)^{1/a} (s_0 - s)^{1/a} [1 + F_1 (s_0 - s)^{\nu_0} + \ldots], \\ \alpha &= \frac{\lambda_0^{\nu} s_0^{k_0 - 1 + l}}{n} \left(\frac{B_0 a}{s_0}\right)^{1/a} (s_0 - s)^{1/a} [1 + A_1 (s_0 - s)^{\nu_0} + \ldots], \end{aligned} \tag{2.18}$$

где $\nu_0 = 1/a$ при $a \geqslant a_1 + 1$ и $\nu_0 = 1 - a_1/a$ при $a_1 < a < a_1 + 1$, а F_1 и A_1 выражаются через постоянные параметры задачи, и в частности через параметр $\tilde{Q}_0$.

Отметим, что функциональный вид полученного выше асимптотического решения системы в автомодельных переменных (1.18)—(1.22) при $\tilde{\sigma}_0 = \tilde{Q}_1 = \tilde{\varkappa}_r^0 = 0$ вблизи начального фона (1.29), (1.29′) не зависит от граничных условий, заданных в точке $s = 0$. Соответствующие граничные условия определяют только численное значение постоянной s_0.

2. При $\omega_i \neq 0$ ($\tilde{\varkappa}_i^0 \neq 0$) анализ показывает [47, 101], что вблизи начального фона (1.29), (1.29′) формально возможны различные виды асимптотических решений системы (2.1)—(2.6) в зависимости от величины отношения коэффициентов теплопроводности $\varkappa_i/\varkappa_e$. Для полностью ионизованной плазмы имеем $\varkappa_i^0 \ll \varkappa_e^0$ [82]. В этом случае физическому смыслу отвечает разложение, получаемое при условиях $\varkappa_i \ll \varkappa_e$. Тогда обе компоненты температуры, поток электронной теплопроводности и гидродинамические величины вблизи $s = s_0$ с точностью до главных членов определяются формулами (2.14)—(2.16), а поток тепла, обусловленный ионной теплопроводностью, имеет вид

$$\omega_i = -\tilde{\varkappa}_i^0 s_0^{l/(b+1)} \lambda_0^{\nu} F_0^{a+1} \frac{1+a-a_1}{a} (s_0 - s)^{\frac{1+(a+1)(a-a_1)}{a}} + \ldots, \qquad (2.19)$$

где F_0 — постоянный множитель в формуле (2.16).

2.2. Анализ решения вблизи границы газа с вакуумом ($\nu = 0$)

Пусть координата $s = 0$ характеризует границу газа с вакуумом, т. е. выполняются условия (1.28). При наличии в среде теплопроводности заданный на границе вакуум—газ тепловой режим создает здесь температуру, отличную от нуля. Поэтому естественно считать $f_e(0) \neq 0$. При $\omega_i \neq 0$ будем иметь также $f_i(0) \neq 0$.

Исследуем характер решения системы (1.18)—(1.22) вблизи $s = 0$, $\delta(0) = 0$, $f(0) = f_0 \neq 0$. Положим $f = f_0(1 + \tilde{f})$, где $\tilde{f}$ — малая величина. Отбрасывая члены высокого порядка малости по δ и $\tilde{f}$, получаем из уравнений (1.18), (1.19) при $\nu = 0$, $\tilde{\sigma}_0 = 0$

$$-nl\delta + ns\delta' = \delta^2\alpha', \qquad (2.20)$$

$$0{,}5n_0\alpha - ns\alpha' = -f_0\delta' - \delta\tilde{f}' + \ldots \qquad (2.21)$$

Предположим, что второе слагаемое в правой части (2.21) пренебрежимо мало́, т. е. выполняется условие вида $\lim\limits_{s\to 0} \delta\tilde{f}'/\delta' = 0$. При $\tilde{f}' \equiv 0$ система (2.20), (2.21) будет описывать так называемое гомотермическое движение газа [3, 102], т. е. движение при условии $T(m, t) \equiv T_0 t^{n_0}$ (температура постоянна по пространству). Гомотермическое течение можно рассматривать как предельный случай бесконечно большого коэффициента теплопроводности.

Пусть $n_0 > 0$. Используя замену переменных вида

$$x = ns/(\sqrt{f_0}\delta), \qquad (2.22)$$

выбирая за независимую переменную x из (2.20) и (2.21) при $\tilde{f}' \sim 0$, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \sqrt{f_0}\,\frac{x\alpha + B_1 l}{B_1[(1-l)x^2 - 1] - x\alpha}, \qquad (2.23)$$

$$\frac{d\delta}{dx} = \delta\,\frac{\alpha + B_1 l}{B_1[(1-l)x^2 - 1] - x\alpha}, \qquad (2.24)$$

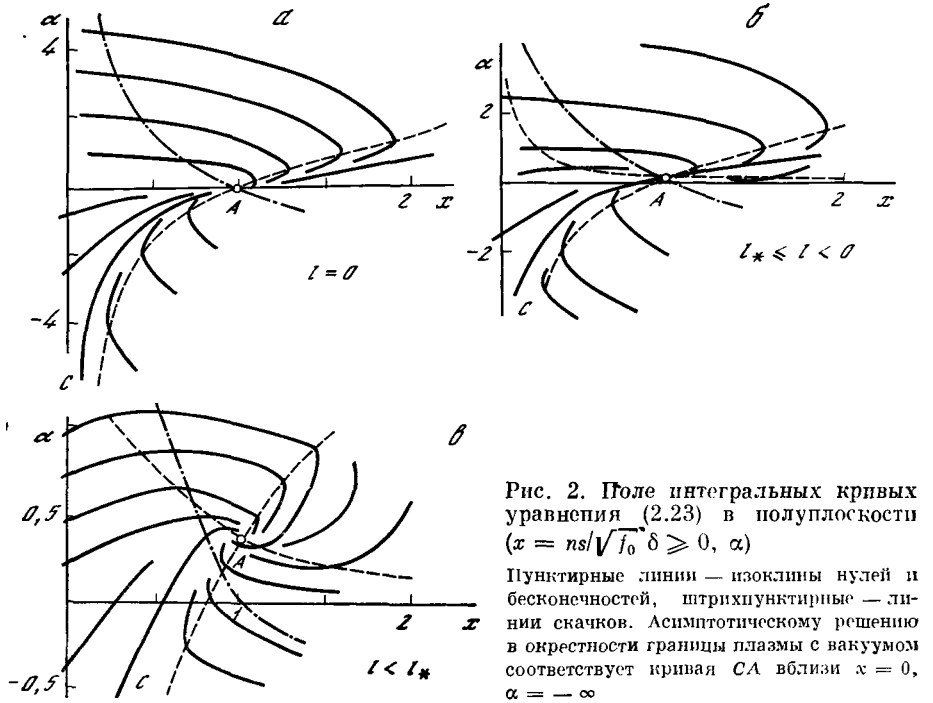


Рис. 2. Поле интегральных кривых уравнения (2.23) в полуплоскости ($x = ns/\sqrt{f_0}$ $\delta \geqslant 0$, α)

Пунктирные линии — изоклины нулей и бесконечностей, штрихпунктирные — линии скачков. Асимптотическому решению в окрестности границы плазмы с вакуумом соответствует кривая CA вблизи $x = 0$, $\alpha = -\infty$

где $B_1 = 2n\sqrt{f_0}/n_0 > 0$ — постоянная. Переменная x связана с безразмерной переменной Эйлера λ соотношением вида $x = (1/\sqrt{f_0})[(0{,}5n_0 + 1)\lambda - \alpha]$. При $x = 0$ имеем $\alpha = (0{,}5n_0 + 1)\lambda$. Координата $x = 0$ характеризует границу вакуум—газ, т. е. должно выполняться условие $\delta(0) = 0$.

Поле интегральных кривых уравнения (2.23) в полуплоскости ($x \geqslant 0$, α) при различных значениях $l < 0$ представлено на рис. 2. Уравнение (2.23) при $\alpha \neq +\infty$ имеет особые точки: A ($x = 1$, $\alpha = -B\,l$), C ($x = 0$, $\alpha = -\infty$), D ($x = \infty$, $\alpha = 0$). Пунктирные линии на рис. 2 изображают изоклины нулей ($l \neq 0$) и бесконечностей. При $l = 0$ уравнение (2.23) имеет тривиальное решение $\alpha \equiv 0$. Особые точки C и D являются седлами. Точка A при $l_* < l < 1$ ($l_* < 0$) является узлом (см. рис. 2, *а*, *б*), при $l = l_*$ — вырожденным узлом и при $l < l_*$ — фокусом (рис. 2, *в*)), где постоянная $l_* < 0$ определяется из уравнения вида $[1 - bl_* - (2a - 1)(2 - l_*)]^2 + 4(2a - 1)\,l_*(1 - bl_*) = 0$.

Интегральная кривая CA на рис. 2, являющаяся сепаратрисой седла C, вблизи $x = 0$ описывается формулой вида

$$\frac{1}{\alpha} = -(1/B_1)\,x\,[1 + (1/B_1)(1 - l)(B_1 + \sqrt{f_0})\,x^2 + \ldots]. \qquad (2.25)$$

Подставляя (2.25) в (2.24) и интегрируя полученное при этом уравнение, будем иметь

$$\delta = Cx^{b_2} \exp\,[-(B_1/2\ \ (1 - l)\sqrt{f_0})\,x^{-2}] + \ldots, \qquad (2.26)$$

где $k_2 = \dfrac{(1-l)B_1 + \sqrt{f_0}}{\sqrt{f_0}(1-l)} > 0$; $C > 0$ — произвольная постоянная.

Из (2.26) имеем $\delta(0) = 0$, т. е. выполняется условие разлета в вакуум. Можно показать, что ни при одном конечном α условие $\delta(0) = 0$ не выполняется. Действительно, полагая $\alpha(0) = \alpha_0 \neq \pm\infty$, из (2.24) получим с точностью до главных членов $d\delta/dx = -(\alpha_0/B_1)\delta + \ldots$ и, следовательно, $\delta = \text{const} \cdot \exp[(-\alpha_0/B_1)x] + \ldots$

Из (2.25), (2.26) получим приближенные формулы, определяющие с точностью до главных членов функции $\alpha = \alpha(s)$ и $\delta = \delta(s)$ вблизи $s = 0$ при $n_0 > 0$:

$$\delta = s\left[C_1 - \frac{nn_0(1-l)}{f_0}\ln s\right]^{1/2} + \ldots,$$

$$\alpha = -\frac{2f_0}{n_0}\left[C_1 - \frac{nn_0(1-l)}{f_0}\ln s\right]^{1/2} + \ldots, \qquad (2.27)$$

где C_1 — постоянная.

При $n_0 = 0$ система уравнений (2.20), (2.21) (без второго слагаемого в правой части (2.21)) интегрируется. Решение, удовлетворяющее условию вакуума, имеет вид

$$\delta = \sqrt{(1-l)/f_0}\, ns + \ldots, \quad \alpha = \sqrt{f_0(1-l)}\ln Cs, \qquad (2.28)$$

где $C > 0$ — произвольная постоянная.

Проведя выкладки, аналогичные рассмотренным выше, можно при определенных условиях получить соответствующие асимптотические выражения для тепловых величин. При этом нетрудно убедиться, что условие $\lim\limits_{s\to 0}(\delta f'/\delta') = 0$, при котором были получены выражения (2.25)—(2.28), действительно выполняется. (Подробнее об этом см. в работах [39, 41, 45].)

Заметим, что из (2.25) и (2.27), (2.28) следует, что при наличии в среде теплопроводности скорость разлета газа в вакуум (аналогично изотермическому случаю [103]) бесконечна. Бесконечное значение скорости разлета газа в вакуум при температуре, отличной от нуля, вытекает из математической идеализации, состоящей в предположении, что в окрестности границы газа с вакуумом справедливы уравнения газодинамики. На самом деле точный анализ течения сильно разреженного газа вблизи границы с вакуумом требует привлечения аппарата кинетических уравнений. Такой анализ проведен, например, в работе [104]. В этой работе изучен переход от свободномолекулярного режима расширения газа в вакуум к режиму движения сплошной среды и найдено время выхода течения на предельный режим, при котором движение основной массы газа описывается уравнениями газовой динамики.

2.3. Изотермический и изоэлектронно-термический разрыв

Выясним теперь возможную структуру решения сформулированной выше задачи в области $0 < s < s_0$ между фронтом температурной волны ($s = s_0$) и границей плазмы с вакуумом или с поршнем ($s = 0$). Подробный анализ проведен для случая $\tilde{\varkappa}_i^0 = 0$ ($\omega_i \equiv 0$).

1. Разрешим уравнения системы (1.18)—(1.22) при $\tilde{\sigma}_0 = 0$, $\tilde{\varkappa}_i^0 = 0$ относительно производных. Используя обозначения

$$\Delta = n^2 s^2 - \delta^2 \lambda^{2\nu} (z f_e + \gamma f_i), \tag{2.29}$$

$$F = -z\omega_e / \tilde{\varkappa}_e^0 \lambda^\nu f_e^a \delta^{b+1}, \quad Q = (\gamma - 1)\, \tilde{Q}_0 \delta^{b_1} f_e^{-a_1} (f_i - f_e),$$
$$\Phi = n_0 f_i + (\gamma - 1)\, \nu \lambda^{-1} \alpha f_i + Q, \quad \varphi = ns\,(0{,}5 n_0 \alpha + \tag{2.30}$$
$$+ \lambda^\nu \delta F) + \lambda^\nu \delta\, [f\,(nl + \nu\lambda^{-1}\alpha) + \Phi],$$

запишем (1.18)—(1.22) в виде

$$\alpha' = \varphi/\Delta, \quad \delta' = (\delta/ns)\,(nl + \nu\lambda^{-1}\alpha + \lambda^\nu \delta\varphi/\Delta),$$

$$(\lambda^\nu \omega_e)' = \frac{n}{\gamma - 1} sf' - \frac{n_0}{\gamma - 1} f - \delta f (\lambda^\nu \alpha)', \tag{2.31}$$

$$f_i' = \frac{1}{ns} [\Phi + (\gamma - 1)\, \delta f_i (\lambda^\nu \alpha)'],$$

$$f_e' = \frac{1}{z} F. \tag{2.32}$$

Рассмотрим комбинацию вида (2.29), входящую в знаменатель уравнений (2.31). Вблизи $s = s_0$ (фронт ТВ) имеем с точностью до главных членов $\Delta = n^2 s_0^2 + \ldots > 0$. В точке $s = 0$ на поршне получим $\Delta < 0$. В случае, когда точка $s = 0$ характеризует положение границы вакуум—газ, при $n_0 > 0$ получим $\Delta = nn_0\,(1 - l)\, s^2 \ln s + \ldots < 0$ и при $n_0 = 0$ ($l = 1/b$, $b < 0$) $\Delta = ln^2 s^2 + \ldots < 0$. Следовательно, если искомые функции непрерывны, то при любых граничных значениях и любых постоянных, входящих в систему уравнений (2.29)—(2.32), в промежутке $0 < s < s_0$ должна существовать точка $s = s_k$, в которой выполняется условие $\Delta_k = \Delta(s_k) = 0$ (имеет место так называемая «особенность $\Delta = 0$»).

Пусть $s = s_k$ — точка, в которой знаменатель Δ обращается в нуль ($\Delta_k = 0$), а числитель правых частей уравнений (2.31) отличен от нуля. Тогда в этой точке все производные, кроме f_e', равны бесконечности. Рассмотрим систему уравнений (2.29)—(2.32) в окрестности $s = s_k$, сохраняя лишь главные члены. Система распадается на отдельные уравнения, часть из которых интегрируется. После преобразований получим уравнение вида

$$\frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{s}} = \frac{\lambda_k \delta_k^2 \varphi_k}{ns_k} \frac{1}{\Psi_k \tilde{s} + \chi_k \tilde{\delta}}, \tag{2.33}$$

где $\tilde{s} = s - s_k$, $\tilde{\delta} = \delta - \delta_k$ — малые величины; Ψ_k и χ_k — постоянные, выражающиеся через величины в точке $s = s_k$. Функции $\alpha - \alpha_k$, $\omega_e - \omega_{ek}$, $f_i - f_{ik}$ вблизи $s = s_k$ линейны по $\tilde{s}$ и $\tilde{\delta}$, а для функции f_e получим

$$f_e = f_{ek} + (1/z) F_k \tilde{s} + \ldots \tag{2.34}$$

Общее решение уравнения (2.33) имеет вид

$$\tilde{s} = Ce^{A_k \tilde{\delta}} - \frac{\chi_k}{\Psi_k A_k}(A_k \tilde{\delta} + 1), \tag{2.35}$$

где $A_k = ns_k \Psi_k / (\lambda_k^{\nu} \delta_k^2 \varphi_k)$; C — постоянная интегрирования. Условия $\tilde{s} = 0$, $\tilde{\delta} = 0$ удовлетворяются при $C = \chi_k / \Psi_k A_k$. В этом случае соотношение (2.35) с точностью до главных членов можно записать в следующем виде:

$$\tilde{s} = (\chi_k A_k / 2\Psi_k) \tilde{\delta}^2 + \ldots \tag{2.36}$$

Из (2.36) следует, что точка $\tilde{s} = 0$, $\tilde{\delta} = 0$ ($s = s_k$, $\delta = \delta_k$) есть точка поворота интегральной кривой $\delta = \delta(s)$. Это означает, что интегральные кривые из области $s > s_k$ ($\Delta_k > 0$) в область $s < s_k$ ($\Delta_k < 0$) или наоборот непрерывно продолжить нельзя. Аналогичным образом при $s = s_k$ непрерывно продолжить нельзя кривые $\alpha = \alpha(s)$, $\omega_e = \omega_e(s)$ и $f_i = f_i(s)$. Следовательно, переход из области $\Delta > 0$ в область $\Delta < 0$ можно осуществить только через разрыв во всех функциях, кроме, возможно, электронной компоненты температуры $f_e = f_e(s)$ (см. формулу (2.34)).

Пусть разрыв расположен в некоторой точке $s = s_1$, $0 < s_1 < s_0$. В точке $s = s_1$ функция $\Delta = \Delta(s)$ разрывна, так как предельное значение справа $\Delta(s_1 + 0) > 0$, а предельное значение слева $\Delta(s_1 - 0) < 0$. Переходя к исходным (размерным) переменным по формулам (1.17), получим, что перед разрывом $D_{л1} > c_1$, а позади него $D_{л2} < c_2$, где $c_1 = [R_0 (zT_{e1} + \gamma T_{i1})]^{1/2}$ и $c_2 = [R_0 (zT_{e1} + \gamma T_{i2})]^{1/2}$ — изоэлектронно-термические скорости звука соответственно впереди и позади разрыва. Заметим, что $s_1 \neq s_k$, так как в точке $s = s_k$ имеем $D_{лk} = [R_0 (zT_{ek} + \gamma T_{ik})]^{1/2}$, т. е. точка с координатой $s = s_k$ является «звуковой точкой», в которой гидродинамические величины непрерывны. Из изложенного следует, что при $\omega_i \equiv 0$ разрыв разумно считать изоэлектронно-термическим.

Представление о характере решения сформулированных выше задач в области $0 < s < s_0$ дает предельный случай бесконечно больших коэффициентов теплопроводности $\varkappa_e^0$ и электронно-ионной релаксации Q_0. При $\varkappa_e^0 = \infty$, $Q_0 = \infty$, $\nu = 0$ (плоская симметрия) решение описывается системой уравнений (2.20), (2.21) (при $f_i \equiv 0$) или в полуплоскости ($x = ns/(\sqrt{f_0}\delta) > 0$, α) уравнением (2.23), анализ которого был проведен выше. Можно предположить, что при сжатии газа поршнем или разлете газа в вакуум заданный на границе тепловой режим порождает температурную волну, фронт которой

при $\varkappa_e^0 \gg 1$, $Q_0 \gg 1$ мгновенно уходит на бесконечность, устанавливая постоянную по пространственной координате температуру $T_e \equiv T_i$.

Обратимся вновь к рис. 2. В полуплоскости ($x \geqslant 0$, α) границу газа с поршнем или с вакуумом характеризует ось α, причем для вакуума имеем $\alpha(0) = -\infty$. Начальному состоянию газа с постоянной безразмерной температурой $f_e \equiv f_0$ соответствуют точки, расположенные на оси x правее точки A, через которую проходит «звуковая линия» $x = 1$ (при $x = 1$ имеем $ns = \sqrt{f_0}\delta$).

Предположим, что при $x = 0$ задано некоторое значение скорости поршня $\alpha(0) = \alpha_0 > 0$. Двигаясь вдоль интегральной кривой, выходящей из точки $x = 0$, $\alpha = \alpha_0 > 0$, мы пересечем звуковую линию $x = 1$ и перейдем из дозвуковой области ($x < 1$) в сверхзвуковую область ($x > 1$). Далее интегральные кривые в области $x > 1$ поворачивают и либо уходят в узел (см. рис. 2, *а*, *б*), либо наматываются на фокус (рис. 2, *в*). Это означает, что попасть из дозвуковой области $x < 1$ в некоторую заданную точку на оси x можно лишь через разрыв. Нетрудно показать, что «линия скачков» для изотермического разрыва ($f_e(s) \equiv f_0$), т. е. значения x и α за фронтом разрыва, определяется формулой $\alpha = \sqrt{f_0}\,(1/x - x)$, а точка начального фона $x = x_1 > 1$, в которой осуществляется скачок, связана с $x = x_2$ (значение x позади разрыва) выражением $x_1 = 1/x_2$ (см. ниже формулы (2.42)). Линия скачков на рис. 2 изображена пунктиром с точкой.

При конечном значении $\varkappa_e^0$ (во всяком случае, при больших $\varkappa_e^0$) можно считать, что поле интегральных кривых имеет тот же характер, что и в предельном случае, меняются лишь координаты особых точек.

2. Анализ, аналогичный изложенному выше, показывает, что и в случае $\omega_i \neq 0$ ($\varkappa_i^0 \neq 0$) в некоторой точке $s = s_1$, $0 < s_1 < s_0$, т. е. в области между фронтом ТВ и границей газа с поршнем или с вакуумом, возможен разрыв гидродинамических величин и потоков тепла W_e и W_i. При этом перед разрывом выполняется условие $D_{л1} > c_1$, а позади разрыва — условие $D_{л2} < c_1$, где $c_1 = [R_0(zT_{e1} + T_{i1})]^{1/2}$ — изотермическая скорость звука. При $\omega_i \neq 0$ разрыв будет являться изотермическим: на поверхности разрыва непрерывны как ионная, так и электронная температура.

3. Соотношения, аналогичные условиям Гюгонио на разрыве, в обычной газовой динамике можно получить, рассматривая в окрестности разрыва интегральные аналоги уравнений движения, непрерывности и полной энергии. При $T_e \neq T_i$, кроме указанных уравнений, требуется дополнительное соотношение. Его обычно получают [77, 79, 80, 105], используя интегральный аналог уравнения энергии, записанного для электронной компоненты энтропии, и условие непрерывности электронной температуры. В случае, когда справедливы уравнения состояния идеального газа (1.6), электронная энтропия выражается формулой

$$S_e = [R_0 z/(\gamma - 1)] \ln (R_0 z T_e/\rho^{\gamma-1}). \qquad (2.37)$$

Уравнение для электронной компоненты энтропии имеет вид

$$T_e\, dS_e/dt = -\partial\,(r^\nu W_e)/\partial m + Q_{ie}. \qquad (2.38)$$

Обозначим индексом 1 величины впереди фронта разрыва, а индексом 2 — позади разрыва. Пусть D_M — «массовая» скорость разрыва. Интегрируя (2.38) в окрестности разрыва при условии непрерывности электронной компоненты температуры $T_{e2} = T_{e1}$, получаем следующее соотношение:

$$D_M T_{e1} S_{e2} + (r^\nu W_e)_2 = D_M T_{e1} S_{e1} + (r^\nu W_e)_1. \qquad (2.39)$$

Приведем окончательный вид соотношений на фронте упомянутых выше изоэлектронно-термического ($\omega_i \equiv 0$) и изотермического ($\omega_i \not\equiv 0$) разрывов в автомодельных переменных (1.17). Обозначим через $d_1 = ns_1/\delta_1\lambda_1^\nu$ безразмерную лагранжеву скорость впереди фронта разрыва.

При $\omega_i \equiv 0$ соотношения на разрыве можно записать в следующем виде:

$$f_{e2} = f_{e1},\ \alpha_2 = \alpha_1 + d_1(1-\theta),\ \omega_{e2} = \omega_{e1} + d_1 z f_{e1}\delta_1 \ln\theta,$$
$$f_{i2} = f_{i1} + d_1^2(1-\theta)(\theta - (f_{i1} + z f_{e1})/d_1^2), \qquad (2.40)$$

где скачок плотностей $\theta = \delta_1/\delta_2$ определяется из уравнения $(A_1 - \theta)(1-\theta) = -B_1 \ln\theta$,

$$A_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{f_{i1} + z f_{e1}}{d_1^2},\qquad B_1 = \frac{2(\gamma-1)\,z f_{e1}}{(\gamma+1)\,d_1^2}. \qquad (2.41)$$

При $\omega_i \not\equiv 0$ соотношения, аналогичные условиям Гюгонио, имеют вид

$$f_{e2} = f_{e1},\ f_{i2} = f_{i1},\ \alpha_2 = \alpha_1 + d_1(1-\theta),$$
$$\omega_{e2} = \omega_{e1} + d_1 z f_{e1}\delta_1 \ln\theta,\ \theta = (f_{i1} + z f_{e1})/d_1^2, \qquad (2.42)$$
$$\omega_{i2} = \omega_{i1} - d_1 z f_{e1}\delta_1 \ln\theta - {}^1\!/_2 d_1^3\delta_1(1-\theta^2).$$

3. Различные режимы распространения тепла

3.1. Автомодельные решения, описывающие режимы ТВ-I и ТВ-II

Анализ и численные расчеты показывают, что в зависимости от изменения параметров задачи могут существовать два качественно различных режима теплопереноса в движущейся среде, о свойствах которых упоминалось во введении. Один из режимов (ТВ-I) описывает сверхзвуковой прогрев среды. Гидродинамические величины в глубине фронта ТВ в режиме ТВ-I меняются слабо. Другой режим (ТВ-II) описывает дозвуковой прогрев вещества. Температурная волна распространяется по фону, наведенному ударной волной. Для

режима ТВ-I характерна монотонность функции температуры по пространственной координате. В режиме ТВ-II температура является немонотонной функцией координаты s и, следовательно, пространственной координаты m.

Для случая $\nu = 0$ (плоская симметрия) и $T_e \equiv T_i$ (без учета теплового излучения) можно показать существование решений с монотонной и немонотонной по пространственной координате температурой, исследуя приближенный характер решения системы (1.8)—(1.22) в области $0 \leqslant s \leqslant s_1$ позади изотермического скачка. Запишем уравнения (1.20), (1.22) с учетом (1.18) для случая $\nu = 0$, $q \equiv 0$, $f_e \equiv f_i \equiv f/(z+1)$, введя вместо δ функцию $\beta = \delta f$ (безразмерное давление). Уравнения примут вид

$$n_1 f - \gamma n s f' + (\gamma - 1)\, n s f \beta'/\beta + (\gamma - 1)\,\omega' = 0, \tag{3.1}$$

$$\omega = \omega_e + \omega_i = -\frac{\tilde{\varkappa}_0}{(z+1)^{a+1}} f^{a-b-1}\beta^{b+1} f', \quad \tilde{\varkappa}_0 = \tilde{\varkappa}_e^0 + \tilde{\varkappa}_i^0, \tag{3.2}$$

где $n_1 = n_0 - nl\,(\gamma - 1)$. Будем считать $a - b - 1 > 0$ (например, $a > 0$, $b \leqslant 0$) и $n_1 > 0$. Так как в автомодельных переменных (1.17) получим

$$\frac{R_0 T_e}{\rho^{\gamma-1}} = \frac{f_e}{\delta^{\gamma-1}} \left(W_0^{2-l(\gamma+1)} \rho_0^{-(3\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{3-2l}} t^{n_1}, \tag{3.3}$$

то условие $n_1 > 0$ означает, что энтропия S (см. формулу (2.37)) за фронтом разрыва возрастает со временем. Аппроксимируем далее функцию давления $\beta = \beta(s)$ в области $0 \leqslant s \leqslant s_1$ степенной функцией вида

$$\beta = \beta_2 s^d / s_1^d, \tag{3.4}$$

где $\beta_2 = \beta(s_1)$ — значение давления за фронтом изотермического разрыва, расположенного в точке $s = s_1$. В случае, когда при $s = 0$ задано условие поршня (1.27), давление $\beta = \beta(s)$, как правило, близко к постоянному в области $0 \leqslant s \leqslant s_1$ (см., например, ниже рис. 3, *б*). Поэтому положим в этом случае $d = 0$. При условии вакуума в точке $s = 0$ (условие (1.28)) будем считать $0 < d < 1$: в этом случае аналогично (2.27) имеем $\beta(0) = f_0\,\delta(0) = 0$, $\beta'(0) = \infty$.

Подставляя (3.4) в систему (3.1), (3.2), получаем следующую систему уравнений:

$$[n_1 + n(\gamma - 1)\, d] f - \gamma n s f' + (\gamma - 1)\,\omega' = 0, \tag{3.5}$$

$$\omega = -\frac{\tilde{\varkappa}_0}{z^{a+1}} \left(\frac{\beta_2}{s_1^d}\right)^{b+1} s^{d(b+1)} f^{a-b-1} f'. \tag{3.6}$$

Система (3.5), (3.6) с точностью до положительных постоянных множителей совпадает с системой уравнений (2.3), (2.5), ранее рассмотренной нами при анализе решения вблизи фронта температурной волны (см. подраздел 2.1 настоящей работы). Отличие состоит в соответствующих граничных условиях: в данном случае нас интересуют решения системы (3.5), (3.6) в области $0 \leqslant s \leqslant s_1$, которые при

$s = s_1$ (координата, характеризующая положение фронта изотермического разрыва) удовлетворяют условиям $f(s_1) = f_1 = f_2$, $\omega(s_1) = \omega_2$, где ω_2 — значение потока тепла позади фронта разрыва. Из (2.42) имеем

$$\omega_2 = \omega_{e2} + \omega_{e1} = \omega_1 - {}^1/_2 d_1^3 \delta_1 (1 - \theta^2), \quad \theta = \delta_1/\delta_2. \tag{3.7}$$

При $s = 0$ $f(0) = f_0 \neq 0$ и $\omega(0) = \omega_0 \neq 0$, где ω_0 — заданное значение потока тепла на поршне или на границе плазмы с вакуумом.

Введем далее замену переменных вида

$$f = s^{k_0} x, \quad \omega = [n\gamma/(\gamma - 1)]\, s^{k_1} y, \tag{3.8}$$

где $k_0 = (2 - d(b + 1))/(a - b - 1) > 0$; $k_1 = k_0 + 1$. Используя (3.8), систему (3.5), (3.6) можно свести к следующим уравнениям:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(B_2 + k_1 x^{a-b-1})\, y + [[n_1 + n(\gamma - 1)\, d]/n\gamma]\, x^{a-b}}{B_2 y + k_0 x^{a-b}}, \tag{3.9}$$

$$ds/dx = -sx^{a-b-1}/(B_2 y + k_0 x^{a-b}), \tag{3.10}$$

где $B_2 = \dfrac{n\gamma}{\gamma - 1}\left(\dfrac{s_1^d}{\beta_2}\right)^{b+1} \dfrac{z^{a+1}}{\varkappa_0}$ — положительная постоянная.

При $n_1 + n(\gamma - 1)\, d > 0$, $a - b - 1 > 0$ общая картина поведения интегральных кривых уравнения (3.9) в плоскости $(x \geqslant 0, y)$ будет аналогична картине поведения интегральных кривых уравнения (2.8), изображенной на рис. 1.

Координате фронта разрыва $s = s_1$ и параметрам позади разрыва $f = f_1 = f_2$ и $\omega = \omega_2$ в плоскости $(x \geqslant 0, y)$ соответствует некоторая точка $x = x_2 = s_1^{-k_0} f_2 > 0$ и $y = y_2 = s_1^{-k_0-1}\omega_2$. При этом, как следует из (3.7), за фронтом разрыва поток тепла ω_2 и, следовательно, $y = y_2$ могут иметь различный знак.

Координате $s = 0$, характеризующей положение поршня или границы газа с вакуумом ($f(0) = f_0 \neq 0$, $\omega(0) = \omega_0 \neq 0$), в плоскости $x \geqslant 0$, y) будет соответствовать точка $x = \infty$, $y = \infty$.

При фиксированном изотермическом разрыве (фиксированных значениях параметров s_1, β_2, f_2, ω_2 и, следовательно, фиксированных значениях $x = x_2 > 0$, $y = y_2$) существует единственная интегральная кривая $y = y(x)$, $x_2 \leqslant x \leqslant \infty$, соответствующая приближенному решению исходной системы уравнений в автомодельных переменных в области $0 \leqslant s \leqslant s_1$ — между поршнем или границей плазмы с вакуумом и изотермическим разрывом.

Анализ расположения интегральных кривых в плоскости $(x \geqslant 0, y)$ (см. рис. 1) приводит к следующим результатам.

1. Если позади фронта изотермической ударной волны поток тепла положителен или равен нулю, т. е. $\omega_2 \geqslant 0$ (следовательно, $y_2 \geqslant 0$), то он сохраняет знак во всей области $0 < s < s_1$, так как в этом случае при $x > 0$ имеем $y > 0$. Функция $f = f(s)$ в этом случае будет монотонной в области $0 \leqslant s \leqslant s_1$.

2. Если позади фронта ударной волны поток тепла отрицателен, т. е. $\omega_2 < 0$, причем значения $x = x_2$ и $y = y_2 < 0$ расположены в

области $x > 0$, $y < 0$ выше «разделяющей» интегральной кривой OD, то при движении вдоль интегральной кривой в сторону возрастания x при $x \to \infty$ (в сторону убывания s при $s \to 0$ — см. уравнение (3.10)) функция y, а следовательно, и ω обязательно сменят знак. Функция $f = f(s)$ в этом случае будет немонотонной в области $0 \leqslant s \leqslant s_1$.

3. Интегральные кривые, расположенные ниже разделяющей кривой на рис. 1, не имеют физического смысла. Иными словами, отрицательные значения потоков тепла за фронтом изотермического разрыва не могут быть слишком большими по абсолютной величине.

Анализ и расчеты показывают, что наличие двух типов решений — с монотонной и немонотонной по s температурой — существенно связано с величиной теплового режима на границе или величиной коэффициента теплопроводности.

Выше мы получили, что режим с монотонной по s температурой существует при $\omega_2 \geqslant 0$, где $\omega = \omega_2$ — поток тепла за фронтом изотермического разрыва. Используя формулы (3.2) и (3.7), получим, что условие $\omega_2 \geqslant 0$ соответствует неравенству

$$\tilde{\varkappa}_0 > \tilde{\varkappa}_* = \frac{0{,}5 a_1^3 \delta_1 (1 - \theta^2) (z + 1)^{a+1}}{f_1^a \delta_1^{b+1} |f_1'|}. \qquad (3.11)$$

Неравенство (3.11) означает, что решения, которые описываются монотонной функцией температуры $f = f(s)$, существуют при больших значениях параметра $\tilde{\varkappa}_0$, например (см. формулу (1.25)) при больших значениях постоянной в коэффициенте теплопроводности или при больших значениях W_0. В этом случае преобладающую роль по сравнению с газодинамическими процессами играет перенос тепла, обусловленный механизмом теплопроводности,— имеет место сверхзвуковой режим теплопереноса ТВ-I. Профили безразмерной температуры $f(s)$ и плотности $\delta(s)$ для задачи о поршне при $f_e \equiv f_i$, характерные для режима ТВ-I, изображены на рис. 3, *а*.

В противоположном случае (при малых значениях параметра $\tilde{\varkappa}_0$) существуют режимы с немонотонной температурой по s. В развитой стадии газодинамическое движение в таких решениях оказывает существенное влияние на процессы. Указанное решение описывает режим дозвукового прогрева ТВ-II. На рис. 3, *б* для задачи о поршне (в однотемпературном случае) изображены профили $f = f(s)$, $\delta = \delta(s)$ потока тепла $\omega = \omega(s)$ и давления $\beta = \beta(s)$, типичные для режима ТВ-II. Эффективный фронт температурной волны в этом режиме выделяется равенством нулю теплового потока в некоторой точке $s = s_2$, $0 < s_2 < s_1 < s_0$. В автомодельном решении ударная волна, распространяющаяся впереди фронта ТВ-II, представляет собой изотермический разрыв и малую по массе область сверхзвукового распространения тепла перед ним.

Плотность и скорость за фронтом ТВ-II убывают, причем изменение этих величин позади фронта ТВ-II значительно более резкое, чем в глубине фронта ТВ-I. Область впереди фронта тепловой волны, охваченная ударной волной (область B на рис. 3, *б*), близка к адиа-

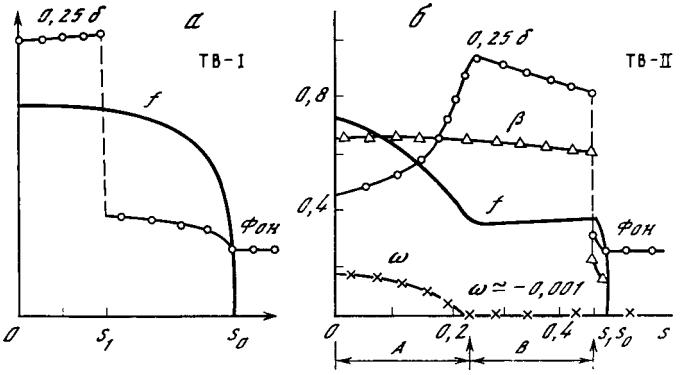


Рис. 3. Распределение профилей газодинамических и тепловых величин, характерное для режима ТВ-I и ТВ-II

Пунктиром обозначен разрыв гидродинамических величин, сплошной линией — $f(s)$, кружками — $\delta(s)$, крестиками — $\omega(s)$, треугольниками — $\beta(s)$

батической. Скорости движения границ этой области велики, а тепловые потоки в ней, как правило, значительно меньше по абсолютной величине, чем в области между поршнем и фронтом температурной волны (область A на рис. 3, *б*). Это согласуется с упомянутым выше утверждением, что отрицательные значения потоков ω_2 за фронтом изотермической ударной волны не могут быть слишком велики.

Численные расчеты системы в автомодельных переменных и исходной системы в частных производных, описывающие процесс установления автомодельного режима, показывают, что различные режимы теплопереноса при аналогичных условиях существуют и в общем случае $T_e \not\equiv T_i$. При $\tilde{\varkappa}_e^0 > \tilde{\varkappa}_*$ имеет место режим ТВ-I, а в противоположном случае — режим ТВ-II. Соответствующие численные примеры приводятся ниже (см. рис. 4, 5).

3.?. Некоторые свойства автомодельных решений. Численные примеры

1. Формулы вида (1.17) позволяют с точностью до безразмерных констант установить зависимости характерных величин от определяющих параметров задачи и времени t. Так, средние по массе значения температур $\overline{T}_e$ и $\overline{T}_i$ и закон движения фронта температурных волн $m = m_0(t)$ можно следующим образом выразить через поток тепла, заданный на границе $W_e(0, t) = W_0 t^g$:

$$\overline{T}_{e,\,i} = \bar{f}_{e,\,i}(s)\, R_0^{-1} \rho_0^{-2\theta_0} [W_e(0, t)]^{2(1-l)\theta_0} t^{-2(\nu+1)l\theta_0},$$
$$m_0(t) = s_0 \rho_0^{(2-\nu)\theta_0} [W_e(0, t)]^{(\nu+1)\theta_0} t^{3(\nu+1)\theta_0}, \qquad (3.12)$$
$$\bar{f}_{e,\,i}(s) = \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} f_{e,\,i}(s)\, ds, \quad \theta_0 = 1/[3 - (2 - \nu) l].$$

Из (3.12) следует, что при $g \geqslant 0$ в случае $l = 0$ (начальная плотность среды постоянна) средняя температура растет пропорционально величине $[W_e(0, t)]^{2/3}$, в случае $l < 0$ растет быстрее и при $1 > l > 0$ — медленнее, чем $[W_e(0, t)]^{\frac{2(1-l)}{3-(2-\nu)l}}$. В случае сферической симметрии ($\nu = 2$) фронт ТВ при произвольном l движется по закону $m_0 \sim W_e(0, t)t^3$.

Аналогичным образом величины $\overline{T}_e$, $\overline{T}_i$ и $m = m_0(t)$ можно выразить через скорость поршня $v(0, t) = v_0 t^{0,5\, n_0}$:

$$\overline{T}_{e,i} = \overline{f}_{e,i}(s)(1/\alpha_0^2) R_0^{-1}[v(0, t)]^2,$$
$$m_0 = s_0 \rho_0^{1/(1-l)} [v(0, t)\, t/\alpha_0]^{(\nu+1)/(1-l)}. \qquad (3.13)$$

Из (3.13) видно, что средняя температура среды растет пропорционально квадрату скорости поршня, а положение фронта ТВ — пропорционально величине $(v(0, t)t)^{(\nu+1)/(1-l)}$.

2. В двухтемпературном случае при $Q_1 = 0$, $\sigma_0 = 0$, $\varkappa_r^0 = 0$ автомодельное движение теплопроводного газа зависит от трех безразмерных постоянных: $\tilde{\varkappa}_e^0$, $\tilde{\varkappa}_i^0$ (при $W_i \equiv 0$ имеем $\tilde{\varkappa}_i^0 = 0$) и $\tilde{Q}_0$ (множитель в слагаемом, выражающем обмен энергией между электронами и ионами (см. формулы (1.25))). Постоянную $\tilde{\varkappa}_i^0$ можно выразить через $\tilde{\varkappa}_e^0$ по формуле $\tilde{\varkappa}_i^0 = (\varkappa_i^0/\varkappa_e^0)\, \varkappa_e^0$. При $b + b_1 = 1$, $a = a_1 + 1$ (в частности, при параметрах для полностью ионизованного газа) и произвольных ν, l из (1.25) получим

$$\tilde{Q}_0 = Q_0 \varkappa_e^0 R_0^3 / \tilde{\varkappa}_e^0. \qquad (3.14)$$

Из (3.14) следует, что при фиксированных свойствах вещества (фиксированных значениях постоянных $\varkappa_{e,i}^0$, Q_0 и R_0) получим $\tilde{Q}_0 \sim 1/\tilde{\varkappa}_e^0$. Подставляя, например, в (3.14) и в выражение для $\tilde{\varkappa}_i^0$ известные значения параметров $\varkappa_e^0$, $\varkappa_i^0$, Q_0, R_0 [106], будем иметь

$$\tilde{Q}_0 = [21{,}4/(z + 4)]z^3/\tilde{\varkappa}_e^0, \qquad \tilde{\varkappa}_i^0 = 0{,}347\, (m_e/m_i)^{1/2}\, [(z + 4)/z^4]\tilde{\varkappa}_e^0, \qquad (3.15)$$

где z — заряд ионов.

Из (3.14) следует, что с ростом $\tilde{\varkappa}_e^0$ (например, с возрастанием постоянной W_0 в выражении для потока тепла на границе или с уменьшением начальной плотности газа) параметр $\tilde{Q}_0$ уменьшается. Это значит, что увеличивается время релаксации и несовпадение электронной и ионной компонент температуры.

Поэтому для режима ТВ-I, который существует при больших значениях $\tilde{\varkappa}_e^0$, характерным является неравенство температур $T_e \neq T_i$ во всей области, охваченной тепловым и газодинамическим возмущением.

При малых значениях $\tilde{\varkappa}_e^0$ (режим ТВ-II) в силу (3.14) параметр $\tilde{Q}_0$ велик, и температура T_e может быть сравнима с T_i.

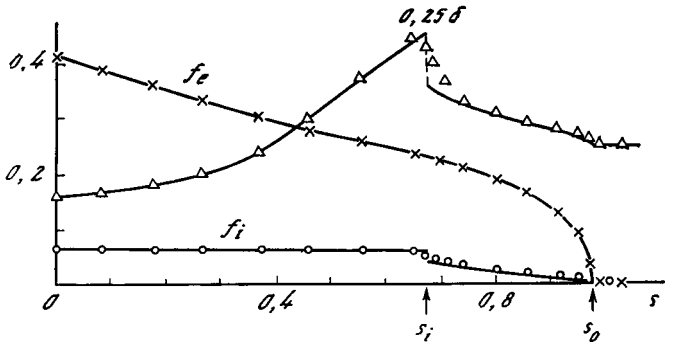


Рис. 4. Профили безразмерных функций температур $f_e = f_e(s)$, $f_i = f_i(s)$ и плотности $\delta = \delta(s)$, описывающие решение задачи о закрепленной стенке ($\alpha(0) = 0$) с заданным на ней тепловым режимом ($\omega(0) = 1$) при $\omega_i \equiv 0$, $q \equiv 0$

Приведем численные примеры автомодельных решений, иллюстрирующие основные свойства движения теплопроводного газа. На рис. 4, 5 представлены результаты численного решения задачи о закрепленной стенке (частный случай поршня) с заданным на ней тепловым режимом ($\alpha(0) = 0$, $\omega_e(0) = 1$) для двухтемпературного случая при $\omega_i \equiv 0$, $q \equiv 0$, $\tilde{\sigma}_0 = 0$. Рассматривались значения параметров электронной теплопроводности ($a = {}^5/_2$, $b = 0$) и скорости обмена энергией между электронами и ионами ($a_1 = {}^3/_2$, $b_1 = 1$) для водородоподобного газа.

На рис. 4 приведены профили безразмерных функций температур $f_e = f_e(s)$, $f_i = f_i(s)$ и плотности $\delta = \delta(s)$ для $\tilde{\varkappa}_e^0 = 50$ и $\tilde{Q}_0 = 0{,}086$. Решение, построенное численным интегрированием системы (1.18)—(1.22) методом Рунге—Кутта (сплошные линии и пунктир, означающий разрыв гидродинамических величин), сравнивается с решением, полученным путем установления соответствующих автомодельных режимов с помощью разностных решений системы уравнений газовой динамики (1.1)—(1.5) при исходных данных, удовлетворяющих условиям автомодельности (маркеры на рис. 4). Разностные решения строились методами, изложенными в работах [107—111]. Видно хорошее совпадение результатов «точного» автомодельного и разностного решений. Численный пример показывает, что от закрепленной стенки ($s = 0$) распространяется температурная волна типа ТВ-I, а сзади ее фронта находится изоэлектронно-термический разрыв. Наличие разрыва гидродинамических величин и потока тепла в этом случае обусловлено не влиянием поршня ($v(0, t) = 0$), а исключительно взаимодействием тепловых и гидродинамических процессов переноса.

На рис. 5 изображены профили $f_e = f_e(s)$, $f_i = f_i(s)$, $\delta = \delta(s)$ и безразмерной скорости $\alpha = \alpha(s)$ при различных значениях постоянной $\tilde{\varkappa}_e^0$, обозначенных цифрами на кривых, и постоянной $\tilde{Q}_0$, связанной с $\tilde{\varkappa}_e^0$ формулой (3.15). Автомодельные решения строились

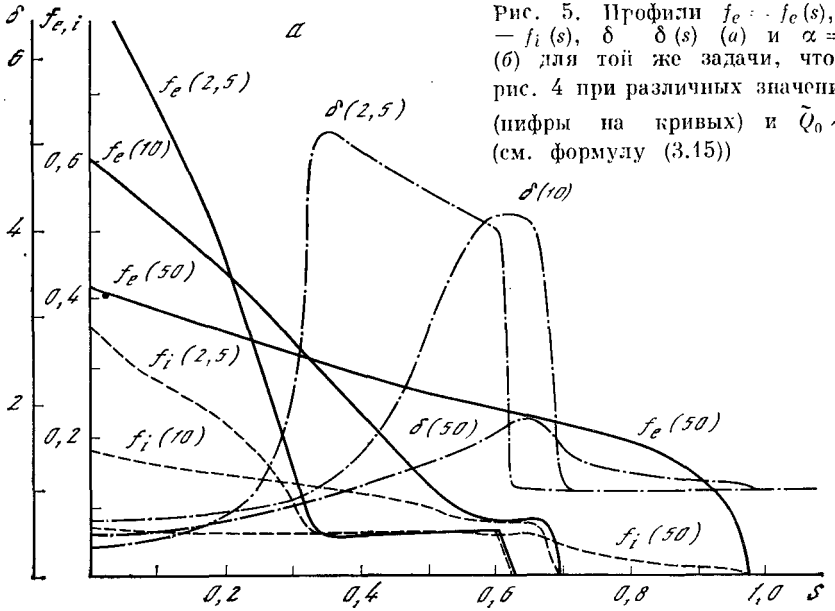
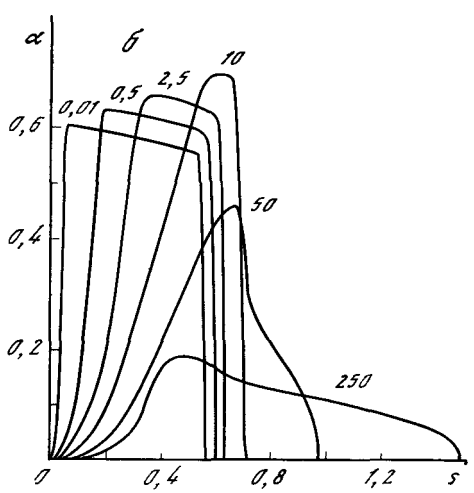


Рис. 5. Профили $f_e = f_e(s)$, $f_i = f_i(s)$, $\delta = \delta(s)$ (*а*) и $\alpha = \alpha(s)$ (*б*) для той же задачи, что и на рис. 4 при различных значениях $\tilde{\varkappa}_e^0$ (цифры на кривых) и $\tilde{Q}_0 \sim \tilde{\varkappa}_e^{0-1}$ (см. формулу (3.15))



указанным выше методом установления. Рис. 5 иллюстрирует смену режимов теплопереноса. Видно, что с ростом $\tilde{\varkappa}_e^0$ режим ТВ-II переходит в режим ТВ-I. При этом в соответствии с формулой (3.15) ($\tilde{Q}_0 \sim 1/\tilde{\varkappa}_e^0$) увеличивается неравенство электронной и ионной компонент температуры.

3.3. Смена различных режимов теплопереноса во времени

Анализ автомодельных решений позволил установить ряд важных свойств движения высокотемпературной плазмы. Показано, что в случае, когда коэффициент теплопроводности обращается в нуль при температуре, равной нулю ($a > 0$), по начальному фону с нулевой температурой и скоростью гидродинамические температурные волны распространяются с конечной скоростью. В глубине фронта ТВ существует изотермический или изоэлектронно-термический разрыв. В зависимости от мощности теплового граничного режима возможно существование различных типов температурных волн — ТВ-I и ТВ-II. При этом в режиме ТВ-I существенным является неравенство электронной и ионной компонент температур. В режиме ТВ-II

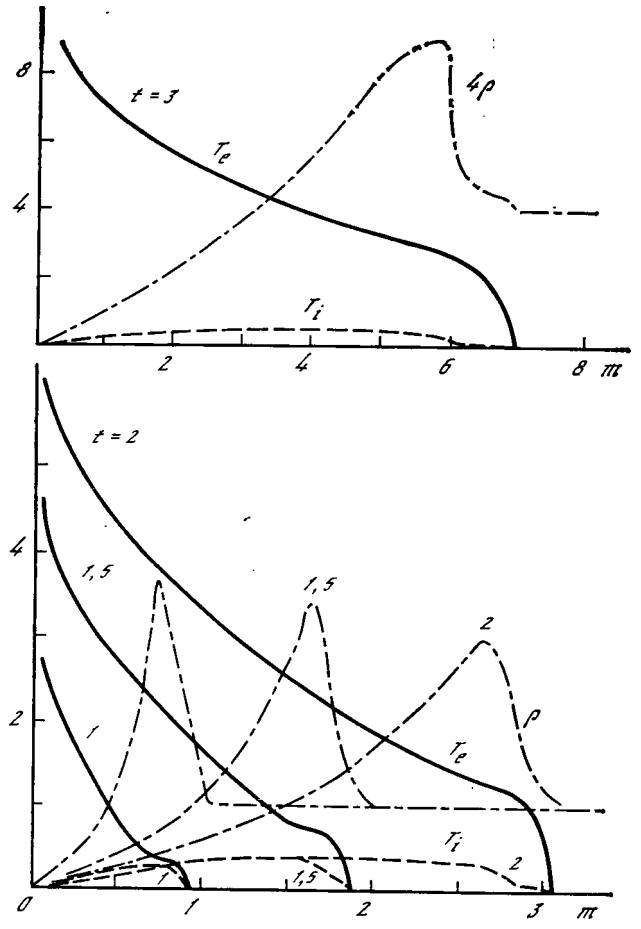


Рис. 6. Профили $T_e = T_e(m)$, $T_i = T_i(m)$ и $\rho = \rho(m)$ для различных моментов времени t при $g = 2$

На начальной стадии $t \leqslant t_*$ имеет место режим ТВ-II, а на асимптотической стадии — режим ТВ-I

в районе фронта тепловой волны и в области движущейся впереди нее ударной волны имеем $T_e \simeq T_i$.

Перечисленные выше свойства проявляются и в общем неавтомодельном случае. Численные эксперименты показывают, что в общем случае различные режимы теплопереноса существуют на различных стадиях процессов по времени. Приведем пример. Плоская задача о разлете плазмы в вакуум (задача (1.1)—(1.6), (1.8), (1.9)), рассматриваемая при условиях $W_i \equiv 0$, $Q \equiv 0$ (ионная теплопроводность и собственное излучение пренебрежимо малы) и $l = 0$ (начальная плотность постоянна), является автомодельной, если выполняются условия

$$g = 3/2\,(a - 1), \qquad a_1 = a - 1 \tag{3.16}$$

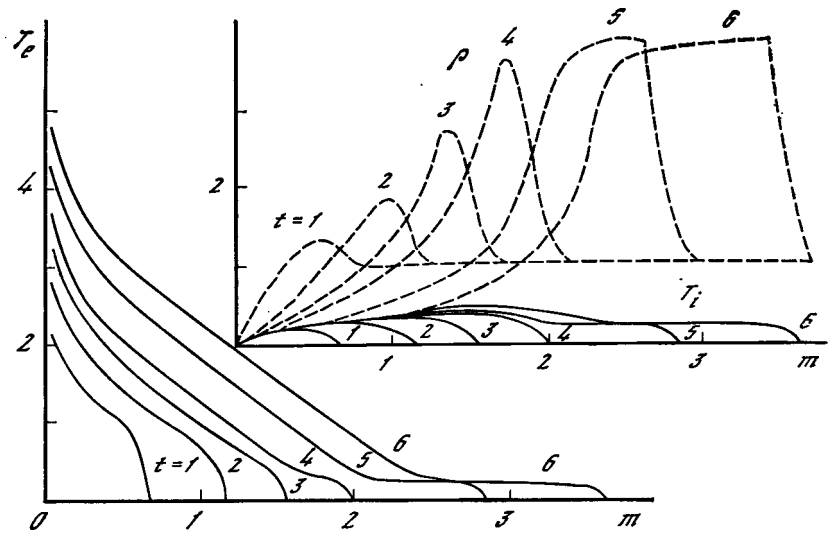


Рис. 7. Профили $T_e = T_e(m)$, $T_i = T_i(m)$ и $\rho = \rho(m)$ для различных моментов времени z при $g = 0$

На начальной стадии по времени ($t \leqslant t_*$) имеет место режим ТВ-I, который при $t_* \backsim 3$ меняется на ТВ-II

(см. условия автомодельности (1.10), (1.11)). При $g \neq 3/(2(a-1))$ решение не является автомодельным. Численные расчеты показывают, что в этом случае в зависимости от изменения значения параметра g качественный характер решения будет различным.

На рис. 6, 7 приводятся результаты численных решений упомянутой выше задачи при различных значениях параметра g и фиксированных значениях остальных параметров: $W_0 = 7{,}5$, $R_0 = 1$, $\varkappa_e^0 = 1$, $\rho_0 = 1$, $\varkappa_i^0 = 0$, $z = 1$, $Q_0 = 1$, $Q_1 = 0$, $\sigma_0 = 0$, $\gamma = {}^5/_3$, $a = {}^5/_2$, $a_1 = {}^3/_2$, $b = 0$, $b_1 = 1$. Указанная задача автомодельна при $g = 1$.

На рис. 6 для случая $g = 2$ ($g > 3/2(a-1) = 1$) представлены профили функций $T_e = T_e(m)$, $T_i = T_i(m)$ и $\rho = \rho(m)$ при различных значениях t, обозначенных цифрами на соответствующих кривых (время приведено в условных единицах). Видно, что в начальной стадии процесса имеет место режим, близкий к ТВ-II. Со временем температурная волна обгоняет ударную. При $t \geqslant 2$ наблюдается типичный режим ТВ-I. Перепад плотностей на ударной волне с ростом t уменьшается, а «отрыв» электронной и ионной компонент температур существенным образом возрастает. Со временем увеличивается масса, охваченная температурной волной.

При $g = 0$ ($g < 3/2(a-1) = 1$, см. рис. 7) на начальной стадии процесса преобладает тепловой прогрев вещества (режим ТВ-I). Фронт ударной волны в рассмотренном примере примерно совпадает с фронтом ТВ, причем изменение плотности в районе фронта разрыва невелико. В момент времени $t = t_* \simeq 3$ ударная волна обгоняет тем-

пературную и движется быстрее ТВ. За фронтом ТВ плотность меняется резко: решение выходит на режим теплопереноса ТВ-II. При этом отношение T_e/T_i в районе фронта разрыва с ростом t стремится к единице.

Анализ показывает, что в случае, когда режим ТВ-II существует, на асимптотической стадии в области, охваченной дозвуковой тепловой волной, решение рассматриваемой задачи с течением времени выходит на автомодельный режим, получаемый в упомянутом во введении приближении $\rho_0 = \infty$. Установление асимптотического автомодельного режима в приведенном выше примере для случая $g = 0$ (см. рис. 7) иллюстрирует рис. 8, на котором представлены профили соответствующих безразмерных функций температур $f_e = f_e(s)$ и $f_i = f_i(s)$ и плотности $\delta = \delta(s)$. Указанная задача в целом не является автомодельной. Однако, как следует из рис. 8, в районе температурной волны, распространяющейся в режиме ТВ-II (область A, $0 \leqslant s \leqslant s_1$, на рис. 8), со временем устанавливается автомодельный режим типа $\rho_0 = \infty$.

Физический смысл указанного автомодельного режима можно пояснить следующим образом [40, 73, 74]. В случае, когда имеет место режим ТВ-II, плотность газа в области, находящейся позади фронта температурной волны и разлетающейся в вакуум, значительно меньше плотности газа впереди фронта ТВ. Поэтому, рассматривая решение задачи в области $0 \leqslant m \leqslant m_1$, где $m_1 = m_1(t)$ — фронт температурной волны в режиме ТВ-II ($W(m_1, t) = 0$), можно предположить, что при $m = m_1$ плотность бесконечна, т. е. $\rho(m_1, t) = \infty$. Кроме того, можно пренебречь значением скорости газа вблизи фронта ТВ по сравнению со скоростью вблизи границы газа с вакуумом (в газодинамическом приближении $v(0, t) = -\infty$) и считать $v(m_1, t) = 0$. При $\rho_0 = \infty$ и $T_e \equiv T_i$ рассматриваемая задача (1.1)—(1.6), (1.8), (1.9) является автомодельной при произвольном значении параметров a, g и b. При $T_e \neq T_i$, $a_1 = {}^3/_2$ указанная задача будет являться автомодельной, если выполняются условия вида

$$g[b_1(2a - 5) - 3(1 - b - b_1)] + 2a - 5 + 3(1 - b - b_1) = 0. \tag{3.17}$$

Условие (3.17) тождественно выполняется при произвольном g, если $a = {}^5/_2$, $b + b_1 = 1$. Подробный анализ автомодельных решений типа $\rho_0 = \infty$ проведен в работах [40, 73, 74]. В этих же работах получена оценка времени смены различных режимов теплопереноса в зависимости от изменения показателя g в граничном условии $W(0, t) = W_0 t^g$ и других параметров задачи. Момент времени смены режимов определяется приближенной формулой

$$t = t_* \simeq \varkappa_0^{2/n_2}, \tag{3.18}$$

где $n_2 = [2(a - 1)g - 3]/\psi_0$; $\psi_0 = 2a + 1 - 3b \neq 0$;

$$\varkappa_0 = \frac{2\sqrt{0{,}5(\gamma + 1)\beta_1}}{s_1(n_0 + n_2 + 2)} \rho_0^{1/2} [R_0^{3(a+2)} (\varkappa_e^0)^{-3} W_0^{-2(a-1)}]^{0{,}5/\psi_0}. \tag{3.19}$$

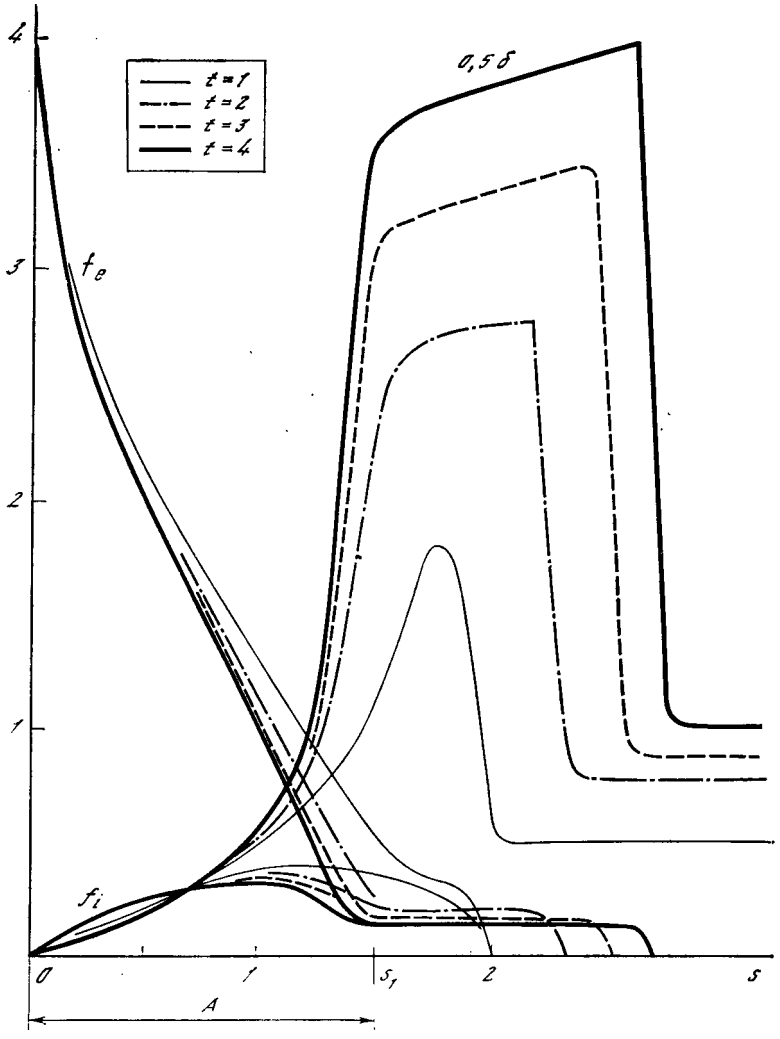


Рис. 8. Установление асимптотического автомодельного режима типа $\rho_0 = \infty$ для случая $g = 0$ (см. рис. 7) в области температурной волны, распространяющейся в режиме ТВ-II (область A: $0 \leqslant s \leqslant s_1$)

Постоянные β_1 и s_1 в формуле (3.19), которые определяются из автомодельного решения типа $\rho_0 = \infty$, выражают соответственно давление на фронте и положение фронта температурной волны, распространяющейся в режиме ТВ-II. Анализ показывает, что при $n_2 < 0$ ($g < 3/2(a - 1)$) режим ТВ-II имеет место при $t > t_*$, т. е. на асимптотической стадии процесса нагрева и разлета. В начальной стадии имеет место режим ТВ-I.

В случае $n_2 = 0$ (т. е. при условии (3.16)) задача имеет рассмотренное ранее «точное» автомодельное решение. Смена режимов определяется условием $\chi_0 > 1$, которое сводится к установленному из анализа точных автомодельных решений условию существования режима ТВ-II. При $a = {}^5/_2$, $b = 0$, $l = 0$, $\nu = 0$ это условие имеет вид

$$\varkappa_e^0 = \varkappa_e^0 W_0/(R_0^{7/2}\rho_0^2) < \tilde{\varkappa}_*, \tag{3.20}$$

где постоянная $\tilde{\varkappa}_*$ определяется из соответствующих автомодельных решений.

Заметим, что результаты численных расчетов удовлетворительно согласуются с результатами, полученными из анализа асимптотического автомодельного решения типа $\rho_0 = \infty$. Так, из приведенного выше численного примера для $g = 0$ (см. рис. 7) имеем $t_* \simeq 3$. По формуле (3.18), (3.19) получим, что режим ТВ-II возникает при $t = t_* \simeq 2{,}61$.

4. Автомодельные решения уравнений трехтемпературной газодинамики

В настоящем разделе с помощью автомодельных решений системы уравнений трехтемпературной газодинамики (1.1)—(1.6), (1.12)—(1.14) исследуется влияние на процессы, происходящие в высокотемпературной плазме, собственного теплового излучения. Как и в разделе 2.3, качественные особенности решений выясним путем анализа соответствующей системы в автомодельных переменных в окрестности ее точек, выделенных каким-либо характерным свойством (фронт температурной волны, фронт разрыва и др.). При этом ограничимся задачей о движении газа перед поршнем (граничные условия (1.7), (1.15) и соответственно (1.27), (1.30)) для случая плоской симметрии ($\nu = 0$).

4.1. Асимптотическое решение в окрестности фронта газодинамической температурной волны

Мы покажем возможность существования в трехтемпературной газодинамике тепловых волн конечной скорости, если построим асимптотическое решение системы (1.18)—(1.24) в окрестности $s = s_0 \neq \infty$, удовлетворяющее условиям «начального фона»:

$$\alpha(s_0) = f_e(s_0) = f_i(s_0) = f_r(s_0) = \omega_e(s_0) = \omega_i(s_0) = \omega_r(s_0) = 0,$$
$$\delta(s_0) = s_0'. \tag{4.1}$$

Положим $x = s_0 - s$, $\bar{\delta} = \delta - \delta_0$, $\delta_0 = s_0'$, где x и $\bar{\delta}$ — малые величины. Рассмотрим систему уравнений (1.18)—(1.24) при $\nu = 0$ вблизи точки с координатой $s = s_0$ ($x = 0$), отбрасывая члены высокого порядка малости. Часть уравнений системы интегрируется.

Гидродинамические величины в окрестности $x = 0$ имеют вид

$$\delta = \delta_0 + \frac{\delta_0^2}{n^2 s_0^2}\left(z\delta_0 f_e + \delta_0 f_i + \frac{1}{3}\sigma_0 f_r^4 + \frac{6n_0 n s_0}{\delta_0}x + \ldots\right), \tag{4.2}$$

$$\alpha = \frac{1}{ns_0}\left(z\delta_0 f_e + \delta_0 f_i + \frac{1}{3}\tilde{\sigma}_0 f_r^4 + \ldots\right). \tag{4.3}$$

Учитывая, что $a_1 \geqslant a_2 + 1$, и формулы (4.2), (4.3), уравнения энергии для каждой компоненты f_e, f_i, f_r вблизи $x = 0$ с точностью до главных членов можно записать в следующем виде:

$$\frac{nz}{\gamma - 1}s_0\frac{df_e}{dx} - \frac{z\delta_0^2}{ns_0}f_e\frac{df_i}{dx} - \frac{4}{3}\tilde{\sigma}_0\frac{z\delta_0}{ns_0}f_e f_r^3\frac{df_r}{dx} - \frac{d\omega_e}{dx} - q_{ie} + \ldots = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{n}{\gamma - 1}s_0\frac{df_i}{dx} - \frac{z\delta_0^2}{ns_0}f_i\frac{df_e}{dx} - \frac{4}{3}\tilde{\sigma}_0\frac{\delta_0}{ns_0}f_i f_r^3\frac{df_r}{dx} - \frac{d\omega_i}{dx} + q_{ie} + \ldots = 0, \tag{4.5}$$

$$4n\tilde{\sigma}_0 s_0\delta_0^{-1}f_r^3\frac{df_r}{dx} - \frac{4}{3}\frac{\tilde{\sigma}_0\delta_0}{ns_0}f_r^4\left(z\frac{df_e}{dx} + \frac{df_i}{dx}\right) - \frac{d\omega_r}{dx} + q_{re} + \ldots = 0, \tag{4.6}$$

где

$$q_{ie} = \tilde{Q}_0\delta_0^{b_1}f_e^{-a_1}(f_i - f_e) + \ldots, \quad q_{re} = \tilde{Q}_1\delta_0^{b_2}f_e^{-a_2}(f_r - f_e) + \ldots$$

Выберем за независимую переменную f_e и представим ионную и фотонную компоненты температуры вблизи $x = 0$, $f_e = 0$ в виде степенных функций электронной компоненты:

$$f_i = F_0 f_e^{r_0} + \ldots, \quad f_r = \Phi_0 f_e^{r_1} + \ldots, \tag{4.7}$$

где $F_0 > 0$, $\Phi_0 > 0$, $r_0 > 0$, $r_1 > 0$ — постоянные, подлежащие определению. Используя (4.7), уравнения (4.4)—(4.6) с точностью до главных членов можно записать в виде

$$\frac{nz}{\gamma - 1}s_0 - \frac{d\omega_e}{df_e} - \delta_0^{b+b_1+1}\tilde{Q}_0\tilde{\varkappa}_e^0 f_e^{a-a_1+1}(F_0 f_e^{r_0-1} - 1)\omega_e^{-1} + \ldots = 0, \tag{4.8}$$

$$\frac{n}{\gamma - 1}s_0 F_0 r_0 f_e^{r_0-1} - \frac{d\omega_i}{df_e} + \delta_0^{b+b_1+1}\tilde{Q}_0\tilde{\varkappa}_e^0 f_e^{a-a_1+1}(F_0 f_e^{r_0-1} - 1)\omega_e^{-1} + \ldots = 0, \tag{4.9}$$

$$4n\tilde{\sigma}_0 s_0\delta_0^{-1}\Phi_0^4 r_1 f_e^{4r_1-1} - \frac{d\omega_r}{df_e} + \delta_0^{b+b_2+1}\tilde{Q}_1\tilde{\varkappa}_e^0 f_e^{a-a_2+1}(\Phi_0 f_e^{r_1-1} - 1)\omega_e^{-1} + \ldots = 0. \tag{4.10}$$

Из уравнений (1.22), (1.24), определяющих потоки тепла, получим вблизи $x = 0$, $\omega_e = 0$

$$dx/df_e = \varkappa_e^0\delta_0^{b+1}f_e^{\gamma}\omega_e^{-1} + \ldots, \tag{4.11}$$

$$\omega_i = \Psi_0\omega_e f_e^{(a+1)(r_0-1)} + \ldots, \tag{4.12}$$

$$\omega_r = \Psi_1 \omega_e f_e^{r_1(a_3+1)+c-a-1} + \ldots, \qquad (4.13)$$

где $\Psi_0 = \frac{\tilde{\varkappa}_i^0}{\tilde{\varkappa}_e^0} F_0^{a+1} r_0$, $\Psi_1 = \frac{\tilde{\varkappa}_r^0}{\tilde{\varkappa}_e^0} \delta_0^{b_3-b} \Phi_0^{a_3+1} r_1$ — постоянные.

Решение уравнений (4.8), (4.9), (4.11), (4.12) определяется независимо от выражения фотонной температуры f_r в окрестности $x = 0$, $f_e = 0$. Как упоминалось выше, анализ, проведенный в работах [47, 105], показал, что формально вблизи начального фона (4.1) возможны различные виды асимптотических решений, приводящие соответственно к условиям $r_0 > 1$ ($f_i \ll f_e$ вблизи $x = 0$, $f_e = 0$), $r_0 = 1$ ($f_i \sim f_e$) и $r_0 > 1$ ($f_i \gg f_e$ в окрестности $x = 0$, $f_e = 0$). Численные эксперименты показали, что в случае полностью ионизованного газа, для которого выполняются условия $\varkappa_i^0 \ll \varkappa_e^0$, вблизи фронта температурной волны при $a - a_1 > 0$, $a > 0$ реализуется условие $f_i \ll f_e$. В этом случае из уравнений (4.8), (4.9), (4.11), (4.12) с точностью до главных членов получим асимптотические выражения для функций f_e, f_i, ω_e, ω_i вблизи $x = 0$, совпадающие с (2.14), (2.16), (2.19) ($\nu = 0$):

$$f_e = \left(\frac{anzs_0}{\tilde{\varkappa}_e^0 \delta_0^{b+1} (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{a}} x^{\frac{1}{a}} + \ldots, \quad \omega_e = \frac{nz}{\gamma - 1} s_0 f_e + \ldots,$$

$$f_i = F_0 f_e^{a-a_1+1} + \ldots, \quad \omega_i = \Psi_0 \frac{nz}{\gamma - 1} s_0 f_e^{1+(a-a_1)(a+1)} + \ldots, \qquad (4.14)$$

где $F_0 = \frac{\tilde{Q}_0 \varkappa_e^0 (\gamma - 1)^2 \delta_0^{b_1+b+1}}{n^2 z s_0 (a - a_1 + 1)}$ — постоянная.

Подставляя (4.13) в (4.10) и учитывая выражение для потока тепла, обусловленного электронной теплопроводностью, из (4.14) получим следующее соотношение, определяющее в общем случае значения постоянных Φ_0 и r_1 вблизи $x = 0$, $f_e = 0$:

$$4n\tilde{\sigma}_0 s_0 \delta_0^{-1} \Phi_0^4 r_1 f_e^{4r_1-1} - \frac{nr_1}{\gamma - 1} [r_1 (a_3 + 1) + c - a] \times$$
$$\times \frac{\tilde{\varkappa}_r^0}{\tilde{\varkappa}_e^0} \delta_0^{b_3-b} \Phi_0^{a_3+1} z s_0 f_e^{r_1(a_3+1)+c-a-1} + \delta_0^{b+b_2+1} \tilde{Q}_1 \tilde{\varkappa}_e^0 \frac{\gamma - 1}{nzs_0} f_e^{a-a_2} (\Phi_0 f_e^{r_1-1} - 1) = 0. \qquad (4.15)$$

Из (4.15) видно, что в зависимости от соотношения между параметрами a, a_3, c и a_2 значения постоянных r_1 и Φ_0 могут быть различными. В частности, для параметров водородоподобного газа $a = 5/2$, $a_3 = 6$, $c = 1/2$, $a_2 = 1/2$ получим из (4.15)

$$\Phi_0 = \left[\frac{3}{4} \frac{\tilde{\sigma}_0 \tilde{\varkappa}_e^0}{\tilde{\varkappa}_r^0} \delta_0^{b-b_3-1} \frac{\gamma - 1}{z} \left(1 + \sqrt{1 + \delta_0^{b_3+b_2+3} \frac{\tilde{Q}_1 \tilde{\varkappa}_r^0}{n^2 s_0^2 \tilde{\varkappa}_0^2}} \right) \right]^{1/3}, \qquad (4.16)$$

$$r_1 = \frac{2}{3}, \quad \omega_r = \frac{2}{3} \frac{\tilde{\varkappa}_r^0}{\tilde{\varkappa}_e^0} \frac{\delta_0^{b_3-b} nzs_0}{\gamma - 1} \Phi_0^3 f_r^4 + \ldots \qquad (4.17$$

4.2. Изотермический разрыв. Численные примеры различных типов температурных волн

1. Аналогично двухтемпературному случаю, рассмотренному в разделе 2 настоящей работы, можно показать, что в области между поршнем ($s = 0$) и фронтом температурной волны ($s = s_0$) газодинамические величины и потоки тепла могут претерпевать разрыв. Действительно, разрешая некоторые из уравнений системы (1.18)—(1.24) относительно производных, получаем уравнения

$$f_{e,\,i}' = F_{e,\,i} = -(\tilde{\varkappa}_{e,\,i}^0)^{-1}\omega_{e,\,i} f_{e,\,i}^{-a_i}\delta^{-b-1}, \quad f_r' = F_r = -(\tilde{\varkappa}_r^0)^{-1}\omega_r f_r^{-a_3} f_e^{-c}\delta^{-b_3-1}, \tag{4.18}$$

а также уравнение вида

$$\delta' = \chi/\Delta, \tag{4.19}$$

где

$$\Delta = \frac{n^2 s^2}{\delta^2} - zf_e - f_i, \quad \chi = \delta\left(zF_e + F_i + \frac{4}{3}\tilde{\sigma}_0 f_r^3 F_r\right) + n_0\alpha - 3n_0 n\frac{s}{\delta}. \tag{4.20}$$

Производные остальных величин пропорциональны δ'. Оценивая далее знаки комбинации $\Delta = n^2s^2/\delta^2 - zf_e - f_i$, получим, что в окрестности $s = s_0$ всегда выполняется условие $\Delta > 0$, а при $s = 0$ величина Δ отрицательна. Аналогично предыдущему можно показать, что в случае, когда интегральные кривые не проходят через точку, в которой одновременно выполняется условие $\Delta = 0$, $\chi = 0$ («звуковая точка» системы), переход из области $\Delta > 0$ в область $\Delta < 0$ или наоборот можно осуществить через разрыв во всех функциях, кроме температур f_e, f_i и f_r. Изотермический разрыв находится в некоторой точке с координатой $s = s_1$, $0 < s_1 < s_0$, причем перед разрывом имеем $D_{л1} > c_1$, а позади него — $D_{л2} < c_1$, где $D_{л1}$ и $D_{л2}$ — лагранжевы скорости впереди и позади разрыва, $c_1 = [R_0(zT_{e1} + T_{i1})]^{1/2}$ — местная изотермическая скорость звука. Параметр $s = s_1$, так же как координата $s = s_0$, характеризующая положение фронта температурной волны, определяется с помощью численного решения рассматриваемых автомодельных задач.

2. Численные расчеты показывают, что аналогично случаю $Q \equiv 0$ в зависимости от изменения безразмерных постоянных, например параметра $\varkappa_e^0$, в теплопроводной излучающей среде могут существовать два качественно различных режима распространения тепла. При больших значениях $\varkappa_e^0$ имеет место распределение газодинамических и тепловых величин, типичное для режима ТВ-I — режима сверхзвукового прогрева с разрывом, расположенным в глубине фронта температурной волны. При малых $\varkappa_e^0$ имеет место режим ТВ-II: в этом режиме температурная волна распространяется по фону, наведенному ударной волной, со скоростью меньшей скорости звука.

Анализ размерностей позволяет оценить в каждом из упомянутых выше режимов влияние на распределение искомых величин различных безразмерных параметров задачи.

Предположим, что свойства вещества (постоянные R_0, σ_0, $\varkappa^0_{e,i,r}$, Q_0 и Q_1), а также параметр ρ_0 фиксированы, а безразмерная постоянная меняется за счет изменения множителя W_0 в формуле для потока тепла $W_e(0, t) = W_0 t^g$, заданного на границе газа с поршнем. Тогда из формул (1.25) с учетом условий автомодельности (1.10), (1.11), (1.16) получим, что остальные безразмерные постоянные, входящие в систему уравнений (1.18)—(1.24), и граничные условия (1.27)—(1.30) будут меняться пропорционально следующим степеням параметра $\varkappa^0_e$:

$$\tilde{\sigma}_0 \sim (\tilde{\varkappa}^0_e)^{\frac{6}{2a-1}},\quad \tilde{\varkappa}^0_i = \frac{\varkappa^0_i}{\varkappa^0_e}\tilde{\varkappa}^0_e,\quad \tilde{\varkappa}^0_r \sim (\tilde{\varkappa}^0_e)^{\frac{2a_3+2c-1}{2a-1}},$$

$$\tilde{Q}_0 \sim (\tilde{\varkappa}^0_e)^{-\frac{2a_1+1}{2a-1}},\quad \tilde{Q}_1 \sim (\tilde{\varkappa}^0_e)^{-\frac{2a_2+1}{2a-1}}, \tag{4.21}$$

$$\alpha_0 \sim (\tilde{\varkappa}^0_e)^{-\frac{6(1-l)}{(6-7l)(2a-1)}},\quad \omega^0_{i,r} \sim (\tilde{\varkappa}^0_e)^{-\frac{6(3-2l)}{(6-7l)(2a-1)}}.$$

Из соотношений (4.21) следует, что при условиях $a > 1/2$, $a_3 + c > 1/2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ с ростом $\varkappa^0_e$ параметры $\tilde{Q}_0$ и $\tilde{Q}_1$ уменьшаются, а постоянная $\varkappa^0_r$ увеличивается. Это показывает, что в режиме ТВ-I, который существует при больших значениях $\varkappa^0_e$, неравенство различных компонент температур должно быть существенно большим, чем в режиме ТВ-II. При этом с ростом $\tilde{\varkappa}^0_e$ увеличивается глубина прогрева среды при переносе тепла, обусловленного лучистой теплопроводностью.

При значениях показателей зависимости коэффициентов переноса от температур вида (1.31) из условий автомодельности (1.10), (1.11), (1.16) получим

$$b = (3 - 2l)/3l,\ b_3 = (1 - 2l)/l,\ b_1 = (5l - 3)/3l,\ l \neq 0, \tag{4.22}$$
$$g = 9l/(6 - 7l),\ n_0 = 2l/(6 - 7l),\ n = 6/(6 - 7l),\ l < 6/7,$$

а безразмерные постоянные (4.21) следующим образом зависят от параметра $\tilde{\varkappa}^0_e$:

$$\tilde{\sigma}_0 \sim (\tilde{\varkappa}^0_e)^{1,5},\quad \tilde{\varkappa}^0_i \sim \tilde{\varkappa}^0_e,\quad \tilde{\varkappa}^0_r \sim (\tilde{\varkappa}^0_e)^3,\quad \tilde{Q}_0 \sim (\tilde{\varkappa}^0_e)^{-1},\quad \tilde{Q}_1 \sim (\tilde{\varkappa}^0_e)^{-1/2}. \tag{4.23}$$

Приведем теперь ряд численных примеров, иллюстрирующих упомянутые выше свойства трехтемпературной плазмы. Примеры строились путем решения исходной системы уравнений в частных производных (1.1)—(1.6), (1.12)—(1.14) разностными методами в случае, когда выполнены условия автомодельности (1.10), (1.11) до установления соответствующих автомодельных режимов. Для расчетов использовались значения показателей зависимости коэффи-

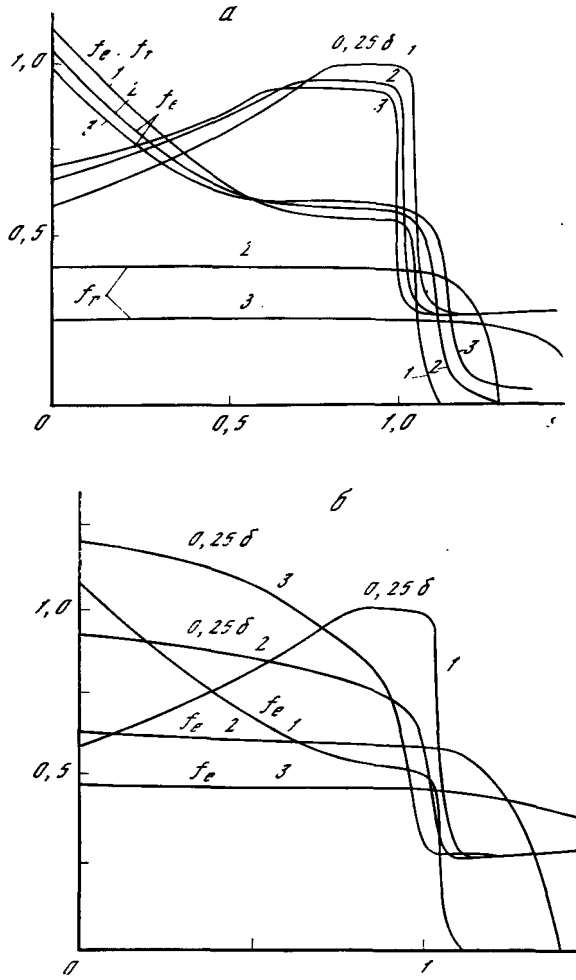


Рис. 9. Автомодельные профили функций $f_e = f_e(s)$, $f_r = f_r(s)$ и $\delta = \delta(s)$ при различных значениях постоянных $\tilde{\varkappa}_r^0$ (*а*) и функций $f_e = f_e(s)$ и $\delta = \delta(s)$ при различных $\tilde{\varkappa}_e^0$ (*б*)

а: $\tilde{\varkappa}_r^0 = 10^{-1}$ (*1*), 10^3 (*2*), 10^5 (*3*);

б: $\tilde{\varkappa}_e^0 = 10^{-1}$ (*1*), 10^1 (*2*), 10^2 (*3*). Остальные постоянные фиксированы

циентов переноса от температуры вида (1.31), значения $\gamma = 5/3$, $z = 1$ и параметры (4.22) при $l = 1/2$.

На рис. 9, *а* приведены профили $f_e = f_e(s)$, $f_r = f_r(s)$ и $\delta = \delta(s)$ при различных значениях постоянной $\tilde{\varkappa}_r^0$ в коэффициенте лучистой теплопроводности и фиксированных прочих константах. При $\tilde{\varkappa}_r^0 = 10^{-1}$ во всей области имеем $f_r \simeq f_e$, причем температурная волна распространяется в режиме ТВ-II. При увеличении $\tilde{\varkappa}_r^0$ условно можно выделить две тепловые волны: одна, обусловленная электронной теплопроводностью (см. профили f_r), движется в режиме ТВ-II, другая, обусловленная лучистой теплопроводностью (см. профили f_e), распространяется в режиме ТВ-I. При этом скорость фронта последней возрастает с увеличением параметра $\tilde{\varkappa}_r^0$.

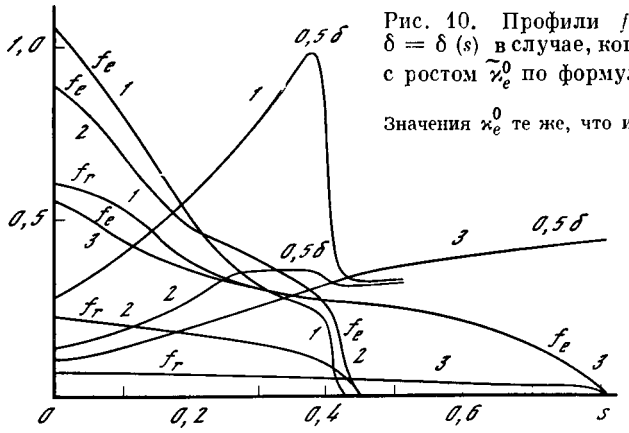


Рис. 10. Профили $f_e = f_e(s)$, $f_r = f_r(s)$ и $\delta = \delta(s)$ в случае, когда константы меняются с ростом $\tilde{\varkappa}_e^0$ по формулам (4.23)

Значения $\varkappa_e^0$ те же, что и на рис. 9, *б*

На рис. 9, *б* изображены профили $f_e = f_e(s)$ и $\delta = \delta(s)$ при различных значениях постоянной $\tilde{\varkappa}_e^0$. Остальные параметры фиксированы. Видно, что с ростом $\tilde{\varkappa}_e^0$ осуществляется переход режима ТВ-II в режим ТВ-I. В рассмотренном примере фотонная температура практически совпадает с электронной.

На рис. 10 представлены профили функций f_e, f_r и δ для различных значений $\tilde{\varkappa}_e^0$ и прочих значениях безразмерных постоянных, изменяющихся с ростом $\tilde{\varkappa}_e^0$ по формулам (4.23). Цифрами обозначены те же значения $\tilde{\varkappa}_e^0$, что и в предыдущем примере. Видно, что с ростом $\tilde{\varkappa}_e^0$ режим ТВ-II переходит в ТВ-I, причем в соответствии с формулами (4.23) фотонная температура f_r в области прогрева становится существенно меньше электронной f_e.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А.* О математическом моделировании и вычислительном эксперименте в физике.— Вестн. АН СССР, 1979, № 5, с. 38—49.
2. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
3. *Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В.* Теория точечного взрыва. М.; Физматгиз, 1961. 332 с.
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
5. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
6. *Черный Г. Г.* Задача о точечном взрыве.— Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 2, с. 213—216.
7. *Коробейников В. П.* Задачи теории точечного взрыва в газах. М.: Наука, 1973. 278 с. (Тр. МИАН СССР; Т. 119).
8. *Черный Г. Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
9. *Забабахин Е. И.* Кумуляция энергии и ее границы.— Успехи физ. наук, 1965, т. 85, № 4, с. 721—726.
10. *Guderley G.* Starke kugeliche und zylindrische Verdichtungstobe in der Nähe des Kugerlmittelpunktes bzw. der Zylinderasche.— Luftfahrt-Forschungsber., 1942, Bd. 19, Lfg. 9, S. 302—313.
11. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.

12. *Брушлинский К. В., Каждан Я. М.* Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики.— Успехи мат. наук, 1963, т. 18, № 2, с. 3—23.
13. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
14. *Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б.* Промежуточные асимптотики в математической физике.— Успехи мат. наук, 1971, т. 26, № 2 с. 115—129.
15. *Крашенинникова Н. Л.* О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем.— Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 8, с. 22—36.
16. *Кочина П. П., Мельникова П. С.* О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем без учета противодавления.— Прикл. математика и механика, 1958, т. 22, вып. 4, с. 444—451.
17. *Григорян С. С.* Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные решения).— Прикл. математика и механика, 1958, т. 22, вып. 2, с. 179—187.
18. *Волосевич П. П., Леванов Е. И., Схиртладзе Н. М., Лацабидзе Г. С.* Движение поршня с ускорением и замедлением в среде с объемными стоками массы: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 92. М., 1976. 30 с.
19. *Леванов Е. И.* Автомодельные задачи о движении поршня в среде с источниками и стоками.— В кн.: Математические модели, аналитические и численные методы в теории переноса: Сб. науч. тр./Под ред. Самарского А. А. Минск: ИТМО АН БССР, 1982, с. 40—50.
20. *Волосевич П. П., Дарьин Н. А., Леванов Е. И.* Задача о поршне в газе с источниками энергии.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1983, т. 23, № 3, с. 693—701.
21. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла для теплопроводности, зависящей от температуры.— В кн.: Сборник, посвященный семидесятилетию академика А. Ф. Иоффе.— М.: Изд-во АН СССР, 1950, с. 61—71.
22. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.— Прикл. математика и механика, 1952, т. 16, вып. 1, с. 67—78.
23. *Баренблатт Г. И.* Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде.— Прикл. математика и механика, 1952, т. 16, вып. 6, с. 679—699.
24. *Баренблатт Г. И., Вишик И. М.* О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа.— Прикл. математика и механика, 1956, т. 20, вып. 3, с. 411—417.
25. *Marschak R.* An influence of the radiation of the behaviour of the schok waves.— Phys. Fluids, 1958, N 1, p. 24—29.
26. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
27. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юйлинь.* Уравнения типа нестационарной фильтрации.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, т. 22, № 5, с. 667—704.
28. *Калашников А. С.* Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений.— Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1972, № 6, с. 45—49.
29. *Самарский А. А., Соболь И. М.* Примеры численного расчета температурных волн.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1963, т. 3, № 4, с. 703—719.
30. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.* Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы.— Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 6, с. 1306—1309.
31. *Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6, с. 1344—1347.
32. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.* N- и S-режимы автомодельного сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1977, № 1, с. 3—23.
33. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 32, с. 349—353.

34. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826—1841.
35. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.— В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217—243.
36. *Волосевич П. П., Курдюмов С. П., Бусурина Л. Н., Крус В. П.* Решение одномерной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроводном газе.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1963, т. 3, № 1, с. 159—169.
37. *Неуважаев В. Е.* Распространение сферической взрывной волны в теплопроводном газе.— Прикл. математика и механика, 1962, т. 26, вып. 6, с. 1094—1099.
38. *Самарский А. А., Курдюмов С. П., Волосевич П. П.* Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, т. 5, № 2, с. 199—217.
39. *Неуважаев В. Е.* Истечение газа в вакуум при степенном законе температуры на границе.— Прикл. математика и механика, 1966, т. 30, вып. 6, с. 1015—1021.
40. *Волосевич П. П., Курдюмов С. П., Леванов Е. И.* Различные режимы теплового нагрева при взаимодействии мощного потока излучения с веществом.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1972, № 5, с. 41—48.
41. *Неуважаев В. Е.* Неадиабатические движения в идеальном газе (автомодельные движения).— Тр. МИАН СССР, 1973, т. 122, с. 24—51.
42. *Лукьянова Р. Г., Фадеев С. И.* Автомодельные решения уравнения Навье—Стокса для полностью ионизованной водородной плазмы (задача о плоском поршне).— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1969, № 3, с. 34—39.
43. *Анисимов С. И.* Автомодельная тепловая волна в двухтемпературной плазме.— Письма в ЖЭТФ, 1970, т. 12, вып. 8, с. 414—416.
44. *Волосевич П. П., Леванов Е. И.* О некоторых автомодельных движениях двухтемпературной плазмы.— В кн.: Тепло- и массоперенос: Общие вопросы теории тепло- и массообмена. Минск: ИТМО АН БССР, 1972, т. 8, с. 29—35.
45. *Волосевич П. П., Леванов Е. И.* Решение автомодельной задачи об истечении газа в вакуум в двухтемпературном гидродинамическом приближении.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1975, т. 15, № 3, с. 702—712.
46. *Волосевич П. П., Леванов Е. И.* Некоторые автомодельные задачи газовой динамики с учетом дополнительных нелинейных эффектов.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 7, с. 1200—1213.
47. *Волосевич П. П., Даутов Р. Г., Ермолин Е. В.* и др. Автомодельная задача об одномерном поршне в двухтемпературной газодинамике: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 113. М., 1981. 27 с.
48. *Волосевич П. П.* Автомодельные решения задач двухтемпературной газовой динамики и магнитной гидродинамики: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 205. М., 1982. 30 с.
49. *Немчинов И. В.* Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1960, № 1, с. 36—57.
50. *Афанасьев Ю. В., Кроль В. М., Крохин О. Н., Немчинов И. В.* Газодинамические процессы при нагревании вещества излучением лазера.— Прикл. математика и механика, 1966, т. 30, вып. 6, с. 1022—1028.
51. *Букчин Б. Г., Леванов Е. И.* Задача о разлете в вакуум нетеплопроводного газа, поглощающего лазерное излучение: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 15. М., 1971. 26 с.
52. *Волосевич П. П., Леванов Е. И.* Некоторые автомодельные задачи нагрева и динамики плотной высокотемпературной плазмы.— В кн.: Численные методы в физике плазмы/Под ред. Самарского А. А. М.: Наука, 1977, с. 89—99.
53. *Волосевич П. П., Леванов Е. И., Маслянкин В. И.* Автомодельные движения плазмы при учете зависимости коэффициента поглощения от потока излучения: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 66. М., 1978. 28 с.

54. *Волосевич П. П., Леванов Е. И., Маслянкин В. И.* Бегущие волны в теплопроводной поглощающей среде: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 55. М., 1980. 17 с.
55. *Силин В. П.* Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М.: Наука, 1973. 287 с.
56. *Пустовалов В. В., Силин В. П., Тихончук В. Т.* Квазилинейная теория параметрически неустойчивой многоактивной плазмы.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1973, т. 64, с. 843—855.
57. *Hanin M.* On Rayileigh's problems compressible fluids.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1960, vol. 13, N 2, p. 184—195.
58. *Курдюмов С. П.* Бегущие температурно-газодинамические волны, движущиеся по фону с постоянным давлением: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 45. М., 1971. 32 с.
59. *Курдюмов С. П.* Изучение взаимодействия гидродинамических и нелинейных тепловых процессов с помощью бегущих волн: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 55. М., 1971. 45 с.; № 56, 48 с.
60. *Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Волосевич П. П.* и др. Нагрев дейтериевотритиевой плазмы до термоядерных температур с помощью излучения ОКГ: Препр. ФИАН СССР № 66. М., 1972. 70 с.
61. *Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Леванов Е. И.* и др. Процесс сверхвысокого сжатия вещества и инициирование термоядерной реакции мощным импульсом лазерного излучения.— Физика плазмы, 1976, т. 2, вып. 6, с. 883—897.
62. *Волосевич П. П., Леванов Е. И.* Анализ основных характеристик лазерной плазмы с помощью решения плоских автомодельных задач.— В кн.: Материалы объединенного семинара по вычислительной физике (Сухуми, 1973). Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1976, с. 89—109.
63. *Боголюбский С. Л., Герасимов Б. П., Попов Ю. П.* и др. Нагрев тонких фольг сильноточным пучком электронов.— Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 24, вып. 4, с. 202—206.
64. *Боголюбский С. Л., Герасимов Б. П., Ликсонов В. Н.* и др. Выход термоядерных нейтронов из плазмы, сжимаемой оболочкой.— Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 24, вып. 4, с. 206—209.
65. *Розанов В. Б., Рухадзе А. А.* Излучение, динамика и устойчивость плотной плазмы сильноточных импульсных разрядов: Препр. ФИАН СССР № 132. М., 1969. 71 с.
66. *Волосевич П. П., Гольдин В. Я., Калиткин Н. Н.* и др. Некоторые стадии сильноточного разряда в плазме: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 40. М., 1971. 38 с.
67. *Zinn J.* A binite difference sheme for timedependent spherical rediation hydrodynamics problems.— J. Comput. Phys., 1973, vol. 13, N 4, p. 511.
68. *Kim K. B., Berger S. A., Kamel M. J.* et al. Boundary-layer theory for blast waves.— J. Fluid Mech., 1975, vol. 71, pt 1, p. 65—88.
69. *Брушлинский Д. П., Коробейников В. П.* Автомодельная задача о сильном взрыве с учетом переноса тепла излучением.— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 5, с. 1060—1063.
70. *Шидловский В. П.* Автомодельные движения вязкого и теплопроводного газа при внезапном выделении энергии.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 117—123.
71. *Шидловский В. П.* Влияние диссипативных процессов на эволюцию ударных волн.— Ракетная техника и космонавтика, 1977, т. 15, № 1, с. 35—41.
72. *Шидловский В. П.* Развитие динамических возмущений на начальной стадии точечного взрыва в теплопроводном газе.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1978, № 1, с. 55—62.
73. *Бусурина Л. Н., Волосевич П. П., Галигузова И. И.* и др. Автомодельное решение двухтемпературной газовой динамики в приближении бесконечной начальной плотности: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 34. М., 1983. 25 с.
74. *Бусурина Л. Н., Волосевич П. П., Галигузова И. И.* и др. Различные режимы теплопереноса в двухтемпературной газовой динамике.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 7, с. 1122—1131.

75. *Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Бегущие волны в среде с вязкостью и теплопроводностью: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 44. М., 1973. 45 с.
76. *Becker B.* Stosswell und Detonation.— Ztschr. Phys., 1922, N 8, S. 321.
77. *Шафранов В. Д.* Структура ударной волны в плазме.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1957, т. 32, № 6, с. 1453—1459.
78. *Маршалл У.* Структура магнитно-гидродинамической ударной волны.— В кн.: Проблемы современной физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1957, вып. 7, с. 78—86.
79. *Имшенник В. С.* О структуре ударных волн в высокотемпературной плазме.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1962, т. 42, № 1, с. 236—246.
80. *Имшенник В. С.* Численное интегрирование дифференциальных уравнений структуры ударной волны в плазме.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1962, т. 2, № 2, с. 206—216.
81. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
82. *Брагинский С. И.* Явления переноса в плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы/Под ред. Леонтовича М. А. М.: Атомиздат, 1963, вып. 1, с. 183—271.
83. *Спитцер Л.* Физика полностью ионизованного газа. М.: Мир, 1965. 212 с.
84. *Афанасьев Ю. В., Гамалий Е. Г., Розанов В. Б.* Основные уравнения динамики и кинетики плазмы.— Тр. ФИАН СССР, 1982, т. 134, с. 10—31.
85. *Zimmerman G. B.* Numerical simulation of the high density approach to laser fusion: Prepr. Lawrence Livermore Lab. NUCRL-74811. Lawrence, 1973.
86. *Fraley G. S., Linnebur D. I., Mason R. J., Morse R. L.* Thermonuclear burn characteristics of compressed denterium-tritium.— Phys. Fluids, 1974, vol. 17, N 2, p. 472—489.
87. *Барышева Н. М., Зуев А. И., Карлыханов И. Г.* и др. Неявная схема для численного моделирования физических процессов в лазерной плазме.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1982, т. 22, № 2, с. 401—410.
88. *Лыков В. А., Николаев В. Г.* Приближенный метод расчета прогрева лазерных мишеней неравновесным излучением короны.— Вопр. атом. науки и техники, 1983, вып. 1(12), с. 26—31.
89. *Ландау Л. Д.* Кинетическое уравнение в случае кулоновского равновесия.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1937, т. 7, вып. 2, с. 203—209.
90. *Коробейников В. П.* О движении межпланетного газа, вызванного солнечной вспышкой.— В кн.: Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971, с. 211—221.
91. Лазеры и термоядерная проблема. Сб. перевод. ст./Под ред. Кадомцева Б. Б. М.: Атомиздат, 1973. 216 с.
92. Теория нагрева и сжатия низкоэнтропийных термоядерных мишеней.— Тр. ФИАН СССР, 1982. Т. 134. 176 с.
93. *Фроммер М.* Интегральные кривые обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер.— Успехи мат. наук, 1941, вып. 9, с. 212—253.
94. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
95. *Басов Н. Г., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г.* и др. Сжатие оболочечных мишеней при нагреве лазерным импульсом наносекундной длительности.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1980, т. 78, вып. 1, с. 420—430.
96. *Афанасьев Ю. В., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г.* и др. Теоретический анализ возможности осуществления термоядерной «вспышки» в лазерной мишени при энергии $E_л \sim 10^5$ Дж.— Тр. ФИАН СССР, 1982, т. 134, с. 167—176.
97. *Волосевич П. П., Самарский А. А., Феоктистов Л. П.* Оптимизация лазерных оболочечных мишеней.: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 108. М., 1981. 37 с.
98. *Басов Н. Г., Гуськов С. Ю., Данилова Г. В.* и др. Термоядерный выход мишеней для мощных лазеров коротковолнового диапазона ($\lambda \leqslant 1$ мкм): Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 89. М., 1984. 12 с.

99. *Аврорин Е. Н., Зуев А. И., Карлыханов Н. Г.* и др. Мишени и и параметры лазерных установок для вспышки и гибридного реактора.— Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 32, № 7, с. 457—460.
100. *Ахромеева Т. С., Волосевич П. П., Леванов Е. И., Маслянкин В. И.* К расчету задач трехтемпературной гидродинамики: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 28. М., 1980. 34 с.
101. *Волосевич П. П., Дарьин Н. А., Леванов Е. И., Лацабидзе Г. С.* Автомодельные задачи двухтемпературной магнитной гидродинамики: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 131. М., 1980. 32 с.
102. *Мельникова Н. С.* О неустановившемся гомотермическом движении газа, вытесняемого поршнем.— Тр. МИАН СССР, 1966, № 37, с. 86—104.
103. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 788 с.
104. *Анисимов С. И., Рахматулина А. Х.* Динамика расширения пара при испарении в вакуум.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1973, т. 64, с. 869—876.
105. *Ромашкевич Ю. П.* О расчете течений неравновесной плазмы методом С. К. Годунова.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1980, т. 20, № 3, с. 790—793.
106. *Бракнер К., Джорна С.* Управляемый лазерный синтез. М.: Атомиздат, 1977. 142 с.
107. *Самарский А. А., Волосевич П. П., Волчинская М. И., Курдюмов С. П.* Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1968, т. 8, № 5, с. 1025—1027.
108. *Попов Ю. П., Самарский А. А.* Полностью консервативные разностные схемы.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1969, т. 9, № 4, с. 953—958.
109. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
110. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 350 с.
111. *Ахромеева Т. С., Волосевич П. П., Леванов Е. И.* и др. Алгоритмы решения системы уравнений трехтемпературной гидродинамики в пакете прикладных программ Сафра.— Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 7, с. 1127—1134.
112. *Волосевич П. П., Леванов Е. И., Маслянкин В. И.* Анализ некоторых автомодельных задач трехтемпературной газовой динамики: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 80. М., 1985. 24 с.

УДК 517.958:532.59

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

С. А. Габов, А. Г. Свешников

Введение

В настоящее время в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, использованием криогенных жидкостей в технике и рядом других проблем значительно возрос интерес к изучению динамики различных неоднородных, и в частности стратифицированных, жидкостей. Конечно, для детального описания этого круга физических явлений необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей, которые, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими и для их полного исследования эффективны лишь численные методы, основанные на использовании современных электронно-вычислительных машин. Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе более простых линейных моделей и аналитических методов их исследования. Оказывается, что в этом отношении весьма характерны задачи динамики стратифицированной жидкости. Даже в рамках линейных моделей их математическая постановка оказывается очень своеобразной и приводит к нестандартным начально-краевым задачам, не имеющим аналогов в классической математической физике. Это определяет и самостоятельный математический интерес к этим задачам.

Под стратифицированной жидкостью принято понимать жидкость, физические характеристики которой, такие, как плотность, теплоемкость, динамическая вязкость и др., в стационарном устойчивом состоянии меняются лишь вдоль некоторого выделенного направления (часто — направления силы тяжести). Иначе говоря, в стационарном состоянии физические характеристики жидкости оказываются зависящими лишь от одной пространственной координаты.

Стратификация жидкости может быть вызвана различными физическими причинами; наиболее часто встречающейся из них является сила тяжести. Эта сила, например, создает в жидкости такое распределение ее частиц, растворенных в ней солей и взвешенных суспензий, при котором возникает неоднородность плотности жидкости вдоль направления гравитационного поля. Такая неоднородность называется плотностной стратификацией. Эта стратификация плотности, как правило, оказывает наиболее существенное влияние (по сравнению с другими видами стратификации) на динамические свойства жидкости, на процессы распространения в ней волновых дви-

жений. Вследствие этого при рассмотрении колебаний и волновых движений в стратифицированной жидкости обычно пренебрегают всеми видами стратификации, кроме плотностной, и под стратифицированной жидкостью понимают жидкость со стратификацией по плотности, вызванной силой тяжести. Мы также в дальнейшем будем придерживаться этой общепринятой терминологии.

Основным частотным параметром, характеризующим динамические свойства, а также характер и типы волн в стратифицированной жидкости, является так называемая частота Вяйсяля—Брента (см. разд. 1). В реальном океане эта частота оказывается равной по порядку величины 10^{-2}—10^{-3} Гц, что соответствует периодам колебаний порядка 10—100 мин. С повседневной точки зрения эти значения частоты Вяйсяля—Брента представляются очень незначительными, однако с позиций частотных характеристик глобальных процессов в Мировом океане они оказываются достаточно большими. Вспомним, например, частоты и периоды суточных и полусуточных приливных колебаний и волн цунами в океане. Более подробное обсуждение этих, а также ряда других вопросов, связанных с частотными характеристиками внутренних волн, обусловленных стратификацией и их местом в общей картине волновых движений океана, можно найти в монографиях [28—30].

В экспериментальных и натурных наблюдениях, а также при рассмотрении некоторых частных теоретических задач накоплен большой фактический материал, который нуждается в теоретическом осмыслении. Поэтому в настоящее время остро встал вопрос о развитии математического моделирования процессов внутренних колебаний в стратифицированных жидкостях. Если основная математическая модель идеальной стратифицированной жидкости — уравнение Эйлера — была известна давно, то систематическое исследование корректности возникающих здесь задач математической физики практически еще не проводилось. Данная статья является попыткой хотя бы частично восполнить этот пробел.

Статья посвящена изложению некоторых результатов математического исследования тех начально-краевых задач, а также задач дифракции, которые возникают в связи с задачами динамики идеальной стратифицированной жидкости. Естественно, при данном объеме статьи авторам не удалось рассмотреть эти задачи во всем их многообразии. В основном авторы стремились изложить новые и малоизвестные результаты, которые принадлежат им и их ученикам. Кроме того, была сделана попытка вести изложение таким образом, чтобы читатель мог получить представление о методах получения и обоснования излагаемых результатов.

Первый раздел настоящей работы посвящен рассмотрению основных математических моделей динамики идеальной стратифицированной жидкости. Здесь на основе теоремы о редукции векторных систем к скалярным уравнениям с помощью функции, аналогичной потенциальной функции, выводится основное уравнение динамики экспоненциально стратифицированной вращающейся и сжимаемой жидкости, уравнение гравитационно-гироскопических волн и урав-

нение внутренних волн. Кроме того, рассмотрены аналоги двух последних уравнений в так называемом приближении Буссинеска.

Во втором разделе на основе процедуры сведения к абстрактной задаче Коши в банаховом пространстве рассмотрены вопросы обобщенной разрешимости в пространстве $W_2^1(\Omega)$ основных начально-краевых задач для уравнений, выведенных в разд. 1.

Третий раздел посвящен изложению на примере уравнения внутренних волн в приближении Буссинеска теории динамических потенциалов и доказательству на ее основе теорем о классической разрешимости основных начально-краевых задач для указанного уравнения. Даны также указания на возможные и уже проведенные обобщения метода потенциалов.

В четвертом разделе даны некоторые примеры задач динамики стратифицированной жидкости, допускающих построение явных решений. Это задача Коши для трехмерного уравнения гравитационно-гироскопических волн и нестационарная двумерная задача о вынужденных осцилляциях прямолинейного отрезка, находящегося в жидкости, которая описывается двумерным аналогом уравнения гравитационно-гироскопических волн. Последняя задача может рассматриваться как аналог классической задачи Лаврентьева об обтекании дуги потоком жидкости. При изучении задач этого раздела уделяется большое внимание исследованию поведения их решений при больших временах, т. е. вопросам стабилизации решений.

Рассмотрению основных типов уравнений для амплитудных функций установившихся колебаний в стратифицированной вращающейся и сжимаемой жидкости посвящен пятый раздел. В нем показано, что наряду с поверхностными и акустическими волнами в рассматриваемой жидкости могут существовать внутренние волны, которые были названы гиперболическими. Эти гиперболические волны могут быть, в свою очередь, подразделены на два типа волн, различающихся характером поверхностей равных фаз (гребней волн). Динамика этих волн описывается уравнениями гиперболического типа, что приводит к необходимости изучения нового, ранее не рассматривавшегося класса задач — краевых задач для гиперболических уравнений. Некоторые особенности этого класса задач могут быть проиллюстрированы на примере краевых задач теории дифракции гиперболических волн.

В шестом разделе на примере соответствующего аналога задачи А. Зоммерфельда о дифракции на полуплоскости рассмотрены некоторые вопросы, связанные с постановкой задач дифракции для гиперболических уравнений, предложен аналог принципа предельного поглощения для удовлетворения условий излучения и сформулированы условия на ребре полуплоскости и характеристиках, проходящих через это ребро. Кроме того, дано явное решение рассматриваемой задачи и проведено его асимптотическое исследование, позволяющее описать возникающую дифракционную картину.

1. Основные начально-краевые задачи

1. Отнесем рассмотрение малых движений стратифицированной вращающейся сжимаемой жидкости к декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3), которая вращается вместе с рассматриваемой жидкостью. Будем считать, что вращение происходит вокруг оси Ox_3 и тем самым вектор Кориолиса $\mathbf{k}_0$ имеет вид $\mathbf{k}_0 = (0, 0, \alpha)$, где α — удвоенная угловая скорость вращения. Предположим, что жидкость стратифицирована вдоль оси Ox_3, т. е. ее плотность в невозмущенном стационарном состоянии является функцией лишь x_3 ($\rho_0 = \rho_0(x_3)$). Малые движения этой жидкости в поле сил тяжести при отсутствии других внешних сил принято описывать следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} &\rho_0(x_3)\,\partial\mathbf{v}/\partial t + \rho_0(x_3)\,[\mathbf{k}_0,\ \mathbf{v}] + \nabla p + \mathbf{e}_3\rho_1 g = 0,\\ &\partial\rho_1/\partial t + \operatorname{div}(\rho_0(x_3)\,\mathbf{v}) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial t}\rho_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}p + \rho_0(x_3)\frac{\omega_0^2}{g}(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{v}), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости частиц жидкости; ρ_1 — изменение плотности жидкости, вызванное ее движениями; p — динамическое давление; $\mathbf{e}_3$ — орт оси Ox_3; g — ускорение свободного падения; c — скорость звука в рассматриваемой жидкой среде; $\omega_0^2 = -g\,[\rho_0'(x_3)/\rho_0(x_3) + g/c^2]$ — квадрат частоты Вяйсяля—Брента. Всюду ниже предполагается, что $\omega_0^2(x_3) \geqslant 0$. Это условие означает устойчивость рассматриваемого распределения плотности $\rho_0(x_3)$ в жидкости и отсутствие в ней конвективных движений.

Отметим, что первое уравнение системы (1.1) является законом сохранения импульса, второе — известным линеаризованным уравнением непрерывности сплошной среды, третье — уравнением состояния сжимаемой жидкости с учетом ее стратификации.

Если область Ω, занимаемая жидкостью, не совпадает со всем пространством, то, помимо начальных условий, на ее границе Γ при интегрировании системы (1.1) должны быть поставлены определенные граничные условия. Наиболее типичными являются: граничное условие первой краевой задачи

$$p\,|_\Gamma = \varphi\,|_\Gamma, \tag{1.2}$$

когда на границе Γ задается значение динамического давления; граничное условие второй краевой задачи

$$(\mathbf{n},\ \mathbf{v})\,|_\Gamma = 0, \tag{1.3}$$

являющееся условием непротекания жидкости через твердую стенку, и граничное условие третьей краевой задачи

$$\partial p/\partial t - \rho_0(x_3)\,g\,(\mathbf{n},\ \mathbf{v})\,|_{x_3=\eta(x_1,\,x_2)} = 0, \tag{1.4}$$

вытекающее из линеаризованных кинематического и динамического условий на свободной поверхности, в невозмущенном состоянии опи-

сываемой уравнением $x_3 = \eta(x_1, x_2)$, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к этой поверхности. Величина g описывает эффективную силу тяжести на свободной поверхности и определяется гравитационными и центробежными силами [2].

Ниже будем предполагать, что величина скорости звука c является постоянной, что оказывается справедливым для изотермических процессов в атмосфере и жидкостях при постоянной энтропии. Кроме того, будем рассматривать экспоненциально-стратифицированную жидкость с плотностью $\rho_0(x_3) = A \exp\{-2\beta x_3\}$, $\beta > 0$, отвечающей больцмановскому распределению в однородном поле сил тяжести. В этом случае

$$\omega_0^2 = 2\beta g - g^2/c^2 \geqslant 0$$

является постоянной.

2. В силу векторного характера системы (1.1) ее рассмотрение в общем случае представляет достаточно сложную задачу, и поэтому естественно попытаться редуцировать систему (1.1) в частном случае постоянных величин ω_0 и c к одному скалярному уравнению. Заметим, что функция ρ_1 легко может быть исключена из системы (1.1). Поэтому в дальнейшем под решением системы (1.1) будем понимать совокупность функций $\mathbf{v}$ и p.

Предположим, что решение $(\mathbf{v}, p)$ системы (1.1) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{v},\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},\ \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2},\ \nabla p,\ \frac{\partial}{\partial t}\nabla p \in \mathbf{L}_2'(\Omega), \\ &\frac{\partial}{\partial t} p \in L_2(\Omega), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где производные понимаются в обобщенном смысле.

Справедлива

Т е о р е м а 1. *Любое решение* $(\mathbf{v}, p)$ *системы* (1.1) *в ограниченной области* Ω *с гладкой границей, удовлетворяющее условиям* (1.5), *в случае* $\rho_0(x_3) = A \exp(-2\beta x_3)$, $\beta > 0$, *представимо при* $\omega_0^2 \neq \alpha^2$ *в виде*

$$\begin{aligned} p &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2\right)\Phi, \\ \rho_0(x_3)\,\mathbf{v} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right)\left\{\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi - [\mathbf{k}_0, \nabla\Phi]\right\} + \\ &+ \mathbf{e}_3\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2\right)\frac{g}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi + (\alpha^2 - \omega_0^2)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_3}\Phi\right\}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где функция $\Phi(x, t)$ *является решением дифференциального уравнения*

$$S\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right] \equiv \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}L_0 - L_1\right]\frac{\partial}{\partial t}\Phi = 0, \tag{1.7}$$

$$L_0 = \Delta_3 + 2\beta\partial/\partial x_3 - \alpha^2/c^2,$$

$$L_1 = \omega_0^2 \Delta_2 + \alpha^2 (\partial^2/\partial x_3^2 + 2\beta\partial/\partial x_3),$$

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \qquad \Delta_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Справедливо и обратное утверждение: любое решение уравнения (1.7) *в области* Ω *порождает по формулам* (1.6) *решения системы* (1.1).

Если подчинить функцию $\Phi(x, t)$ соответствующим условиям на Γ, то можно удовлетворить и граничным условиям (1.2)—(1.4). Для того чтобы получить эти условия, достаточно воспользоваться формулами (1.6), подставив их в (1.2)—(1.4).

Заметим, что уравнение (1.7) является уравнением пятого порядка. Однако его порядок легко понизить. Положим $u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(x, t) \exp\{\beta x_3\}$, тогда для функции $u(x, t)$ получим уравнение

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4} u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_0 u + K_1 u, \tag{1.8}$$

которое назовем уравнением динамики стратифицированной, вращающейся сжимаемой жидкости. Операторы K_0 и K_1 в (1.8) определяются равенствами

$$\begin{aligned} K_0 &= \Delta_3 - (\beta^2 + \alpha^2/c^2), \\ K_1 &= \omega_0^2 \Delta_2 + \alpha^2 \partial^2/\partial x_3^2 - \alpha^2\beta^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

3. Рассмотрим теперь некоторые частные случаи уравнения (1.8), играющие важную роль при исследовании различных практических задач.

Предположим, что вращающаяся стратифицированная жидкость несжимаема, т. е. $c = \infty$, тогда уравнение (1.8) преобразуется в уравнение

$$\mathbf{M}[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\Delta_3 - \beta^2] u + \omega_0^2 \Delta_2 u + \alpha^2 u_{x_3 x_3} - \alpha^2\beta^2 u = 0, \tag{1.10}$$

которое носит название уравнения гравитационно-гироскопических волн и является основной математической моделью для теоретического исследования линейных внутренних волн во вращающемся океане.

Очень часто при рассмотрении динамики слабо стратифицированной жидкости используется так называемое приближение Буссинеска. Для системы (1.1) это приближение характеризуется следующими предположениями. Во всех трех уравнениях системы (1.1) явно входящая переменная стационарная плотность $\rho_0(x_3)$ заменяется постоянной величиной, как правило равной средней стационарной плотности. Величина же частоты Вяйсяля—Брента $\omega_0(x_3)$ считается, как и ранее, переменной (или постоянной в случае экспоненциальной стратификации) и заданной.

Использование приближения Буссинеска для системы (1.1) в рассматриваемом нами случае приводит к тому, что в операторах K_0 и K_1 уравнения (1.8) исчезают члены, пропорциональные β^2, а уравнение (1.10) принимает вид

$$\mathbf{M}_0[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3 u + \omega_0^2\Delta_2 u + \alpha^2 u_{x_3x_3} = 0 \tag{1.11}$$

и называется уравнением гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска.

Рассмотрение несжимаемой стратифицированной жидкости в отсутствие вращения (т. е. при $c = \infty$ и $\alpha = 0$) приводит к уравнению

$$\mathbf{N}[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\Delta_3 - \beta^2]u + \omega_0^2\Delta_2 u = 0, \tag{1.12}$$

называемому уравнением внутренних волн, и его аналогу в приближении Буссинеска

$$\mathbf{N}_0[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3 u + \omega_0^2\Delta_2 u = 0. \tag{1.13}$$

Эти уравнения получаются из уравнений (1.10), (1.11) при $\alpha = 0$.

Как уже отмечалось, граничные условия для уравнений (1.8), (1.10)—(1.13) получаются из условий (1.2)—(1.4) с учетом формул (1.6), определения функции $u(x, t)$ и предположений относительно величин c и α. Кроме граничных условий, должны быть поставлены также начальные условия и в случае уравнений (1.10)—(1.13), рассматриваемых в неограниченных областях, соответствующие условия на бесконечности. Конкретные примеры этих дополнительных условий будут рассмотрены в последующих разделах.

2. Существование обобщенных решений

Обсудим некоторые вопросы, связанные с существованием обобщенных решений основных начально-краевых задач для уравнений (1.8), (1.10)—(1.13).

1. Начнем наши рассмотрения с изучения разрешимости первой начально-краевой задачи для уравнения (1.8), причем в порядке обобщения рассмотрим более общий дифференциальный оператор.

Итак, рассмотрим следующую задачу:

$$\mathbf{S}(x, D)u \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L_0(x, D)u\right] - L_1(x, D)u = f(x, t),$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial^m}{\partial t^m}u(x, 0) = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3, \tag{2.1}$$

$$x \in \Omega \subset R^3, \quad t \in [0, T], \quad T > 0.$$

Здесь $L_0(x, D)$ и $L_1(x, D)$ — линейные дифференциальные операторы второго порядка:

$$L_0(x, D)u = \sum_{i, j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(B_i(x)u) - B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + c(x)u,$$

$$L_1(x, D)u = \sum_{i, j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{3} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u,$$

обладающие следующими свойствами:

а) $A_{ij}(x)$, $a_{ij}(x) \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$;

$B_i(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$, $d(x) \in C^{(0)}(\Omega)$;

б) оператор $L_0(x, D)$ является симметричным и равномерно эллиптическим;

в) оператор $L_1(x, D)$ произволен, в частности может вырождаться и быть оператором смешанного типа.

Рассмотрим $f(x, t)$ как абстрактную функцию $t \in [0, T]$ со значениями в некотором банаховом пространстве B. Ее производную $\partial f(x, t)/\partial t$ будем понимать как предел в норме пространства B соответствующего разностного отношения. Аналогично определяются и старшие производные. Введем в рассмотрение пространство $C_0^{(k)}[0, T; B]$ функций $f(x, t)$ с нормой

$$\|f\|_{k, T} = \sup_{t \in [0, T]} \|(\partial^k/\partial t^k) f\|_B,$$

таких, что $(\partial^m/\partial t^m) f(x, 0) = 0$, $m = 0, 1, \ldots, k-1$.

Рассмотрим оператор $R_{t, x}$: $v = R_{t, x} f$, заданный на функциях $f(x, t) \in C^{(0)}[0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega)]$ и определяемый как оператор, дающий обобщенное решение вспомогательной задачи для волнового уравнения [3]:

$$\begin{aligned} &\partial^2 v/\partial t^2 = L_0(x, D)\, v + f(x, t), \\ &v|_\Gamma = 0,\ v(x, 0) = \partial[v(x, 0)]/\partial t = 0, \\ &x \in \Omega,\ t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Если воспользоваться оператором $R_{t, x}$, то задачу (2.1) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\partial^2 u/\partial t^2 = R_{t, x} L_1(x, D)\, u + R_{t, x} f, \\ &u|_{t=0} = 0,\quad u_t|_{t=0} = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

и рассматривать ее как задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения с оператором $U(t) = R_{t, x} L_1(x, D)$.

Дадим следующее

Определение. *Решение задачи* (2.3), *принадлежащее* $C_0^{(p)}[0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega)]$ *при* $p \geqslant 3$, *будем называть обобщенным решением задачи* (2.1).

Относительно задачи (2.1) оказывается справедливой следующая

Теорема 2. *Для любой функции* $f(x, t) \in C^{(0)}[0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega)]$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (2.1), *причем это решение принадлежит* $C_0^{(3)}[0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega)]$.

Свойства гладкости по t полученного обобщенного решения уточняются следующей теоремой:

Теорема 3. *Если* $f(x, t) \in C_0^{(m)}[0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega)]$, *то обобщенное решение задачи* (2.1) *принадлежит* $C_0^{(m+3)}[0, T, \mathring{W}_2^1(\Omega)]$.

Доказательство теорем 2 и 3 основано на изучении свойств операторов $R_{t,x}$ и $U(t)$ в пространствах $C_0^{(m)}[0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega)]$, а именно удается доказать ограниченность данных операторов в соответствующих пространствах, а затем использовать теорию абстрактных дифференциальных уравнений.

Таким образом, доказано существование обобщенных решений первой краевой задачи для уравнения (1.8). Исследование обобщенной разрешимости второй и третьей краевых задач для этого уравнения представляет собой достаточно трудную задачу, что обусловлено сложным характером граничных условий, содержащих производные по времени.

2. Обратимся к рассмотрению начально-краевых задач для уравнений (1.10)—(1.13). Начнем с первой краевой задачи для уравнения (1.10):

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}[u] = f(x, t), \\ &u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \\ &u|_\Gamma = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Предполагается, что $u_0, u_1 \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ и $f(x, t) \in C^{(0)}[0, T; \mathring{W}_2^{-1}(\Omega)]$, где $\mathring{W}_2^{-1}(\Omega) = [\mathring{W}_2^1(\Omega)]^*$ — пространство, двойственное пространству $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ [4].

Введем в рассмотрение оператор Грина G первой краевой задачи для оператора Лапласа. Применяя его к уравнению (2.4), перепишем задачу (2.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u - \beta^2 G u] + \omega_0^2(A_1 + A_2)u + \alpha^2 A_3 u - \alpha^2\beta^2 G u = Gf, \\ &u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \\ &u(\cdot, t) \in \mathring{W}_2^1(\Omega), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где операторы A_k определены формулами $A_k = G(\partial^2/\partial x_k^2)$. Известно, что операторы A_k после соответствующего расширения являются ограниченными самосопряженными операторами в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ [5]. Ис-

пользуя обратимость оператора $(E - \beta^2 G)$ в пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ и тот факт, что $Gf \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ при $t \geqslant 0$, перепишем (2.5) в виде

$$\partial^2 u/\partial t^2 = \Lambda u + F, \tag{2.6}$$
$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x),$$

где

$$\Lambda \equiv (E - \beta^2 G)^{-1} [\omega_0^2 (A_1 + A_2) + \alpha^2 A_3 - \alpha^2 \beta^2 G];$$
$$F(x, t) = (E - \beta^2 G)^{-1} Gf(x, t) \in C^{(0)}[0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega)].$$

Решение задачи (2.6) будем называть обобщенным решением задачи (2.4). Используя теорию дифференциальных уравнений в абстрактных банаховых пространствах, приходим к теореме:

Теорема 4. *При любых* $u_0(x)$, $u_1(x) \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ *и* $f(x, t) \in C^{(0)}[0, T; \mathring{W}_2^{-1}(\Omega)]$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (2.4). *принадлежащее пространству* $C^{(2)}[0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega)]$. *Если* $f(x, t) \in C^{(m)}[0, T; \mathring{W}_2^{-1}(\Omega)]$, *то указанное решение принадлежит* $C^{(m+2)}[0, T; \mathring{W}_2^1(\Omega)]$.

Обратимся теперь к рассмотрению второй начально-краевой задачи, причем в целях упрощения изложения рассмотрим ее для уравнения (1.11) гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска. Рассмотрим задачу

$$\mathbf{M}_0[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 u + \omega_0^2 \Delta_2 u + \alpha^2 u_{x_3 x_3} = 0,$$
$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial n} + \omega_0^2 (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) u_{x_1} + \omega_0^2 (\mathbf{e}_2, \mathbf{n}) u_{x_2} + \alpha^2 (\mathbf{e}_3, \mathbf{n}) u_{x_3} - \tag{2.7}$$
$$- [\mathbf{n}, \mathbf{k}_0] \nabla \frac{\partial u}{\partial t} - \omega_0^2 \int_0^t [\mathbf{n}, \mathbf{k}_0] \nabla u(x, \tau) d\tau |_{x \in \Gamma} = 0.$$

Граничное условие в (2.7) соответствует условию второй краевой задачи (1.3) и получается из него на основе формул (1.6) в приближении Буссинеска.

Обозначим через $\hat{W}_2^1(\Omega)$ подпространство $W_2^1(\Omega)$, состоящее из функций, удовлетворяющих условию $\int_\Omega u \, dx = 0$. В пространстве $\hat{W}_2^1(\Omega)$ введем скалярное произведение $[u, v] = (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}$, эквивалентное в смысле нормы скалярному произведению в исходном $W_2^1(\Omega)$.

Пусть $u \in C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega}) \cap \hat{W}_2^1(\Omega)$. Определим на этом множестве операторы B и C ($v = Bu$, $w = Cu$) как операторы, дающие

решения следующих краевых задач:

$$\Delta_3 v = -\omega_0^2 \Delta_2 u - \alpha^2 u_{x_3 x_3}, \quad x \in \Omega,$$
$$\frac{\partial v}{\partial n} = -\omega_0^2 (\mathbf{e}_1, \mathbf{n})\, u_{x_1} - \omega_0^2 (\mathbf{e}_2, \mathbf{n})\, u_{x_2} - \alpha^2 (\mathbf{e}_3, \mathbf{n})\, u_{x_3} |_{x \in \Gamma}; \tag{2.8}$$

$$\Delta_3 w = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$\partial w / \partial n = [n, \mathbf{k}_0] \nabla u\, |_{x \in \Gamma}, \ \mathbf{k}_0 = (0, 0, \alpha). \tag{2.9}$$

Относительно введенных операторов справедлива

Лемма 1. *Операторы B и iC (i — мнимая единица) по непрерывности расширяются до ограниченных самосопряженных операторов в $\hat{W}_2^1(\Omega)$, причем*

$$\| B \|_{\hat{W}_2^1} = \max \{\alpha^2, \ \omega_0^2\}, \ \| C \|_{\hat{W}_2^1} = | \alpha |.$$

Используем операторы B и C для редукции задачи (2.7). Положим $u_{tt} = v + w_1$, где $v = Bu$ и $w_1 = Cu_t + \omega_0^2 \int_0^t Cu(\tau)\, d\tau$, тогда задачу (2.7) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = C \frac{\partial u}{\partial t} + Bu + \omega_0^2 \int_0^t Cu(\tau)\, d\tau,$$
$$u(x, 0) = u_0(x), \ u_t(x, 0) = u_1(x), \tag{2.10}$$
$$u(\cdot, t) \in \hat{W}_2^1(\Omega), \ t \in [0, T].$$

Называя решение задачи (2.10) обобщенным решением задачи (2.7) и применяя к (2.10) теорию дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, приходим к теореме:

Теорема 5. *Для любых $u_0(x)$, $u_1(x) \in \hat{W}_2^1(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение задачи (2.7), принадлежащее $C^{(m)}[0, T; \hat{W}_2^1(\Omega)]$ при любом $m \geqslant 2$.*

Незначительно усложняя проведенные выше рассуждения, можно доказать соответствующие теоремы о существовании обобщенных решений задачи (2.7) с неоднородным уравнением и граничным условием и обобщить результаты на случай уравнения (1.10).

Приведенные выше доказательства теорем существования носят неконструктивный характер и не позволяют эффективно решать рассматриваемые задачи. Ниже мы рассмотрим методы, основанные на теории потенциала, которые уже являются конструктивными и указывают путь построения алгоритмов решения начально-краевых задач для рассматриваемых в этой работе уравнений.

3. Теория потенциала и классические решения

Метод потенциалов является одним из наиболее распространенных методов изучения классических постановок как краевых, так и начально-краевых задач. В частности, на основе теории динамических

потенциалов в работах [6, 7] были изучены классические решения начально-краевых задач для уравнений теплопроводности и уравнения С. Л. Соболева. Здесь мы изложим на примере уравнения внутренних волн в приближении Буссинеска основы теории динамических потенциалов для задач динамики стратифицированной жидкости и получим на ее основе теоремы о существовании классических решений.

1. Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$w(x,t) = -\frac{1}{4\pi\omega_0 |x|}\int_0^{\xi} J_0(\mu)\,d\mu, \tag{3.1}$$

$$\xi = \omega_0 t\,|x_3|\,/\,|x|,$$

где $|x| = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2}$; $J_0(\mu)$ — функция Бесселя.

Справедлива

Лемма 2. *При* $|x| \neq 0$ *функция* $w(x,t)$ *является решением уравнения* (1.13), *причем*

$$w(x,0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} w(x,0) = -\frac{1}{4\pi|x|}.$$

Это позволяет рассматривать введенную функцию $w(x, t)$ как сингулярное решение уравнения (1.13).

Предположим, что $\Gamma \equiv \partial\Omega$ является поверхностью Ляпунова, т. е. $\Gamma \in A^{(1,h)}$. Введем в рассмотрение следующие поверхностные динамические потенциалы:

$$A[\mu](x,t) = \int_\Gamma \mu(y,t)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{4\pi|x-y|}\right)d\Gamma_y,$$

$$B[\mu](x,t) = \int_0^t\int_\Gamma \mu(y,\tau)N_{\tau,y}w(x-y,t-\tau)\,d\Gamma_y\,d\tau, \tag{3.2}$$

$$W[\mu](x,t) = \int_0^t\int_\Gamma \mu(y,\tau)w(x-y,t-\tau)\,d\Gamma_y\,d\tau,$$

где $\mu(y, t) \in C_0^{(2)}[0, \infty; C^{(0)}(\Gamma)]$.

Обратим внимание на то, что потенциал $A[\mu]$ является хорошо изученным потенциалом двойного слоя, зависящим от времени как от параметра. Через $N_{t,x}$ в (3.2) обозначен следующий граничный оператор:

$$N_{t,x}u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right)\frac{\partial u}{\partial n_x} - \omega_0^2(\mathbf{e}_3, \mathbf{n})\frac{\partial u}{\partial x_3}.$$

Как легко проверить, динамический потенциал простого слоя $W[\mu](x, t)$ и линейная комбинация $B[\mu](x, t) - A[\mu](x, t)$ всюду вне Γ удовлетворяют уравнению (1.13).

Справедливы следующие леммы, составляющие основу теории потенциала для уравнения (1.13):

Лемма 3. *Если* $\Gamma \in A^{(1,\,h)}$, *а* $\mu(x,\,t) \in C_0^{(2)}[0,\,\infty;\,C^{(0)}(\Gamma)]$, *то имеют место формулы*

$$B_{\pm}[\mu](x,t) = \mp\frac{\omega_0}{2}\int_0^t S(\omega_0(t-\tau))\,\mu(x,\tau)\,d\tau + \\ + B[\mu](x,t) \in C_0^{(2)}[0,\infty;C^{(0)}(\Gamma)], \qquad x \in \Gamma. \tag{3.3}$$

Лемма 4. *Если* $\Gamma \in A^{(1,\,h)}$, *а* $\mu(x,\,t) \in C_0^{(2)}[0,\,\infty;\,C^{(0)}(\Gamma)]$, *то тогда*

$$[N_{t,\,x}W[\mu]]_{\pm}(x,t) = \mp\frac{1}{2}\mu(x,t) \mp \frac{\omega_0}{2}\int_0^t S(\omega_0(t-\tau))\,\mu(x,\tau)\,d\tau - \\ - \int_\Gamma \mu(y,t)\,\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}\,d\Gamma_y + \\ + \int_0^t\int_\Gamma \mu(y,\tau)\,N_{t,\,x}w(x-y,t-\tau)\,d\Gamma_y\,d\tau \in C_0^{(2)}[0,\infty;C^{(0)}(\Gamma)]. \tag{3.4}$$

При формулировке лемм 3 и 4 были использованы следующие обозначения. Индексы «+» и «—» обозначают предельные значения в точке $x \in \Gamma$ при стремлении к ней по нормали изнутри и извне области Ω соответственно. Функция $S(\omega_0 t)$ определяется равенством

$$S(\omega_0 t) = \int_0^{\omega_0 t} J_0(\alpha)\,\frac{d\alpha}{\alpha},$$

где $J_0(\alpha)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

2. Применим введенные потенциалы для исследования начально-краевых задач для уравнения (1.13).

Рассмотрим следующие задачи:

$$\mathbf{N}_0[u] = 0, \quad u(x,\,0) = u_t(x,\,0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u|_\Gamma = \varphi(x,\,t) \in C_0^{(2)}[0,\,\infty;\,C^{(0)}(\Gamma)], \quad x \in \Gamma; \tag{S_1^+}$$

$$\mathbf{N}_0[u] = 0, \quad u(x,\,0) = u_t(x,\,0) = 0, \quad x \in \Omega, \\ N_{t,\,x}u|_\Gamma = \varphi(x,\,t) \in C_0^{(2)}[0,\,\infty;\,C^{(0)}(\Gamma)], \quad x \in \Gamma, \tag{S_2^+}$$

и их внешние аналоги S_1^- и S_2^-, рассматриваемые в $R^3 \setminus \overline{\Omega}$. При постановке внешних задач $S_{1,2}^-$ будем дополнительно требовать выполнения условий регулярности на бесконечности:

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}u\right| \leqslant \frac{A_k(t)}{|x|}, \quad \left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\nabla u\right| \leqslant \frac{B_k(t)}{|x|^2}, \\ \left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}D_{x_i}D_{x_j}u\right| \leqslant \frac{C_k(t)}{|x|^3}, \quad k = 0,1,2. \tag{3.5}$$

Здесь $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$ — непрерывные функции t, а $D_{x_i} = \partial/\partial x_i$. Отметим, что граничное условие с оператором $N_{t,x}$ в задачах $S_2^{\pm}$ отвечает неоднородному граничному условию второй краевой задачи (см. (1.13)).

Решения задач $S_1^{\pm}$ будем искать в виде

$$u(x, t) = B[\mu](x, t) - A[\mu](x, t), \tag{3.6}$$

а задач $S_2^{\pm}$ — в виде

$$u(x, t) = W[\mu](x, t). \tag{3.7}$$

Легко проверить, что функции (3.6), (3.7) удовлетворяют уравнению (1.13) и начальным условиям при $\mu(x, t) \in C_0^{(2)}[0, \infty; C^{(0)}(\Gamma)]$. Используя результаты лемм 3 и 4, приходим к следующим интегральным уравнениям в случае задач $S_1^{\pm}$:

$$\pm {}^1/_2\mu(x, t) - A[\mu](x, t) + B[\mu](x, t) \mp {}^1/_2\omega_0 S[\mu](x, t) = \varphi(x, t), \tag{3.8}$$

и в случае задач $S_2^{\pm}$

$$\mp {}^1/_2\,\mu(x, t) - A^*[\mu](x, t) + B^*[\mu](x, t) \mp {}^1/_2\omega_0 S[\mu](x, t) = \varphi(x, t). \tag{3.9}$$

Верхние знаки в (3.8), (3.9) отвечают задачам $S_{1,2}^{+}$, а нижние — соответственно $S_{1,2}^{-}$. Через A^*, B^* и S обозначены следующие операторы:

$$A^*[\mu](x,t) = \int_{\Gamma} \mu(y,t) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{4\pi|x-y|}\, d\Gamma_y,$$

$$B^*[\mu](x,t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \mu(y,\tau) N_{t,x} w(x-y, t-\tau)\, d\Gamma_y\, d\tau,$$

$$S[\mu](x,t) = \int_0^t S(\omega_0(t-\tau))\, \mu(x,\tau)\, d\tau.$$

Уравнения (3.8), (3.9) являются частными случаями общего уравнения вида

$$\mu - \mathbf{A}\mu + \int_0^t \mathbf{B}(t-\tau)\mu(\tau)\, d\tau = \varphi(x,t) \tag{3.10}$$

в банаховом пространстве $C_0^{(2)}[0, T; H]$, где $H \equiv C^{(0)}(\Gamma)$. В уравнении (3.10) $\mathbf{A}$ — не зависящий от времени t ограниченный оператор в H, а $\mathbf{B}(t)$ — ограниченный в H при каждом t оператор, аналитически зависящий от времени t. Конкретный вид операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}(t)$ определяется уравнениями (3.8), (3.9), причем $\mathbf{B}(0) = 0$.

При исследовании уравнения (3.10) с операторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}(t)$, порожденными задачами $S_{1,2}^{\pm}$, возникают следующие случаи.

А. Оператор $E - \mathbf{A}$ обратим в пространстве H. Тогда, умножив уравнение (3.10) на $(E - \mathbf{A})^{-1}$ и применив метод последовательных приближений, легко убедиться, что при любой $\varphi(x, t) \in C_0^{(2)}[0, T; H]$ уравнение однозначно разрешимо в пространстве $C_0^{(2)}[0, T; H]$ для любого $T > 0$. Эта ситуация возникает в случае задач S_1^+ и S_2^-.

Б. Оператор $E - \mathbf{A}$ необратим в пространстве H, но область значений оператора $\mathbf{B}(t) * \mu(t) = \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau)\mu(\tau)\,d\tau$ содержится в области значений оператора $E - \mathbf{A}$, т. е. $R(\mathbf{B}(t) *) \subset R(E - \mathbf{A})$. В этом случае, если $\varphi(x, t) \in R(E - \mathbf{A})$ при любом $t \geqslant 0$, то метод последовательных приближений может быть применен на соответствующем подпространстве пространства H, на котором оператор $E - \mathbf{A}$ оказывается обратимым, и тем самым доказана разрешимость уравнения (3.10) в случае $\varphi(x, t) \in R(E - \mathbf{A})$. Заметим, что в случае задачи S_2^+, где возникает эта ситуация, оператор $\mathbf{A}$ является вполне непрерывным и дополнение $R(E - \mathbf{A})$ до всего пространства H оказывается одномерным, а условие $\varphi(x, t) \in R(E - \mathbf{A})$ формулируется в терминах условия ортогональности $(1, \varphi)_{L_2(\Gamma)} = 0\ \forall t \geqslant 0$.

В. Оператор $E - \mathbf{A}$ необратим и область значений оператора $\mathbf{B}(t) *$ не принадлежит $R(E - \mathbf{A})$. Однако в случае задачи S_1^- (уравнение (3.8) с нижними знаками), в которой возникает эта ситуация, уравнение, сопряженное уравнению (3.10) в пространстве $L_2[0, T; L_2(\Gamma)]$, оказывается уравнением, удовлетворяющим условиям предыдущего случая, что позволяет изучить вопрос о его разрешимости и в итоге исследовать разрешимость уравнения (3.10).

Оказывается, что уравнение (3.10) в случае задачи S_1^- (т. е. уравнение (3.8) с нижними знаками) разрешимо лишь при выполнении условия ортогональности правой части $\varphi(x, t)$ некоторой вполне определенной функции $\mu_0(x, t)$ в $L_2[0, T; L_2(\Gamma)]$. Однако это условие не является необходимым для разрешимости задачи S_1^- и обусловлено лишь специальным видом представления решения в виде потенциалов (3.6). Используя вместо (3.6) представление

$$u(x, t) = B[\mu](x, t) - A[\mu](x, t) + \int_0^t c(\tau)\, w(x - a, t - \tau)\,d\tau,$$

где $a \in \Omega$ и $c(t) \in C^{(2)}[0, \infty)$, придем вместо уравнения вида (3.10) к уравнению

$$\mu - \mathbf{A}\mu + \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau)\mu(\tau)\,d\tau + \int_0^t c(\tau)\, w(x - a, t - \tau)\,d\tau = \varphi(x, t). \tag{3.11}$$

(Операторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}(t)$ определяются уравнением (3.8) с нижними знаками.) Оказывается, что за счет выбора функции $c(t)$ можно добиться удовлетворения отмеченного выше условия ортогональности и сделать уравнение (3.11) безусловно разрешимым при любой функ-

ции $\varphi(x, t)$. Подробности изложенных выше рассуждений читатель может найти, например, в работах [7—9].

Исследование разрешимости уравнения (3.10) с операторами, отвечающими уравнениям (3.8), (3.9), т.е. задачам $S^{\pm}_{1,2}$, позволяет доказать следующую теорему о классической разрешимости задач:

Теорема 6. *Если* $\varphi(x, t) \in C_0^{(2)}[0, \infty; C^{(0)}(\Gamma)]$, *то задачи* $S_1^{\pm}$ *и* S_2^- *разрешимы в классическом смысле; если, кроме того,* $(1, \varphi)_{L_2(\Gamma)} = 0\ \forall t \geqslant 0$, *то разрешима и задача* S_2^+.

В настоящем разделе мы рассмотрели теорию потенциала и ее приложения к доказательству теорем о классической разрешимости основных начально-краевых задач для уравнения (1.13). Аналогичная теория потенциала и теоремы о классической разрешимости могут быть получены и для уравнений (1.10)—(1.12), а также их двумерных аналогов (см. по этому поводу [8—10]).

4. Некоторые явно разрешимые нестационарные задачи

Изучение задач, разрешимых в явном виде, играет важную роль в исследовании любой математической модели физических явлений. Это обусловлено тем, что эти задачи играют роль своего рода «эталонов», позволяющих глубже понять суть изучаемой модели, а также проводить сравнение и оценку эффективности различных асимптотических и приближенных методов, в частности численных. В этом разделе рассмотрим несколько примеров таких задач.

1. Рассмотрим задачу Коши для уравнения гравитационно-гироскопических волн (1.11) в приближении Буссинеска

$$\mathbf{M}_0[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3 u + \omega_0^2 \Delta_2 u + \alpha^2 u_{x_3 x_3} = 0,$$

получим ее явное решение и изучим его поведение при больших временах. С физической точки зрения эта задача служит математической моделью динамики малых движений вращающейся слабо стратифицированной жидкости, занимающей все пространство R^3.

Прежде чем приступить к формулировке задачи Коши, рассмотрим фундаментальное решение дифференциального оператора $\mathbf{M}_0$, отвечающего уравнению (1.11). Для этого фундаментального решения справедливы следующие представления:

$$E(x, t) = -\frac{1}{4\pi |x|}\int_0^t J_0(\omega_0(t-\tau))\, J_0(\lambda(x)\tau)\, d\tau =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi^2 |x|}\displaystyle\int_{\lambda/\omega_0}^{1} \frac{\sin \omega_0 t\mu}{[(1-\mu^2)(\mu^2 - \lambda^2/\omega_0^2)]^{1/2}}\, d\mu & \text{при } x \neq (0, 0, x_3), \\ -\dfrac{1}{4\pi |x|}\dfrac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} & \text{при } x = (0, 0, x_3), \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\lambda = \lambda(x) = |x|_* / |x|$; $|x|_* = [\alpha^2(x_1^2 + x_2^2) + \omega_0^2 x_3^2]^{1/2}$; $J_0(t)$ — функция Бесселя.

Заметим, что, переходя к пределу при $\omega_0 \to 0$ в первой строке формулы (4.1), мы получим известное фундаментальное решение уравнения С. Л. Соболева [11], а при $\alpha \to 0$ — фундаментальное решение уравнения (1.13). Отметим также, что из формулы (4.1) следует, что в рассматриваемой модели жидкости имеет место дальнодействие, т. е. возмущения от точечного источника распространяются мгновенно.

Напомним, что с физической точки зрения фундаментальное решение описывает возмущение, вызванное мгновенным действием точечного источника. Поэтому изучение асимптотического поведения при $t \to +\infty$ фундаментального решения (4.1) представляет не только математический интерес, но и полезно с физической точки зрения.

Рассмотрим вначале случай, когда $|\lambda - \omega_0| \geqslant \delta > 0$. Если ввести в рассмотрение сферическую систему координат, обычным образом связанную с декартовой системой (x_1, x_2, x_3), то $\lambda = |x|_*/|x|$ оказывается равной $\lambda = (\alpha^2 \sin^2\theta + \omega_0^2 \cos^2\theta)^{1/2}$ и условию $|\lambda - \omega_0| \geqslant \delta > 0$ можно придать форму требования $\theta \in [\delta_1, \pi - \delta_1]$, где $\delta_1 > 0$ и определяется величиной δ.

Используя стандартные асимптотические методы [12, 13], для фундаментального решения (4.1) при $\omega_0 t \gg 1$ можно записать формулу

$$E(x,t) = -\sqrt{\frac{\pi\omega_0}{2\lambda|\omega_0^2-\alpha^2|}}\frac{\sin(\lambda t - \pi/4)}{2\pi^2|x|\sin\theta\sqrt{\omega_0 t}} - \\ -\sqrt{\frac{\pi}{2|\omega_0^2-\alpha^2|}}\frac{\sin(\omega_0 t - \pi/4)}{2\pi^2|x|\sin\theta\sqrt{\omega_0 t}} + \frac{\Delta(|x|, \omega_0 t)}{|x|(\omega_0 t)}, \tag{4.2}$$

справедливую при $|\lambda - \omega_0| \geqslant \delta > 0$. В (4.2) величина Δ такова, что $|\Delta(|x|, \omega_0 t)| \leqslant C(\delta)$, где $C(\delta)$, вообще говоря, неограничена при $\delta \to 0$.

Обсудим формулу (4.2). Она показывает, что при достаточно больших временах фундаментальное решение $E(x, t)$, т. е. возмущение от точечного источника, убывает в области $|\lambda - \omega_0| \geqslant \delta$ (или $\theta \in \in [\delta_1, \pi - \delta_1]$) со временем как $(\omega_0 t)^{-1/2}$ и состоит из возмущений двух типов. Первое из них описывается вторым слагаемым в (4.2); оно представляет собой стоячие колебания, осциллирующие с частотой ω_0 и убывающие со временем. Второе возмущение описывается первым слагаемым и представляет собой своеобразный волновой процесс. Поверхности равной фазы этих волн (гребни) описываются соотношением $\lambda = (\alpha^2 \sin^2\theta + \omega_0^2 \cos^2\theta)^{1/2} = \text{const} \cdot t^{-1}$ и представляют собой конические поверхности вращения с вершиной в точке $x = 0$ и осью Ox_3.

Если записать фазовое соотношение при $\omega_0 > \alpha$ в виде $[\alpha^2 + (\omega_0^2 - \alpha^2)\cos^2\theta]^{1/2} = \text{const} \cdot t^{-1}$, а в случае $\omega_0 < \alpha$ — в виде $[\omega_0^2 + (\alpha^2 - \omega_0^2)\sin^2\theta]^{1/2} = \text{const} \cdot t^{-1}$, то легко видеть, что имеет место следующая картина эволюции фазовых конических поверхностей. При $\omega_0 > \alpha$ эти поверхности зарождаются у оси Ox_3, а затем, со

временем увеличивая свой раствор, постепенно вырождаются в горизонтальную плоскость $x_3 = 0$. В случае же $\alpha > \omega_0$, наоборот, фазовые конические поверхности зарождаются в горизонтальной плоскости и, уменьшая свой раствор, со временем вырождаются в вертикальную координатную ось Ox_3. Из описанной геометрической картины становится ясно, что вертикальная ось Ox_3, соответствующая $\lambda = \omega_0$, является особым множеством для обсуждаемой системы фазовых поверхностей. В математическом плане это проявляется в том, что рассматриваемая асимптотическая формула (4.2) в окрестности этой оси перестает быть справедливой.

Поведение фундаментального решения на оси Ox_3 описывается формулой, стоящей во второй строке формулы (4.1). Из этой формулы следует, что на оси Ox_3 фундаментальное решение имеет характер стоячих колебаний с частотой ω_0, не убывающих во времени.

Завершив на этом рассмотрение фундаментального решения, используем его для построения решения задачи Коши для уравнения гравитационно-гироскопических волн (1.11).

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_0[u](x, t) = f(x, t), \quad x \in R^3, \quad t > 0, \\ &u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \end{aligned} \tag{4.3}$$

$u(x, t)$ регулярна на бесконечности (см. формулы (3.5)).

Относительно функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $f(x, t)$ будем предполагать следующее. Функции $u_0(x)$, $u_1(x) \in C_0^\infty(R^3)$, а $f(x, t) \in C^\infty[R^3 \times [0, \infty)]$ и является финитной по переменной x.

Справедлива

Теорема 7. *Если* $u_0(x)$, $u_1(x) \in C_0^\infty(R^3)$, *а* $f(x, t) \in C^\infty[R^3 \times [0, \infty)]$ *и финитна по* x, *то классическое решение задачи Коши* (4.3) *существует, единственно и дается формулой*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{R^3} E(x-y, t-\tau) f(y, \tau)\, dy\, d\tau + \int_{R^3} \frac{\partial}{\partial t} E(x-y, t)\, \Delta_3 u_0(y)\, dy + \int_{R^3} E(x-y, t)\, \Delta_3 u_1(y)\, dy. \tag{4.4}$$

Заметим, что требования на гладкость и финитность начальных функций и правой части в (4.3) могут быть значительно ослаблены.

Наличие явного решения (4.4) задачи Коши (4.3) позволяет исследовать вопрос о существовании предельной амплитуды в том случае, когда функция $f(x, t)$, стоящая в правой части уравнения (4.3), зависит от времени по гармоническому закону.

Рассмотрим задачу Коши (4.3) в следующей постановке:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_0[u] = -(\omega^2 - \omega_0^2) f(x) \exp(-i\omega t), \quad x \in R^3, \quad t > 0, \\ &u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$u(x, t)$ регулярна на бесконечности.

Здесь $\omega \neq \omega_0$, α и множитель $(\omega^2 - \omega_0^2)$ в правой части введен для удобства записи последующих формул. Предполагается, что $f(x) \in C_0^\infty(R^3)$.

Функцию $w(x)$, определенную при каждом $x \in R^3$ равенством

$$w(x) = \lim_{t \to +\infty} \exp(i\omega t)\, u(x, t) \quad \forall x \in R^3,$$

где $u(x, t)$ — решение задачи (4.5), в соответствии с общепринятым [14] назовем предельной амплитудой для задачи (4.5).

Используя формулу (4.4), решение задачи (4.5) можно записать в виде

$$u(x, t) = \exp(i\omega t) \int_{R^3} f(y) R(x - y, t)\, dy, \tag{4.6}$$

где $R(x, t) = -(\omega^2 - \omega_0^2) \int_0^t E(x, \tau) \exp(i\omega\tau)\, d\tau$ и называется разрешающим ядром задачи (4.5).

Справедлива следующая

Теорема 8. *При $\omega \neq \omega_0$, α для задачи Коши* (4.5) *существует предельная амплитуда $w(x)$, равная*

$$w(x) = \int_{R^3} e(x - y) f(y)\, dy$$

и удовлетворяющая в классическом смысле уравнению

$$\Delta_2 w + \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\omega^2 - \omega_0^2} w_{x_3 x_3} = f(x). \tag{4.7}$$

Здесь $e(x)$ — фундаментальное решение уравнения (4.7). *Разрешающее ядро почти всюду в R^3 при $t \to +\infty$ сходится к $e(x)$, т. е. при почти всех (в смысле лебеговой меры) $x \in R^3$ имеет место равенство*

$$e(x) = \lim_{t \to +\infty} R(x, t).$$

Заметим, что уравнение (4.7) для предельной амплитуды $w(x)$ при частоте ω, не принадлежащей интервалу $[\min\{\omega_0, \alpha\}; \max\{\omega_0, \alpha\}]$, является уравнением эллиптического типа, а в случае, когда ω лежит в указанном интервале, уравнение (4.7) является гиперболическим, причем выделенной времениподобной координатой является координата x_3. Фундаментальное решение уравнения (4.7) как в эллиптическом, так и в гиперболическом случае имеет вид

$$e(x) = -\frac{1}{4\pi}\left[x_3^2 + \left(\frac{\omega^2 - \alpha^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)(x_1^2 + x_2^2)\right]^{-1/2}. \tag{4.8}$$

Однако в гиперболическом случае следует иметь в виду, что в (4.8) выбрана та ветвь корня, для которой $\sqrt{-a^2} = -ia$ при $a > 0$. В следующем разделе мы обсудим более подробно вопрос о типах

уравнений для амплитуд установившихся колебаний и отвечающих им фундаментальных решениях.

2. В этом пункте мы рассмотрим одну внешнюю начально-краевую задачу для двумерного уравнения гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp u + \omega_0^2 u_{x_1x_1} + \alpha^2 u_{x_3x_3} = 0, \tag{4.9}$$

где $\Delta_\perp$ — оператор Лапласа по переменным x_1 и x_3. Эта задача в теории гравитационно-гироскопических волн аналогична классической задаче Лаврентьева [15, 16] об обтекании дуги потоком жидкости.

Пусть в жидкости, динамика двумерных движений которой описывается уравнением (4.9), находится непроницаемая для жидкости бесконечно тонкая пластина Γ, расположенная под углом φ к оси Ox_1, т. е. $\Gamma = \{(x_1, x_3) \in R^2: x_1 = s\cos\varphi,\ x_3 = s\sin\varphi,\ s \in [-1,1];\ \varphi \in [0, \pi/2]\}$. Предположим, что точки отрезка Γ начиная с момента времени $t = 0$ совершают заданные малые движения в перпендикулярном к Γ направлении. Эти движения могут быть описаны заданием нормальных к Γ скоростей частиц жидкости на отрезке Γ.

Математически задача о возбуждении волн в рассматриваемой жидкости колеблющимся отрезком Γ формулируется следующим образом.

Найти при $t \geqslant 0$ в $R^2 \setminus \Gamma$ непрерывную функцию $u(x, t)$ ($x = (x_1, x_3)$) и определить $C_0(t)$ так, чтобы $u(x, t)$ удовлетворяла при $t > 0$ в классическом смысле уравнению (4.9) в области $R^2 \setminus \Gamma$, начальным условиям

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \tag{4.10}$$

и граничному условию на отрезке Γ

$$u(x, t)|_{x\in\Gamma} = f(s, t) + C_0(t),\ s \in [-1, 1]. \tag{4.11}$$

Кроме того, функция $u(x, t)$ должна удовлетворять условиям регулярности на бесконечности (3.5), в которых $|x| = (x_1^2 + x_3^2)^{1/2}$, а также следующим условиям в окрестности концевых точек отрезка Γ:

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\nabla u\right| \sim O(r_{1,2}^{-1/2}),\quad k = 0, 1, 2, \tag{4.12}$$

где $r_{1,2}$ — расстояния до концов отрезка Γ.

Заметим, что функция $u(x, t)$ по своему смыслу является функцией тока и тем самым определена с точностью до произвольной аддитивной константы, зависящей от времени. Этим обусловлено введение константы $C_0(t)$ в граничное условие (4.11), позволяющее при соответствующем выборе этой константы обеспечить однозначную разрешимость рассматриваемой задачи.

Обозначим через $C_{1/2}^{(0,\,h)}(\Gamma)$ множество функций $\mu(s)$, $s \in [-1, 1]$, заданных на Γ, удовлетворяющих во внутренних точках Γ условию Гельдера с показателем h, но, быть может, не ограниченных в окрестности концевых точек Γ, где справедлива оценка $|\mu(s)| \leqslant C \times |1 - s^2|^{-1/2}$. Через $C_0^{(2)}[0, T; C_{1/2}^{(0,\,h)}(\Gamma)]$ обозначим следующее множество функций: $\left\{\mu(s, t) \in C^{(2)}[0, T; C_{1/2}^{(0,\,h)}(\Gamma)]: \mu(s, 0) = \mu_t(s, 0) = 0, \int\limits_{-1}^{1} \mu(s, t)\, ds = 0\right\}$. Справедлива следующая

Лемма 5. *Если* $\mu(s, t) \in C_0^{(2)}[0, \infty; C_{1/2}^{(0,\,h)}(\Gamma)]$, *то функция*

$$u(x, t) = \int\limits_{-1}^{1} \mu(s, t) \ln|x - y(s)|\, ds + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{1} \mu(s, t-\tau) \frac{1}{\tau}\left[1 - \cos\left(\tau \frac{|x - y(s)|_*}{|x - y(s)|}\right)\right] ds\, d\tau, \tag{4.13}$$

где $x = (x_1, x_3)$, $y(s) = (s\cos\varphi,\ s\sin\varphi)$, $|x|_* = [\alpha^2 x_1^2 + \omega_0^2 x_3^2]^{1/2}$, *непрерывна в* R^2, *вне* Γ *удовлетворяет уравнению* (4.9), *начальным условиям* (4.10), *а также условиям регулярности на бесконечности и условиям* (4.12).

Разыскивая решение рассматриваемой задачи в виде (4.13), на основе граничного условия (4.11) приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\int\limits_{-1}^{1} \mu(\sigma, t) \ln|s - \sigma|\, d\sigma = f(s, t) + C_0(t). \tag{4.14}$$

Предположим, что $f(s, t) \in C^{(2)}[0, \infty; C^{(1,\,h)}(\Gamma)]$ и $f(s, 0) = f_t(s, 0) = 0$. Оказывается, что решение уравнения (4.14) в классе $C_0^{(2)}[0, \infty; C_{1/2}^{(0,\,h)}(\Gamma)]$ существует лишь при определенном выборе величины $C_0(t)$, единственно и имеет вид

$$\mu(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta - s} f'_\zeta(\zeta, t)\, d\zeta, \tag{4.15}$$

а величина $C_0(t)$ равна

$$C_0(t) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(s, t)\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \mu(s, t)\, \Omega(s)\, ds, \tag{4.16}$$

где $\Omega(s) = (1 - s)\ln[(1 - s)/e] + (1 + s)\ln[(1 + s)/e]$.

Таким образом, справедлива

Теорема 9. *При любой* $f(s, t) \in C^{(2)}[0, \infty; C^{(1,\,h)}(\Gamma)]$ *и* $f(s, 0) = f_t(s, 0) = 0$ *решение задачи* (4.9)—(4.12), *существует*,

единственно и дается явными формулами (4.13) *и* (4.16), *где функция* $\mu(s, t)$ *определена равенством* (4.15).

Утверждение о единственности решения в теореме 9 выводится из энергетического тождества для уравнения (4.9).

Рассмотрим теперь вопрос о поведении решения рассматриваемой задачи при больших временах. Из формул (4.13), (4.15), (4.16) легко выводится следующая.

Теорема 10. *Если функция* $f(s, t)$, *удовлетворяющая условиям теоремы* 9, *финитна по времени* (*т. е.* $\exists t_0 > 0 : f(s, t) \equiv 0$ *при* $t > t_0$), *то решение задачи* (4.9)—(4.12) *при* $t \to \infty$ *равномерно по* $x \in R^2 \setminus \Gamma$ *стабилизируется* (*сходится*) *к нулю, причем справедлива оценка скорости стабилизации*

$$\sup_{x \in R^2 \setminus \Gamma} |u(x, t)| \leqslant C_f / t,$$

где константа C_f *зависит лишь от* $f(s, t)$.

Пусть $f(s, t)$ в граничном условии (4.11) имеет вид $f(s, t) = \eta(t) \exp(-i\omega t) f_0(s)$, где $\eta(t) \in C^{(2)}[0, \infty)$ — функция «переходного режима», удовлетворяющая следующим условиям. При $0 \leqslant t \leqslant t_0$ функция $\eta(t)$ вполне произвольна и удовлетворяет начальным условиям $\eta(0) = \eta_t(0) = 0$, а при $t > t_0$ $\eta(t) \equiv 1$.

Рассмотрим вопрос о существовании предельной амплитуды для задачи (4.9)—(4.12). Справедлива

Теорема 11. *Если* $f_0(s) \in C^{(1, h)}(\Gamma)$, *то при любой частоте* $\omega \neq \omega_0$, α *и* $(\alpha^2 \cos^2\varphi + \omega_0^2 \sin^2\varphi)^{1/2}$ *для задачи* (4.9)—(4.12) *существует предельная амплитуда* $w(x) = \lim_{t \to \infty} \exp(i\omega t) u(x, t)$, *равная*

$$w(x) = \int_{-1}^{1} \mu_0(s) \ln \left[(x_1 - y_1(s))^2 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \alpha^2} (x_3 - y_3(s))^2 \right]^{1/2} ds. \quad (4.17)$$

Здесь $\mu_0(s)$ *определяется формулой* (4.15), *в которой* $f_\xi'(\xi, t)$ *следует заменить на* $f_0'(\xi)$. *Ветвь логарифма в формуле* (4.17) *определяется соотношением между параметрами* α *и* ω_0. *Если* $z = 0$, *то* $\ln z = \ln |z|$, *в случае же* $z < 0$ $\ln z = \ln |z| + i\pi \cdot \operatorname{sgn}(\omega_0 - \alpha)$. *Предельная амплитуда* $w(x)$ *всюду в* $R^2 \setminus \Gamma$ *удовлетворяет уравнению установившихся колебаний*

$$w_{x_3 x_3} + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \alpha^2} w_{x_1 x_1} = 0, \quad (4.18)$$

причем при $\omega \notin [\min\{\omega_0, \alpha\}, \max\{\omega_0, \alpha\}]$ *она удовлетворяет этому уравнению в классическом смысле, а при* $\min\{\omega_0, \alpha\} < \omega < \max\{\omega_0, \alpha\}$ — *в смысле теории обобщенных функций. Кроме того, предельная амплитуда удовлетворяет на* Γ *граничному условию*

$$w(x)|_\Gamma = f_0(s) + C_0,$$

где константа C_0 *определяется формулой* (4.16), *в которой* $\mu(s, t)$ *следует заменить на* $\mu_0(s)$, *а* $f(s, t)$ — *на* $f_0(s)$.

Сделаем несколько замечаний. Из теоремы 11 следует, что решение задачи (4.9)—(4.12) в рассматриваемом случае описывает при $t \to \infty$ установившиеся колебания частоты ω ($\neq \omega_0$, α и $(\alpha^2 \cos^2 \varphi + \omega_0^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$) с амплитудой $w(x)$, являющейся решением (4.18). При $\omega \notin [\min\{\omega_0, \alpha\}, \max\{\omega_0, \alpha\}]$ уравнение (4.18) является обычным для классических задач установившихся колебаний уравнением эллиптического типа.

Гораздо больший интерес представляет случай $\min\{\omega_0, \alpha\} < \omega < \max\{\omega_0, \alpha\}$, когда уравнение является гиперболическим и описывает своеобразные внутренние движения жидкости. В частности, заметим, что предельная амплитуда $w(x)$, определяемая (4.17), является непрерывной в R^2, однако ее первые производные, имеющие смысл компонент вектора скорости частиц жидкости, оказываются неограниченными в окрестности четырех прямых линий $x_3 = \pm \sin\varphi \pm a(x_1 \pm \cos\varphi)$ ($a = [(\alpha^2 - \omega^2)/(\omega^2 - \omega_0^2)]^{1/2}$), являющихся характеристиками уравнения (4.18), проходящими через концы отрезка Г. Проведя подробные рассмотрения, можно показать, что

$$|\nabla w| \sim C\,[(x_3 \pm \sin\varphi)^2 - a^2(x_1 \pm \cos\varphi)^2]^{-1/4}.$$

Таким образом, здесь мы сталкиваемся с явлением «распространения» вдоль характеристик особенностей, которые возникают в окрестности концов отрезка Г.

В теореме 11 из рассмотрения были исключены случаи $\omega = \alpha$, ω_0 и $(\alpha^2 \cos^2 \varphi + \omega_0^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$. Эти случаи являются для задачи о существовании предельной амплитуды особыми. Мы не будем обсуждать причины как математического, так и физического свойства, выделяющие эти случаи, но все же отметим их некоторые особенности. При $\omega = \alpha$ и $\omega = \omega_0$ уравнение (4.18) оказывается вырожденным и имеет соответственно вид $u_{x_1x_1} = 0$ или $u_{x_3x_3} = 0$, что и обусловливает специфику этих случаев и математические трудности их изучения. В случае $\omega = (\alpha^2 \cos^2 \varphi + \omega_0^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$ своеобразие ситуации обусловлено тем, что отрезок Г, излучающий волны, оказывается лежащим на характеристике уравнений (4.18).

Заметим, что в физически интересном случае, когда отрезок Г колеблется как единое целое (в этом случае $f_0(s) \equiv 1$), оказывается возможным вычислить значение предельной амплитуды в явном виде, причем лишь через элементарные функции. Покажем это.

Отметим прежде всего, что при $f_0(s) \equiv 1$ плотность $\mu_0(s)$ оказывается равной

$$\mu_0(s) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{1-s^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - s}\, d\xi = -\frac{s}{\pi\sqrt{1-s^2}} = \frac{1}{\pi}\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}.$$

Подставляя $\mu_0(s)$ в формулу (4.17) для предельной амплитуды и проведя однократное интегрирование по частям в получившемся интеграле, можно свести его вычисление к вычислению интегралов

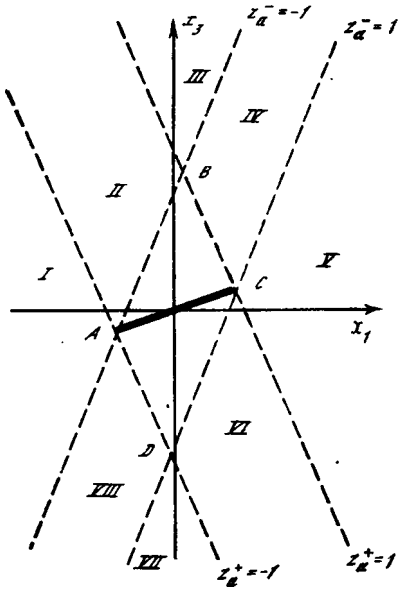


Рис. 1. Разбиения множества $R^2 \setminus \Gamma$ на области с различной предельной амплитудой $w(x)$

типа Коши, которые, в свою очередь, вычисляются с помощью известных методов теории функций комплексного переменного. Приведем окончательные формулы.

Рассмотрим вначале случай, когда $\omega < \min\{\alpha, \omega_0\}$ или $\omega > \max\{\alpha, \omega_0\}$ и уравнение (4.18) для предельной амплитуды является эллиптическим. Введем обозначения

$$z_b^{\pm} = \frac{bx_1 \pm ix_3}{b\cos\varphi \pm i\sin\varphi},$$

$$b = \left[\frac{\omega^2 - \alpha^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right]^{1/2}.$$

Тогда в рассматриваемом случае для предельной амплитуды будем иметь

$$w(x) = -(i/2)\{\sqrt{1 - (z_b^-)^2} + iz_b^- + \sqrt{1 - (z_b^+)^2} + iz_b^+\}.$$

Ветвь корня $\sqrt{1 - z^2}$ здесь выбирается следующим образом: точки ветвления $z = \pm 1$ соединены разрезом, представляющим собой отрезок вещественной оси z, и на верхнем берегу разреза $\sqrt{1 - z^2} = 1$ при $z = 0$.

В случае, когда $\min\{\alpha, \omega_0\} < \omega < \max\{\alpha, \omega_0\}$ и уравнение (4.18) является гиперболическим, аналогично предыдущему введем обозначения

$$z_a^{\pm} = \frac{ax_1 + x_3}{a\cos\varphi \pm \sin\varphi}, \qquad a = \left[\frac{\alpha^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right]^{1/2}$$

и будем для определенности считать, что $\omega_0 > \alpha$ и $a\cos\varphi - \sin\varphi > 0$. Легко видеть, что характеристики уравнения (4.18), проходящие через конец $x(1) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ отрезка Γ, могут быть записаны в виде равенств $z_a^+ = 1$, $z_a^- = 1$, а через конец $x(-1) = (-\cos\varphi, -\sin\varphi)$ — в виде $z_a^+ = -1$, $z_a^- = -1$ (см. рис. 1). Эти характеристики делят $R^2 \setminus \Gamma$ на области, обозначенные на рис. 1 цифрами I—$VIII$, а также на два треугольника: ABC и ACD. Запишем формулы для предельной амплитуды в рассматриваемом случае:

$$w(x) = (z_a^+ + z_a^-)/2 + {}^1/_2\{\varkappa_1[|1 - (z_a^+)^2|]^{1/2} + \varkappa_2[|1 - (z_a^-)^2|]^{1/2}\},$$

где величина $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2)$ определяется в зависимости от положения точки $x = (x_1, x_3)$. Приведем значения $\varkappa$:

$x \in$ обл. I, $\varkappa = (1, 1)$; $x \in$ обл. VI, $\varkappa = (-i, -1)$;

$x \in$ обл. II, $\varkappa = (i, 1)$; $x \in$ обл. VII, $\varkappa = (1, -1)$;

$x \in$ обл. III, $\varkappa = (-1, 1)$; $x \in$ обл. $VIII$, $\varkappa = (1, i)$;

$x \in$ обл. IV, $\varkappa = (-1, -i)$; $x \in \triangle ABC$, $\varkappa = (i, -i)$;

$x \in$ обл. V, $\varkappa = (-1, -1)$; $x \in \triangle ACD$, $\varkappa = (-i, i)$.

Из приведенных формул легко вывести, что предельная амплитуда в областях I, III, V и VII убывает как $O(\rho^{-1})$, где ρ — расстояние до ближайшей характеристики $z_\alpha^{\pm} = \pm 1$. В областях же II, IV, VI и $VIII$ справедлива оценка $|w| = {}^1/_2 + O(|x|^{-1})$.

Ограничимся сказанным о поведении предельной амплитуды в рассматриваемом примере, имея в виду, что приведенные формулы настолько элементарны, что читатель без особого труда проанализирует их сам.

5. Установившиеся колебания

В этом разделе мы рассмотрим установившиеся волновые движения в стратифицированной вращающейся и сжимаемой жидкости и приведем классификацию типов этих движений. Эту классификацию мы будем основывать на сравнении типов уравнений для амплитудных функций установившихся волн и характера фундаментальных решений, отвечающих этим уравнениям.

Итак, рассмотрим установившийся колебательный процесс частоты ω в жидкости, описываемой общим уравнением (1.8) динамики стратифицированной вращающейся сжимаемой жидкости. В случае установившихся колебаний функция $u(x, t)$ зависит от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, т. е. $u(x, t) = u(x)\exp(-i\omega t)$, где функция $u(x)$ называется амплитудной и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \alpha^2} \Delta_2 u - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2\right) u = 0, \tag{5.1}$$

вытекающему из уравнения (1.8) с учетом (1.9).

При рассмотрении установившихся колебаний мы не будем обсуждать вырожденные случаи уравнения (5.1), возникающие при $\omega = \omega_0, \alpha$. Читатель без труда разберет их сам.

Обозначим через a^2 и $\varkappa^2$ следующие величины:

$$\frac{1}{a^2} = \left|\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \alpha^2}\right| \quad \text{и} \quad \varkappa^2 = \left|\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2\right|.$$

Тогда в зависимости от соотношения между параметрами, входящими в коэффициенты уравнения (5.1), оно может быть записано в одном

из следующих четырех видов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{1}{a^2}\Delta_2 u + \varkappa^2 u = 0, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{1}{a^2}\Delta_2 u - \varkappa^2 u = 0, \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{1}{a^2}\Delta_2 u - \varkappa^2 u = 0, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{1}{a^2}\Delta_2 u + \varkappa^2 u = 0. \tag{5.5}$$

Обсудим уравнения (5.2)—(5.5) и те значения параметров ω, ω_0, α и βc, при которых эти уравнения возникают. При этом будем иметь в виду, что всегда $\omega_0^2 = 2\beta g - g^2/c^2 \leqslant \beta^2 c^2$, последнее является очевидным следствием соотношения

$$\beta^2 c^2 - 2\beta g + g^2/c^2 = (\beta c - g/c)^2 \geqslant 0.$$

1. *Случай акустических волн.* Этот случай описывается уравнением (5.2) и имеет место тогда, когда величина частоты ω установившихся колебаний превосходит значения параметров ω_0, α и βc, т. е. при

$$\omega > \max\{\beta c,\ \alpha\}.$$

В этом случае установившиеся колебания в жидкости определяются ее сжимаемостью, т. е. связаны с конечностью скорости звука c. Если устремить c к бесконечности, т. е. перейти к несжимаемой жидкости, то уравнение (5.1) в зависимости от значений параметров ω, $\omega_0|_{c=\infty} = 2\beta g$ и c может принять лишь вид уравнений (5.3) и (5.5). Иначе говоря, в несжимаемой жидкости установившиеся волны ни при каких значениях параметров не могут описываться уравнением (5.2). Напротив, если положить $\omega_0 = 0$ и $\alpha = 0$ и тем самым пренебречь стратификацией и вращением, то уравнение (5.2) сохраняет свой вид при $a^2 = 1$ и $\varkappa^2 = \omega^2/c^2$ и является классическим уравнением, возникающим в акустике.

Известно, что фундаментальным решением уравнения (5.2), удовлетворяющим классическим условиям излучения А. Зоммерфельда [14], является функция

$$E_1(x) = -(a^2/4\pi)\, e^{i\varkappa R(x)}/R(x),$$

где $R(x) = (a^2x_1^2 + a^2x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Поскольку фундаментальное решение интерпретируется как решение, описывающее волны, излучаемые точечным источником, то из вида функции $E_1(x)$ можно утверждать, что в отличие от классического случая здесь от точечного источника распространяются не сферические волны, а волны, которые можно назвать эллипсоидальными. При этом эллипсоид равных фаз, или гребней волн, является эллипсоидом вращения и вытянут или сплюснут в зависимости от значений параметра a.

2. *Случай поверхностных волн.* Этот случай имеет место, если параметры уравнения (5.1) находятся в одном из двух соотношений

$$\beta c \geqslant \omega > \max\{\omega_0, \alpha\}, \quad \omega < \min\{\omega_0, \alpha\}, \tag{5.6}$$

и описывается уравнением (5.3).

Уравнение (5.3) обладает тем свойством, что является уравнением, для которого справедлив принцип максимума [17], и, следовательно, уравнением, которое в принципе не может описывать волновые движения. Это подтверждает и явный вид его фундаментального решения

$$E_2(x) = -(a^2/4\pi)\,[\exp(-\varkappa R(x))]/R(x).$$

Однако сказанное нуждается в уточнении. Оказывается, если область, занимаемая жидкостью, не совпадает со всем пространством R^3, а имеет некоторую граничную поверхность Г, то при определенных граничных условиях на этой поверхности становится возможным существование так называемых поверхностных волн. Эти волны распространяются вдоль граничной поверхности Г, быстро убывая (как правило экспоненциально) по мере удаления от нее.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий сказанное. Пусть стратифицированная вращающаяся сжимаемая жидкость, описываемая уравнением (5.3), занимает полупространство $R^3_- = \{x \in R^3: x_3 < 0\}$, причем на граничной поверхности $x_3 = 0$ задано условие (1.4) свободной поверхности, которое с учетом формул (1.6) и временной зависимости $\exp(-i\omega t)$ в терминах функции $u(x)$ имеет вид

$$\partial u/\partial x_3 + (\beta - \omega^2/g)\,u\,|_{x_3=0} = 0. \tag{5.7}$$

(В случае свободной поверхности $x_3 = 0$ эффективное ускорение свободного падения совпадает с g). Легко проверить, что при выполнении первого из неравенств (5.6) уравнение (5.3) с условием (5.7) имеет частное решение вида

$$u = A \exp[\mu x_3 \pm i a x_1 (\mu^2 - \varkappa^2)^{1/2}], \tag{5.8}$$

где $\mu = -\beta + \omega^2/g$. Вычисляя соответствующий частному решению (5.8) вектор скорости частиц жидкости, получаем:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(A, \mu, \varkappa) \exp[(\omega^2/g)\, x_3 \pm i a x_1 (\mu^2 - \varkappa^2)^{1/2}], \tag{5.9}$$

где $\mathbf{v}(A, \mu, \varkappa)$ — амплитудный вектор. Выражение (5.9) описывает поверхностную волну, экспоненциально убывающую в глубь жидкости.

Таким образом, при выполнении одного из неравенств (5.6) в стратифицированной вращающейся жидкости возможно существование лишь поверхностных волн.

3. *Внутренние волны класса* h_1. В случае, когда параметры уравнения (5.1) удовлетворяют системе неравенств

$$\min\{\alpha, \omega_0\} < \omega < \max\{\alpha, \omega_0\}, \quad \omega < \beta c, \tag{5.10}$$

оно принимает вид (5.4). Уравнение (5.4), а также уравнение (5.5) как уравнения для амплитуды установившихся колебаний представляют наибольший интерес, поскольку они являются уравнениями гиперболического типа, а не эллиптического, привычного для классических задач теории установившихся колебаний. Этот интерес обусловлен не только типом уравнений, но и физическими следствиями, в которых особенно наглядно проявляется влияние стратификации и вращения на поведение установившихся колебаний в жидкости, близкой к несжимаемой.

Для того чтобы представить себе характер установившихся волн, описываемых уравнением (5.4), рассмотрим его фундаментальное решение. Оно имеет вид

$$E_3(x) = (ia^2/4\pi)[\exp(i\varkappa R_*(x))]/R_*(x), \tag{5.11}$$

где

$$R_*(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2(x_1^2+x_2^2)-x_3^2} & \text{при } |x_3| \leqslant a\sqrt{x_1^2+x_2^2}, \\ i\sqrt{x_3^2-a^2(x_1^2+x_2^2)} & \text{при } |x_3| \geqslant a\sqrt{x_1^2+x_2^2}. \end{cases}$$

Фундаментальное решение $E_3(x)$ удовлетворяет условиям излучения в том смысле, что описывает волны, уносящие энергию на бесконечность. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно вычислить вектор плотности потока энергии $\Pi = \mathrm{Re}\,(p\mathbf{v})$, отвечающий фундаментальному решению $E_3(x)$.

Вектор плотности потока энергии определяется из локального закона сохранения энергии

$$\partial\varepsilon/\partial t + \operatorname{div}\Pi = 0,$$

где ε — плотность энергии. Для системы (1.1) величины ε и Π определяются равенствами

$$\Pi = p\mathbf{v}, \quad \varepsilon = {}^1/_2\rho_0 |\mathbf{v}|^2 + (g/2\rho_0\omega_0^2c^2)\,U(p, \rho_1),$$

где $U(p, \rho_1)$ — положительно определенная квадратичная форма:

$$U(p, \rho_1) = (|\rho_0'|/\rho_0)\,p^2 - 2gp\rho_1 + gc^2\rho_1^2.$$

Введем в рассмотрение характеристический конус $\mathbf{K}$ уравнения (5.4), т. е. $\mathbf{K} \equiv \{(x_1, x_2, x_3): x_3^2 = a^2(x_1^2 + x_2^2)\}$. Обсудим некоторые характерные свойства волн, описываемых фундаментальным решением $E_3(x)$ уравнения (5.4).

Характеристический конус $\mathbf{K}$ делит пространство R^3 на два подмножества, различающиеся по характеру волновых движений. Первое из них является объединением полостей конуса $\mathbf{K}$, т. е. множеством точек $\{x: x_3^2 > a^2(x_1^2 + x_2^2)\}$. Здесь, как показывает (5.11), волновые движения отсутствуют и амплитуда колебаний жидкости экспоненциально убывает с удалением от начала координат. При этом поток энергии равен нулю — в этих областях энергия от источника не распространяется.

В окрестности поверхности конуса $\mathbf{K}$ амплитуда колебаний оказывается неограниченной и возрастает по мере приближения к поверх-

ности конуса вне его вершины как $r_1^{-1/2}$, где $r_1 = \rho(x, \mathbf{K})$ — расстояние до поверхности $\mathbf{K}$. В окрестности же вершины амплитуда растет как r^{-1} ($r = |x|$). Таким образом, особенности фундаментального решения (5.11) распределены по поверхности характеристического конуса $\mathbf{K}$, что вполне согласуется с общими результатами о свойствах фундаментальных решений негипоэллиптических операторов [18]. Указанное распределение особенностей нашло свое экспериментальное подтверждение в классических опытах Моубрея и Рерити [19].

Рассмотрим область, лежащую вне конуса $\mathbf{K}$. Здесь возникает своеобразное волновое движение с интересными и необычными поверхностями равных фаз (гребнями волн). Эти поверхности образуют семейство однополостных гиперболоидов вращения с общей асимптотической поверхностью, совпадающей с характеристической поверхностью. Установившиеся волны с такими поверхностями равных фаз мы называем гиперболическими волнами класса h_1. Отметим, что в рассматриваемом здесь случае именно эти волны переносят энергию на бесконечность, причем их амплитуда убывает как $|x|^{-1}$.

4. *Внутренние волны класса h_2.* Очень близким с математической точки зрения к уравнению (5.4), рассмотренному выше, является уравнение (5.5), к которому сводится основное уравнение (5.1) в случае следующего соотношения параметров:

$$\omega_0 < \beta c < \omega < \alpha. \tag{5.12}$$

Уравнение (5.5), как уже отмечалось, является уравнением гиперболического типа. Фундаментальное решение уравнения (5.5), удовлетворяющее условиям излучения в указанном выше смысле, имеет вид

$$E_4(x) = -(ia^2/4\pi)\,[\exp(-\varkappa \bar{R}_*(x))]/\bar{R}_*(x),$$

где $R_*(x)$ определена выше, а черта над $R_*(x)$ обозначает комплексное сопряжение.

Вводя, как и ранее, характеристический конус $\mathbf{K}$, опишем картину волновых движений, возникающих от точечного источника, описываемого фундаментальным решением $E_4(x)$. Отметим, что образующаяся в этом случае волновая картина будет в некотором смысле обратной той, что мы имели в предыдущем случае. А именно, в области вне полостей конуса $\mathbf{K}$ в данном случае отсутствуют волновые движения и амплитуда колебаний экспоненциально убывает при удалении от начала координат. В областях же, лежащих внутри полостей конуса $\mathbf{K}$, наоборот, возникают волновые движения с поверхностями равных фаз, образующих семейство двухполостных гиперболоидов вращения с асимптотической поверхностью — характеристическим конусом $\mathbf{K}$. Эти волны мы называем гиперболическими волнами класса h_2. Как и в предыдущем случае, они переносят энергию от точечного источника на бесконечность и в области распространения их амплитуда убывает как $|x|^{-1}$. Здесь аналогично предыдущему конус $\mathbf{K}$ является носителем особенностей фундаментального решения $E_4(x)$.

Итак, мы видим, что в зависимости от величин параметров, описывающих стратифицированную вращающуюся сжимаемую жидкость, возникают существенно различные математические и физические ситуации. В частности, в последних двух случаях установившиеся колебания описываются уравнениями гиперболического типа. Это приводит к новым, нетрадиционным постановкам задач — к краевым задачам для гиперболических уравнений. К каким особенностям исследования этих задач и их результатам это приводит, можно проиллюстрировать на примере задач дифракции установившихся гиперболических волн класса h_1, которые мы рассмотрим в следующем разделе.

6. Задачи дифракции

1. В настоящем разделе мы ограничимся рассмотрением модели двумерных движений экспоненциально-стратифицированной жидкости, динамика которой описывается уравнением внутренних волн (1.12)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\Delta_\perp u - \beta^2 u] + \omega_0^2 u_{x_1x_1} = 0, \tag{6.1}$$

записанным в переменных $(x_1, x_3) \in R^2$ ($\Delta_\perp$, как и выше, лапласиан переменных (x_1, x_3)).

Если рассмотреть решения (6.1) в виде плоских волн $\exp\{i(k_1x_1 + k_3x_3 - \omega t)\}$, зависящих от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, то легко видеть, что дисперсионное соотношение, отвечающее уравнению (6.1), имеет вид $\omega^2 = \omega_0^2 k_1^2/(k_1^2 + k_3^2 + \beta^2)$, где $\mathbf{k} = (k_1, k_3)$ — волновой вектор. Для групповой скорости $\mathbf{v}_g$ при этом будет справедлива формула

$$\mathbf{v}_g = \omega_0 (k_1^2 + k_3^2 + \beta^2)^{-3/2} \operatorname{sgn}(k_1) \cdot \mathbf{G} = \operatorname{grad}_k \omega(k),$$

где $\mathbf{G} = (k_3^2 + \beta^2, -k_1k_3)$. Легко видеть, что направления векторов $\mathbf{v}_g$ и $\mathbf{k}$ не совпадают, за исключением того случая, когда $k_3 = 0$. В силу этого в дальнейшем, говоря о направлении распространения волн, будем иметь в виду направление вектора $\mathbf{v}_g$, а не $\mathbf{k}$, так как направление $\mathbf{v}_g$ определяет направление потока энергии в волне. Кроме того, из дисперсионного соотношения следует, что решения типа плоских волн возможны только при $\omega < \omega_0$. В дальнейшем мы будем рассматривать именно этот случай соотношения частот.

Уравнение (6.1) для амплитудной функции в случае выбранной установившейся зависимости от времени, т. е. $u(x, t) = u(x)\exp((-i\omega t)$. $\omega < \omega_0$, принимает вид двумерного аналога уравнения (5.4):

$$u_{x_3x_3} - \frac{1}{a^2} u_{x_1x_1} - \beta^2 u = 0, \quad \frac{1}{a^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1, \tag{6.2}$$

описывающего гиперболические волны класса h_1.

Для того чтобы проиллюстрировать характерные особенности задач дифракции как граничных задач для гиперболических уравнений, рассмотрим задачу о дифракции плоской волны на полуплоскости, находящейся в стратифицированной жидкости. Эта задача является соответствующим аналогом классической задачи А. Зоммерфельда [20].

2. Обратимся к постановке задачи. Пусть из бесконечности при $x_1 < 0$ на полуплоскость $\Gamma \equiv \{(x_1, x_3)\colon x_1 = 0, \quad x_3 < 0\}$, вертикально расположенную в стратифицированной жидкости, падает плоская волна $u_0 = \exp\{-ikx_3 + i\mu x_1\}$, где $k^2 + \beta^2 = \mu^2/a^2$. Отметим, что с точки зрения групповой скорости плоская волна u_0 падает из бесконечности области $x_1 < 0$, $x_3 < 0$ на ребро полуплоскости Γ (предполагается, что k и μ положительны). Будем считать, что на Γ выполняется граничное условие $u|_\Gamma = 0$, которому можно придать смысл условия непротекания [21].

Если в области $x_1 < 0$ полное волновое поле u_Σ представить в виде $u_\Sigma = u_0 + u_1 + u$, где $u_1 = -\exp\{-ikx_3 - i\mu x_1\}$ — отраженная от Γ волна, а в области $x_1 > 0$ полное поле u_Σ обозначить через u, то математически задача о дифракции волны u_0 на Γ может быть сформулирована следующим образом. Найти функцию $u(x)$, определенную и непрерывную в области $R^2 \setminus \Gamma$, удовлетворяющую в обобщенном смысле вне оси Ox_3 уравнению (6.2) и следующим граничным условиям и условиям сопряжения:

$$\begin{aligned} &u|_\Gamma = u(\pm 0, x_3) = 0, \ x_3 < 0, \\ &u(+0, x_3) = u(-0, x_3), \ x_3 > 0, \\ &u_{x_1}(+0, x_3) - u_{x_1}(-0, x_3) = 2i\mu e^{-ikx_3}, \ x_3 > 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Кроме этого, необходимо поставить условия на ребре (0, 0) и характеристиках (6.2), проходящих через это ребро (т. е. на линиях $x_3 = \pm ax_1$), а также условия излучения.

Условия на ребре и характеристиках могут быть, как обычно, конкретизированы из следующего физического принципа: поток энергии через любую поверхность (в данном случае кривую), окружающую ребро, должен быть конечен и стремиться к нулю при стремлении к нулю меры поверхности. Использование этого принципа приводит к формулировке условий на ребре и характеристиках в виде требования того, что

$$|\nabla u| \sim O[(x_3^2 - a^2x_1^2)^{-1/4}] \tag{6.4}$$

в окрестности ребра и характеристик $x_3 = \pm ax_1$.

Условия излучения сформулируем в виде требования, чтобы волны, возникающие в результате дифракции, уносили энергию на бесконечность. Для того чтобы формализовать процесс выделения таких волн, воспользуемся принципом, который по своей сути является принципом предельного поглощения. При построении решения задачи (6.2)—(6.4) будем предполагать, что величина a имеет

положительную мнимую часть, т. е. $a = a_1 + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при этом $k = k_1 - i\delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0 + 0$. Решение задачи (6.2)—(6.4) с комплексными величинами a и k будем искать в классе функций, удовлетворяющих на бесконечности условию

$$|u| + |\nabla u| \leqslant C_\varepsilon \exp[-c(\varepsilon)|x|] \text{ при } |x| \to +\infty, \qquad (6.5)$$

где $0 < c(\varepsilon) < \min\{\varepsilon, \delta(\varepsilon)\}$. В окончательных результатах устремим $\varepsilon \to 0 + 0$ и получим решение задачи (6.2)—(6.4) с вещественными a и k, удовлетворяющее условиям излучения.

По постановке задачи (6.2)—(6.4) ясно, что она не может иметь классического решения. Под решением задачи (6.2)—(6.4) будем понимать непрерывную в $R^2 \setminus \Gamma$ функцию $u(x)$, имеющую непрерывные частные производные первого порядка в любой компактной подобласти $R^2 \setminus \Gamma$, не содержащей характеристик $x_3 = \pm a x_1$, и удовлетворяющую уравнению (6.2) в обобщенном смысле, а условиям (6.3) — в классическом.

Указанное решение, удовлетворяющее условиям излучения, может быть построено на основе метода Винера—Хопфа [21, 22] и имеет вид

$$u(x) = -\frac{(k+i\beta)^{1/2}}{2\pi i \beta^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\{ia(p^2+1)^{1/2}\beta|x_1| - ip\beta x_3\}}{(p-k/\beta)(p+i)^{1/2}}\, dp. \qquad (6.6)$$

Интегрирование в (6.6) ведется по вещественной оси p, при этом полюс $p = k\beta^{-1}$ обходится сверху.

3. Обсудим решение (6.6). По аналогии с трехмерным случаем введем в рассмотрение характеристический конус $\mathbf{K}$ как множество точек $(x_1, x_3) \in R^2$, лежащих в области, ограниченной прямыми $x_3 = \pm a x_1$ и содержащей ось Ox_3.

Справедливо следующее представление функции (6.6) через интегралы Френеля комплексного аргумента:

$$u(x) = \pi^{-1/2} \exp[i\beta r_* \operatorname{ch}(\psi - \psi_0) + i\pi/4]\, F(\sqrt{2\beta r_*}\operatorname{sh}((\psi - \psi_0)/2)) -$$
$$- \pi^{-1/2} \exp[i\beta r_* \operatorname{ch}(\psi + \psi_0) + i\pi/4]\, F(\sqrt{2\beta r_*}\operatorname{sh}((\psi + \psi_0)/2)), \qquad (6.7)$$

где $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \exp(-iv^2)\, dv$ — интеграл Френеля и

$$r_* = \begin{cases} \sqrt{a^2x_1^2 - x_3^2} & \text{при } a|x_1| \geqslant |x_3|, \\ i\sqrt{x_3^2 - a^2x_1^2} & \text{при } a|x_1| \leqslant |x_3|. \end{cases}$$

Величины ψ и ψ_0 определяются следующим образом:

1) величина $\psi_0 = \psi_{01} + i\pi/2$ и такова, что $\mu = -i\beta \operatorname{sh}\psi_0$ или $\mu = \beta \operatorname{ch}\psi_{01}$, где ψ_{01} — вещественна;

2) если (x_1, x_3) лежит вне характеристического конуса $\mathbf{K}$, т. е. при $a|x_1| > |x_3|$, то $\psi = \psi_1 + i\pi/2$, $a|x_1| = -ir_* \operatorname{sh}\psi = r_* \operatorname{ch}\psi_1$, $x_3 = -ir_* \operatorname{ch}\psi = r_* \operatorname{sh}\psi_1$, где ψ_1 вещественна и $\operatorname{th}\psi_1 = x_3/(a|x_1|)$;

3) если $(x_1, x_3) \in \mathbf{K}$ и $x_3 > 0$, т. е. $x_3 > a \mid x_1 \mid$, то $\psi = \psi_1$ и $a \mid x_1 \mid = -ir_* \operatorname{sh} \psi$, $x_3 = -ir_* \operatorname{ch} \psi$, причем ψ_1 положительна и $\operatorname{cth} \psi_1 = x_3/(a \mid x_1 \mid)$;

4) и, наконец, если $(x_1, x_3) \in \mathbf{K}$, $x_3 < 0$, то $\psi = \psi_1 + i\pi$, величина ψ_1 отрицательна и $\operatorname{cth} \psi_1 = x_3 / (a \mid x_1 \mid)$, а также $a \mid x_1 \mid = -ir_* \operatorname{sh} \psi$, $x_3 = -ir_* \operatorname{ch} \psi$.

Отметим, что использованные здесь величины (r_*, ψ) носят название псевдополярных координат.

Наличие представления (6.7) решения задачи через хорошо изученные интегралы Френеля позволяет без особого труда изучить его поведение в окрестности ребра и характеристик, в частности убедиться в справедливости оценки (6.4).

Для удобства дальнейших рассмотрений введем полярные координаты (r, θ) с центром на ребре $(0, 0)$, принимая за полярную ось направление оси Ox_3. Угол θ будем отсчитывать против часовой стрелки, тогда $x_3 = r \cos \theta$, $-x_1 = r \sin \theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Введем углы θ_c и θ_0, определяемые соотношениями $\operatorname{ctg} \theta_c = a$ и $\operatorname{ctg} \theta_0 = a^2 k/\mu$. Угол θ_c равен углу, который характеристики $x_3 = \pm a x_1$ составляют с осью Ox_3. Величина угла θ_0, в свою очередь, равна абсолютной величине угла, который составляет вектор групповой скорости $\mathbf{v}_g$ падающей волны u_0 с осью Ox_3. Вся область волнового поля $R^2 \setminus \Gamma$ может быть разбита на две подобласти: «освещенная подобласть», определяемая неравенствами $-\theta_0 < \theta \leqslant \pi$, и «зона тени», отвечающая углам $-\pi \leqslant \theta < -\theta_0$.

Для полного волнового поля u_Σ справедливы следующие формулы. В «освещенной» области

$$u_\Sigma = u_0 + \begin{cases} u_d^{(1)}, & \theta \in (-\theta_0, -\theta_c) \cup (\theta_c, \theta_0), \\ u_d^{(2)}, & \theta \in (-\theta_c, \theta_c), \\ u_d^{(1)} + u_1, & \theta \in (\theta_0, \pi - \theta_c), \\ u_d^{(2)} + u_1, & \theta \in ((\pi - \theta_c), \pi], \end{cases} \tag{6.8}$$

в «зоне тени»

$$u_\Sigma = \begin{cases} u_d^{(1)}, & \theta \in (-(\pi - \theta_c), -\theta_0), \\ u_d^{(2)}, & \theta \in [-\pi, -(\pi - \theta_c)), \end{cases} \tag{6.9}$$

где функции $u_d^{(1)}$ и $u_d^{(2)}$ описываются асимптотическими формулами

$$u_d^{(1)} = \frac{\{\beta (k + i\beta) [\cos \theta - i\psi(\theta)]\}^{1/2}}{k\psi(\theta) - \beta \cos \theta} \sqrt{\frac{1}{2\pi\beta r}} \times$$
$$\times \exp\left[i\beta r \psi(\theta) - i\frac{\pi}{4}\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta r}\right)\right],$$

$$u_d^{(2)} = -\frac{\{\beta (k + i\beta) [\cos \theta + \varphi(\theta)]\}^{1/2}}{k\varphi(\theta) + i\beta \cos \theta} \sqrt{\frac{1}{2\pi\beta r}} \times$$
$$\times \exp\left[-\beta r \varphi(\theta) + i\frac{\pi}{4}\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{\beta r}\right)\right],$$

возникающими при оценке интеграла (6.6) в случае $\beta r \gg 1$. Функции $\psi(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ определяются формулами $\psi(\theta) = (a^2 \sin^2\theta - \cos^2\theta)^{1/2}$ и $\varphi(\theta) = (\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)^{1/2}$.

Формулы (6.8), (6.9) позволяют получить представление о возникшей в результате дифракции волновой картине. Их анализ показывает, что все дифракционные эффекты описываются в формулах (6.8), (6.9) слагаемыми $u_d^{(1)}$ и $u_d^{(2)}$. Что касается остальных членов в этих формулах, то они показывают, что в нулевом приближении, без учета дифракции, волновая энергия распространяется в соответствии с законами геометрической оптики.

Обсудим дифракционные члены. Рассмотрим вначале область вне характеристического конуса **K**. Здесь дифракционные эффекты описываются членом $u_d^{(1)}$, который показывает, что возникающие в результате дифракции волны представляют собой двумерный аналог гиперболических волн класса h_1. Гребни этих волн образуют семейство гипербол с общими асимптотами, совпадающими с характеристиками $x_3 = \pm a x_1$. Амплитуда этих волн убывает как $(\beta r)^{-1/2}$. Внутри характеристического конуса **K** эффекты дифракции описываются членом $u_d^{(2)}$, показывающим , что дифракционное поле носит в направлении r неволновой характер и быстро экспоненциально убывает по мере удаления от ребра.

Сказанное выше позволяет сделать вывод о своеобразии возникающей дифракционной картины и ее принципиальном отличии от аналогичных картин, возникающих в классических дифракционных задачах.

В заключение заметим, что систематическое исследование задач дифракции для гиперболических уравнений началось сравнительно недавно [23] и число работ, посвященных этому вопросу, пока невелико [21—27].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в технику сплошных сред. М.: Наука. 1982. 329 с.
2. Гидродинамика невесомости/Под ред. Мышкиса А. Д. М.: Наука, 1976. 504 с.
3. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965. 790 с.
5. *Зеленяк Т. И.* Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1970. 159 с.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
7. *Капитонов Б. В.* Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости.— Мат. сб., 1979, т. 109, № 4, с. 607—628.
8. *Габов С. А., Шевцов П. В.* Основные краевые задачи для уравнения колебаний стратифицированной жидкости.— Докл. АН СССР, 1983, т. 268, № 6, с. 1293—1296.
9. Основные начально-краевые задачи для одного уравнения составного типа/ Шевцов П. В.; МГУ. М., 1983. 30 с. Библиогр.: 5 назв. Рукопись деп. в ВИНИТИ 13.07.83, № 3882—83 Деп.

10. *Габов С. А., Шевцов И. В.* Об одном дифференциальном уравнении типа уравнения С. Л. Соболева.— Докл. АН СССР, 1984, т. 276, № 1, с. 14—17.
11. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики.— Изв. АН СССР. Сер. Мат., 1954, т. 18, № 1, с. 3—50.
12. *Копсон Э. Т.* Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966. 159 с.
13. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
14. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 724 с.
15. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. 678 с.
16. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1962. 599 с.
17. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
18. *Шилов Г. Е.* Математический анализ: Второй специальный курс. М.: Физматгиз, 1965. 327 с.
19. *Mowbray D., Rarity R.* A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in density stratified liquid.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 28, pt. 1, p. 1—18.
20. *Нобл Б.* Метод Винера—Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
21. *Габов С. А.* Об одной задаче дифракции волн, описываемых уравнением Клейна—Гордона.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1982, т. 22, № 6, с. 1513—1518.
22. *Габов С. А.* Дифракция внутренних волн, описываемых уравнением Клейна—Гордона, на полуплоскости.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 1, с. 73—75.
23. *Larsen L. H.* Internal waves incident upon a knife edge barrier.— Deep-Sea Res., 1969, vol. 16, N 5, p. 411—419.
24. *Габов С. А., Свешников А. Г.* О дифракции внутренних волн на кромке ледового поля.— Докл. АН СССР, 1982, т. 265, № 1, с. 16—20.
25. *Габов С. А., Свешников А. Г., Шатов А. К.* Рассеяние волн, описываемых уравнением Клейна—Гордона, наклонной полуплоскостью.— Докл. АН СССР, 1983, т. 268, № 5, с. 1095—1098.
26. *Шатов А. К.* О распространении плоских волн в сжимаемой стратифицированной жидкости и их дифракции на полуплоскости.— Докл. АН СССР, 1984, т. 275, № 2, с. 318—322.
27. *Варламов В. В.* Дифракция внутренних волн в стратифицированной жидкости на полубесконечной стенке.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1983, т. 23, № 1, с. 127—134.
28. *Каменкович В. М.* Основы динамики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1973. 240 с.
29. *Филлипс О.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 320 с.
30. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 299 с.

УДК 517.956:536.2

КВАЗИЛИНЕЙНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СО СЛОЖНЫМ СПЕКТРОМ НЕОГРАНИЧЕННЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, С. А. Посашков, А. А. Самарский

1. Введение

В последние годы в теории нелинейных эволюционных уравнений с частными производными значительное внимание уделяется исследованию решений с точками «сингулярности» по времени. В частности, к ним относятся так называемые неограниченные решения, или режимы с обострением. Наличие у эволюционной задачи неограниченного решения означает ее глобальную неразрешимость по времени (несуществование глобального решения). Такие неограниченные решения допускают широкие классы нелинейных эволюционных уравнений различных типов (см., например, обзор в [1]).

При этом выяснилось, что в процессе эволюции при временах, близких к моменту обострения, т. е. к точке сингулярности по времени, многие неограниченные решения проявляют некоторые общие черты. В первую очередь это относится к *эффекту локализации режимов с обострением*, это свойство в той или иной степени присуще неограниченным решениям уравнений различных типов (см. список литературы в [1]). Сейчас в наибольшей степени изучены неограниченные решения отдельных классов квазилинейных параболических уравнений нелинейной теплопроводности с источником (см. [2—10] и библиографию в [1, 2, 9, 11]), а также полулинейных уравнений Шредингера (см. [12—18] и др.).

В настоящей работе на примере конкретной задачи для квазилинейного параболического уравнения рассматриваются некоторые из аспектов новых проблем, которые сформулировала теория неограниченных решений нелинейных эволюционных уравнений.

Нелинейное дифференциальное параболическое уравнение и некоторые предварительные сведения

В работе изучается один класс неограниченных автомодельных решений квазилинейного параболического уравнения

$$u_t = \nabla\,(|\,\nabla u\,|^{\sigma}\,\nabla u) + u^{\beta},\ t > 0,\ x \in R^N, \tag{1.1}$$

где $\sigma > 0$, $\beta > 1$ — фиксированные постоянные; $\nabla\,(\cdot) = \mathrm{grad}_x\,(\cdot) \equiv \equiv (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_N)(\cdot)$. В определенных предположениях (1.1)

можно рассматривать как уравнение диффузии тепла в сплошной среде с коэффициентом теплопроводности $k = |\nabla u|^\sigma \geqslant 0$, зависящим от градиента температуры $u = u(t, x) \geqslant 0$. При этом в среде имеется объемное энерговыделение, мощность источника тепла $Q = u^\beta \geqslant 0$ в каждой точке пространства определяется величиной температуры.

Для (1.1) рассматривается задача Коши, т. е. процесс горения инициируется заданием начального температурного возмущения

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in R^N; \qquad u_0 \in W_{\text{loc}}^{1,\,\sigma+2}(R^N). \tag{1.2}$$

Хорошо известно, что за счет интенсивного энерговыделения ($\beta > 1$) процесс горения может происходить в так называемом режиме с обострением. Другими словами, задача Коши (1.1), (1.2) не имеет глобального по времени решения и в некоторый момент времени $t = T_0 < +\infty$ (момент обострения) амплитуда решения становится бесконечно большой:

$$\sup_{x \in R^N} u(t, x) \to +\infty, \quad t \to T_0^- \tag{1.3}$$

(см. [1,2] и приведенный там список литературы). При этом вплоть до момента обострения при всех $0 < t < T_0$ неотрицательное непрерывное решение задачи ограничено и, вообще говоря, является обобщенным. Оно может не иметь всех производных, входящих в (1.1), однако функция $|\nabla u(t, x)|$ непрерывна всюду в $(0, T_0) \times \times R^N$ (см. по этому поводу [19]). С физической точки зрения это означает непрерывность теплового потока, равного $W = -|\nabla u|^\sigma \nabla u$.

Условия глобальной разрешимости и неразрешимости в целом задачи Коши для (1.1) получены в [20] (см. также приведенную там библиографию), где показано, что при любых $1 < \beta < \sigma + 1 + (\sigma + 2)/N$ все нетривиальные решения задачи являются неограниченными в смысле (1.3). Если же $\beta > \sigma + 1 + (\sigma + 2)/N$, то в зависимости от величины начального возмущения возможны как глобальные (определенные при всех $t \geqslant 0$), так и неограниченные решения.

Следующий этап исследования состоял в изучении некоторых общих свойств неограниченных решений задачи Коши[1], в частности свойства локализации. Неограниченное решение называется локализованным, если оно возрастает до бесконечности при $t \to T_0^-$ ($t = T_0$ — момент обострения) в области ограниченных размеров. И наоборот, если $u(t, x) \to +\infty$ при $t \to T_0^-$ всюду в R^N, то локализация отсутствует. В [20] установлено, что для (1.1) последнее

---

[1] Это исследование во многом повторяет анализ свойств неограниченных решений нелинейного параболического уравнения с иным, чем в (1.1), характером нелинейности:

$$u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta, \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1. \tag{1.4}$$

Основные этапы исследования (1.4) отражены в кратком обзоре, помещенном в работе [1] (см. об этом ниже).

имеет место при всех $\beta \in (1, \sigma + 1)$. С помощью численных расчетов, а также некоторых качественных оценок в [20] было показано, что в случае $\beta \geqslant \sigma + 1$ решения локализованы [2].

В данной работе изучается «тонкая структура» неограниченных локализованных автомодельных решений задачи Коши (1.1), (1.2) при $\beta > \sigma + 1$ (в случае $\beta = \sigma + 1$, когда также существует локализация, асимптотические свойства решений задачи описываются автомодельным решением, построенным в [20]). Пользуясь терминологией [2], скажем, что ниже дается описание собственных функций горения рассматриваемой нелинейной диссипативной среды с объемным энерговыделением.

Есть основание надеяться, что неограниченные автомодельные решения уравнения (1.1), построение которых начинается в данной работе, в конечном итоге дадут возможность конструктивно описать асимптотическое поведение неограниченных решений задачи Коши вблизи точки сингулярности (момента обострения) $t = T_0$. Автомодельные решения являются асимптотически устойчивыми, по крайней мере в некоторых диапазонах параметров σ и β.

Надо сказать, что проблема исследования характера «сингулярности» физических процессов является сейчас весьма острой в значительной степени из-за широкого распространения (особенно в физике) различных модельных нелинейных эволюционных уравнений, допускающих неограниченные решения. Общей теории подобных решений эволюционных задач пока еще нет. Более того, по-видимому, не существует достаточно общих и надежных методов теоретического анализа, способных с достаточной достоверностью и строгостью судить об асимптотическом поведении сингулярных решений, которые образуют, без преувеличения, принципиально новый класс решений эволюционных задач.

Все это практически в равной степени относится к уравнениям разных типов (параболическим, гиперболическим, типа Шредингера, системам уравнений и т.д.). В то же время многочисленные качественные результаты здесь часто противоречат друг другу. Последнее, например, наглядно иллюстрирует дискуссия, которая велась на страницах различных журналов по поводу характера особенности, возникающей в процессе самофокусировки световых пучков в нелинейной среде (см. библиографию в [13—16]). Эффект самофокусировки описывается неограниченными решениями полулинейного уравнения Шредингера. Однако строгого обоснования асимптотики до сих пор нет, поэтому существуют расхождения во взглядах на характер протекания асимптотической стадии процесса самофокусировки (ср., например, результаты [14, 15] и [16, 18]).

---

[2] Диапазон параметров σ, β, при которых существует эффект локализации тепла в задаче Коши для (1.1), тот же самый, что и в случае уравнения (1.4). Доказательство локализации финитных неограниченных решений (1.4) при $\beta \geqslant \sigma + 1$, проведенное в [21], можно использовать применительно к рассматриваемому здесь уравнению.

Автомодельные решения. Основные результаты

Уравнение (1.1) допускает построение (пока на формальном уровне) неограниченных автомодельных решений вида

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta(\eta), \quad \eta = x(T_0 - t)^{-\frac{\beta-(\sigma+1)}{(\sigma+2)(\beta-1)}} \in R^N, \qquad (1.5)$$

где $T_0 > 0$ — постоянная (время существования решения). Функция (1.5) неограниченно возрастает при $t \to T_0^-$; если, например, $\theta(0) > 0$, то $u_A(t, 0) \to +\infty$, $t \to T_0^-$. Подстановка выражения (1.5) в уравнение (1.1) дает для функции $\theta(\eta) \geqslant 0$ следующее квазилинейное эллиптическое уравнение:

$$\nabla_\eta(|\nabla_\eta\theta|^\sigma \nabla_\eta\theta) - \frac{\beta-(\sigma+1)}{(\sigma+2)(\beta-1)} \nabla_\eta\theta\eta - \frac{1}{\beta-1}\theta + \theta^\beta = 0, \quad \eta \in R^N. \qquad (1.6)$$

В соответствии с постановкой исходной задачи нас будут интересовать нетривиальные ($\theta \not\equiv 0$) неотрицательные решения уравнения (1.6), удовлетворяющие следующему условию в бесконечно удаленных точках:

$$\theta(\eta) \to 0, \qquad \|\eta\| \to +\infty. \qquad (1.7)$$

Решение задачи (1.6), (1.7) определяет конкретный вид автомодельного решения (1.5) и в конечном итоге дает представление о характере эволюции теплового возмущения в рассматриваемой нелинейной среде. Таким образом, полученная эллиптическая задача позволяет выделить многообразие тепловых структур, свойственных этой среде, и детально описать их пространственную геометрию («архитектуру» в терминологии [2, 10]). В частности, из (1.5) видно, что при $\beta > \sigma + 1$ процесс горения локализован, эффективная ширина образующейся тепловой структуры сокращается со временем: $\|x_{эф}(t)\| \sim (T_0 - t)^{\frac{\beta-(\sigma+1)}{(\sigma+2)(\beta-1)}} \to 0$ при $t \to T_0^-$.

Однако исследование всего многообразия решений данной нелинейной эллиптической задачи в R^N в общей постановке вряд ли возможно, несмотря на значительные успехи теории эллиптических задач, достигнутые в последнее время. В связи с этим отметим, что последние основные продвижения теории связаны с вариационными методами (см., например, [22—31] и библиографию в этих работах); что касается задачи (1.6), (1.7), то она не допускает эквивалентной вариационной формулировки. Важно также отметить, что (1.6), (1.7) представляет собой нелинейную эллиптическую задачу в R^N, т. е. в неограниченной области. В настоящее время каких-то общих подходов к исследованию таких невариационных задач не существует (см. обзор в [27]). Отметим, что в указанном случае анализ локального и глобального поведения решений (без доказательства существования) представляет собой достаточно сложную задачу (см. [32]). Конструктивный метод сферического расслоения в виде [26], по-ви-

димому, неприменим для эллиптических задач в R^N. Отдельные результаты здесь опять же получены на основе вариационных методов [27—30]. Поэтому очень часто предварительное исследование подобных нелинейных задач проводится на уровне анализа радиально-симметричных решений, которые удовлетворяют некоторым обыкновенным дифференциальным уравнениям (см. [33, 34]).

Решение вырождающегося уравнения (1.6) — обобщенное, $\theta \in W^{1,\sigma+2}_{\mathrm{loc}}(R^N)$, и оно может не иметь в точках вырождения, где $\nabla_\eta \theta = 0$, необходимой гладкости. При этом производная $\nabla_\eta \theta$ непрерывна в R^N, и в окрестности любой точки, где $\nabla_\eta \theta \neq 0$, решение является классическим.

Ниже мы ограничимся исследованием частного класса радиально-симметричных решений задачи (1.6), (1.7), зависящих только от одной координаты $\xi = \| \eta \| \geqslant 0$. Все они удовлетворяют краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} |\theta'|^\sigma \theta')' - \frac{\beta - (\sigma+1)}{(\sigma+2)(\beta-1)} \theta' \xi - \frac{1}{\beta-1} \theta + \theta^\beta = 0, \quad \xi > 0; \tag{1.8}$$

$$\theta'(0) = 0, \ \theta(+\infty) = 0 \ ((\cdot)' = d(\cdot)/d\xi). \tag{1.9}$$

Оказывается, даже в одномерном случае ($N = 1$) многообразие решений задачи (1.8), (1.9) является весьма сложным. Грубо говоря, спектр обобщенных решений состоит из четырех семейств немонотонных неотрицательных функций $\theta = \theta(\xi)$ (см. разд. 3). При этом три являются дискретными, причем по крайней мере два из них состоят из бесконечного (счетного) набора решений. Четвертое семейство представляет собой «непрерывное» (континуальное) множество. В разд. 3 для случая $\sigma = 1$, $\beta = 3$, $N = 1$ приведена любопытная картина ветвления решений задачи (1.8), (1.9), упорядоченных по некоторому параметру. Кроме того, функции θ из трех семейств при $N = 1$ можно попарно объединять, получая в результате новые решения, которые являются радиально-несимметричными (соответствующие примеры приведены в разд. 3).

В разд. 3 построение функций $\theta = \theta(\xi)$ проводится численными методами. В разд. 4 также численно изучается асимптотическая устойчивость неограниченных автомодельных решений (1.5). Выделено одно решение $u_A(t, x)$ с функцией $\theta(|\eta|)$ типа P_1 (см. разд. 3), которое является асимптотически устойчивым в классе произвольных элементарных начальных возмущений $u_0(x)$ в (1.2).

Исследование разрешимости задачи (1.8), (1.9) при $\beta > \sigma + 1$ проводится в разд. 5 и 6, где, в частности, для случая $N = 1$ доказано существование двух различных дискретных бесконечных семейств положительных немонотонных решений. Существование решений $\theta = \theta(\xi)$ из двух других семейств пока доказать не удается. Там же получены некоторые частные результаты, относящиеся к многомерному случаю.

В разд. 2 проводится некоторое предварительное исследование, позволяющее выяснить характер осцилляций всех возможных ре-

шений задачи (1.8), (1.9) относительно пространственно однородного решения $\theta = (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}$. При изложении полученных здесь результатов мы в основном следуем [35]. На основе подходов, развитых в [2, 4—6, 36], этот локальный анализ дает важную (даже исчерпывающую) информацию о принципах построения решений задачи (1.8), (1.9), которая используется в численных расчетах, а также определяет главное содержание теорем о разрешимости и «числе» решений (см. разд. 5, 6).

О некоторых отличительных особенностях неограниченных решений

Не будет преувеличением сказать, что теория режимов с обострением в нелинейных теплопроводных средах (см., например, [2—11] и обзор в [1, 2]) сформулировала ряд новых нелинейных эллиптических задач с уникальными свойствами. Это относится как к задаче (1.8), (1.9), так и к уравнению другого типа [2, 3—6, 8, 10]:

$$\nabla_\eta(\theta^\sigma\nabla_\eta\theta) - \frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}\nabla_\eta\theta\eta - \frac{1}{\beta-1}\theta + \theta^\beta = 0, \quad \eta \in R^N. \qquad (1.10)$$

Оно возникает при построении неограниченных автомодельных решений параболического уравнения с иным, чем в (1.1), характером нелинейности:

$$u_t = \nabla\,(u^\sigma\,\nabla u) + u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in R^N. \qquad (1.11)$$

Автомодельное решение уравнения (1.11) ищется в виде

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{\beta-1}}\theta(\eta), \quad \eta = x\,(T_0 - t)^{-\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}}, \qquad (1.12)$$

тогда $\theta(\eta) \geqslant 0$ удовлетворяет эллиптическому уравнению (1.10). Задача (1.10), (1.7) при $\sigma > 0$, $\beta > \sigma + 1$ имеет дискретный и, повидимому, конечный набор положительных решений, обладающих весьма разнообразной пространственной структурой. В частности, в одномерном случае существует $M \sim (\beta - 1)/(\beta - (\sigma + 1))$ различных немонотонных решений [2, 4—6, 36]. При $N > 1$ многомерные решения были построены численно [10]. Здесь важно отметить, что речь идет именно о положительных решениях, поскольку дискретные спектры знаконепостоянных решений имеются у большого числа различных нелинейных эллиптических задач (см. [25, 26, 28, 30, 37]).

Подчеркнем, что наличие дискретного спектра положительных немонотонных решений уравнения (1.10) или (1.6) связано именно с тем, что они отвечают автомодельным решениям, развивающимся в режиме с обострением. Здесь уместно привести сравнение с близкими по виду эллиптическими уравнениями, которые появляются при автомодельном описании обычных необостряющихся тепловых процессов. Например, уравнение со стоком

$$u_t = \nabla\,(u^\sigma\nabla u) - u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in R^N, \quad \sigma \geqslant 0, \quad \beta > 1,$$

которое отличается от (1.11) знаком перед младшим членом, также допускает автомодельное решение

$$u_A(t, x) = (T + t)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta(\eta), \quad \eta = x(T + t)^{-\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}}, \quad T \geqslant 0. \quad (1.13)$$

Оно определено при всех t ($u_A(t, x) \to 0$ при $t \to +\infty$); функция $\theta(\eta) \geqslant 0$ такова, что

$$\nabla_\eta(\theta^\sigma \nabla_\eta \theta) + \frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)} \nabla_\eta \theta \eta + \frac{1}{\beta-1} \theta - \theta^\beta = 0, \quad \eta \in R^N. \quad (1.14)$$

Это уравнение отличается от (1.10) знаками при трех последних членах. Многообразие решений при этом резко меняется. В недавней работе [38] показано, что эллиптическая задача (1.14), (1.7) при $\sigma = 0$, $\beta > 1 + 2/N$, $N \geqslant 2$ всегда имеет бесконечномерное множество решений (при $N = 1$ оно двумерно). Радиально-симметричные решения (1.14) при $\sigma = 0$ и произвольных $\beta > 1$ образуют одну непрерывную ветвь решений [39] (континуальное множество). Кроме того, все решения вида (1.13) являются асимптотически устойчивыми [38, 39].

Таким образом, «дискретизация» спектра положительных решений (или, другими словами, собственных функций нелинейной среды [2]) происходит именно при развитии режимов с обострением, что свидетельствует о своеобразном усилении принципов эволюционного отбора устойчивых решений на высокоинтенсивной стадии теплового процесса.

Сделаем еще одно замечание, которое подчеркивает важную особенность неограниченных решений. Оно касается вопроса об асимптотической устойчивости автомодельных решений, развивающихся в режиме с обострением. Вернемся к исходному уравнению (1.1) и его частным неограниченным решениям вида (1.5). Асимптотическая устойчивость решения (1.5) означает, что при произвольных начальных функциях $u_0(x)$ из множества притяжения автомодельного решения u_A асимптотическая эволюция неограниченного решения задачи Коши (1.1), (1.2) описывается пространственно-временной структурой выражения (1.5). Пусть $T_0 < +\infty$ — время обострения решения $u(t, x)$. Тогда, вводя обычным образом автомодельное представление

$$g(t, x) = (T_0 - t)^{\frac{1}{\beta-1}} u(t, \eta(T_0 - t)^{m_*}), \quad m_* = \frac{\beta-(\sigma+1)}{(\sigma+2)(\beta-1)}, \quad (1.15)$$

и новое время $\tau = -\ln(1 - t/T_0) : (0, T_0) \to R^1_+$, получаем для функции $g = g(\tau, x)$ параболическое уравнение

$$g_\tau = \nabla_\eta(|\nabla_\eta g|^\sigma \nabla_\eta g) - m_* \nabla_\eta g \eta - \frac{1}{\beta-1} g + g^\beta, \quad (1.16)$$

$$g(0, \eta) = g_0(\eta) \equiv T_0^{1/(\beta-1)} u_0(\eta T_0^{m_*}), \quad \eta \in R^N. \quad (1.17)$$

Сравнение (1.16) с эллиптическим уравнением (1.6) показывает, что в новых обозначениях проблема исследования асимптотической

устойчивости автомодельного решения (1.5) сводится к анализу устойчивости стационарного решения $g = \theta(\eta)$ уравнения (1.16). Однако по определению автомодельного представления (1.15) оно является неустойчивым в пространстве начальных функций $\{g_0(\eta)\}$, поскольку любая «ошибка» в определении времени обострения T_0 в (1.15) приводит либо к тому, что $g(\tau, \eta) \to 0$ в R^1 при $\tau \to +\infty$, либо к возникновению неограниченного решения: $\sup\limits_{\eta} g(\tau, \eta) \to +\infty$ при $\tau \to \tau_0 < +\infty$. Тем не менее это не означает отсутствия асимптотической устойчивости неограниченного автомодельного решения (1.5). Есть основания ожидать, что стационарное решение $g = \theta(\eta)$ уравнения (1.16) имеет нетривиальное множество притяжения $\{g_0 = T_0^{1/(\beta-1)} u_0(\eta T_0^{m*})\}$, которое является бесконечномерным, но, разумеется, не плотным во всем пространстве $\{g_0(\eta)\}$.

Таким образом, проблема исследования асимптотической устойчивости неограниченных автомодельных решений вида (1.5) сводится к построению возможно более широкого множества притяжения стационарного решения уравнения (1.16), которое заведомо неустойчиво по отношению к сколь угодно малым возмущениям (в настоящее время в этом направлении получено небольшое число результатов [40—43]). Как раз этот факт существенно отличает исследование неограниченных решений от анализа устойчивости обычных глобальных решений без особенности по времени. В последнем случае, как правило, возникает проблема выделения множества притяжения устойчивых стационарных решений. Такое исследование проводилось в большом числе работ (см., например, библиографию в [44, 45]).

2. «Линеаризованное» нелинейное уравнение

Легко видеть, что (1.8), как, впрочем, и исходное эллиптическое уравнение (1.6), имеет очевидное пространственно однородное решение $\theta = \theta_H \equiv (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}$. Преобразуем для удобства (1.8) так, чтобы оно перешло в $\theta \equiv 1$. Это достигается заменой

$$\theta \to (\beta - 1)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta, \quad \xi \to (\beta - 1)^{\frac{\beta-(\sigma+1)}{(\sigma+2)(\beta-1)}} \xi. \tag{2.1}$$

В результате получим задачу

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} |\theta'|^\sigma \theta')' - \frac{\beta - (\sigma+1)}{(\sigma+2)} \theta' \xi - \theta + \theta^\beta = 0, \quad \xi > 0, \tag{2.2}$$

$$\theta'(0) = 0, \ \theta(+\infty) = 0. \tag{2.3}$$

Как уже отмечалось во введении, многообразие (число и характер немонотонности) решений задачи (2.2), (2.3) зависит от количества и пространственного поведения различных семейств решений уравнения, полученного путем линеаризации исходного относительно однородного решения $\theta \equiv 1$. Полагая $\theta = 1 + z(\xi)$ и проводя в (2.2) процедуру линеаризации (формально считая, что $|z(\xi)| \ll 1$), получаем другое (но все равно нелинейное!) уравнение относительно

Т е о р е м а 1. *Существует такое* $\delta > 0$, *что на интервале* $(0, \delta)$ *задача* (2.4), (2.13) *имеет единственное решение, которое монотонно убывает по* ξ, *причем*

$$z(\xi; 1) = 1 - \frac{(\sigma+1)}{(\sigma+2)}\left(\frac{\beta-1}{N}\right)^{\frac{1}{\sigma+1}} \xi^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}} + o(\xi^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}), \quad \xi \to 0. \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проинтегрировав уравнение (2.4) по интервалу $(0, \xi)$ с учетом первого условия (2.13), получим

$$|z'|^{\sigma} z' = mz\xi - (\beta - 1 + mN)\,\xi^{1-N} \int_0^{\xi} \zeta^{N-1} z(\zeta)\, d\zeta, \quad \xi > 0; \tag{2.15}$$

$m = [\beta - (\sigma + 1)]/(\sigma + 2) > 0$.

Полагая $z' < 0$, после повторного интегрирования получим следующее интегральное уравнение, локально по ξ эквивалентное задаче (2.4), (2.13):

$$z(\xi) = F(z)(\xi) \equiv 1 - \int_0^{\xi} [l\zeta^{1-N} \int_0^{\zeta} z(\eta)\, \eta^{N-1}\, d\eta - mz(\zeta)\,\zeta]^{\frac{1}{\sigma+1}} d\zeta, \; \xi > 0, \tag{2.16}$$

где введено обозначение

$$l = mN + \beta - 1 = \{\beta\,[N + (\sigma+2)] - [(\sigma+2) + N(\sigma+1)]\}/(\sigma+2) > 0 \tag{2.17}$$

при $\beta > \sigma + 1$.

Введем множество функций

$$X_{\delta,\rho} = \{v(\xi) \mid v \in C([0, \delta]); \quad \rho \leqslant v(\xi) \leqslant 1, \quad \xi \in [0, \delta]\}, \tag{2.18}$$

где $\delta > 0$ и $\rho \in (0, 1)$ — постоянные, которые будут определены ниже. Очевидно, что (2.18) — замкнутое и выпуклое в $C([0, \delta])$. Введем ограничение

$$\rho \in (mN/l, 1)\,(mN/l < 1). \tag{2.19}$$

Тогда, как нетрудно проверить, непрерывный оператор F в (2.16) определен на $X_{\delta,\rho}$. Отметим, что, как следует из (2.15), при выполнении (2.19) решение, если оно существует, монотонно убывает по ξ на $(0, \delta)$.

Для доказательства существования и единственности локального решения в силу теоремы Банаха о сжимающих отображениях [46] достаточно определить условия, при которых, во-первых, $F\colon X_{\delta,\rho} \to X_{\delta,\rho}$ и, во-вторых, F — сжимающий на $X_{\delta,\rho}$.

Пусть $v \in X_{\delta,\rho}$. Тогда, очевидно, $F(v) \leqslant 1$ на $[0, \delta]$. Оценим $F(v)$ снизу. Имеем

$$F(v)(\xi) \geqslant 1 - \left(\frac{l}{N} - m\rho\right)^{\frac{1}{\sigma+1}} \frac{\sigma+1}{\sigma+2}\, \xi^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \left(\frac{l}{N} - m\rho\right)^{\frac{1}{\sigma+1}} \frac{\sigma+1}{\sigma+2}\, \delta^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}$$

на $(0, \delta)$. Поэтому F: $X_{\delta,\rho} \to X_{\delta,\rho}$, если

$$\delta < \left\{\frac{(1-\rho)(\sigma+2)}{(\sigma+1)}\right\}^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}} \left(\frac{l}{N} - m\rho\right)^{-\frac{1}{\sigma+2}}. \tag{2.20}$$

Далее, пусть v_1, $v_2 \in X_{\delta,\rho}$. Тогда

$$\| F(v_1) - F(v_2) \|_{C([0,\delta])} = \| \frac{1}{(\sigma+1)} \int_0^{\xi} \left\{ \left[l\xi^{1-N} \int_0^{\xi} \bar{v}(\eta)\, \eta^{N-1}\, d\eta - \right.\right.$$

$$\left. \left. - m\bar{v}(\xi)\, \xi \right]^{-\frac{\sigma}{\sigma+1}} \left[l\xi^{1-N} \int_0^{\xi} (v_1 - v_2)\, \eta^{N-1}\, d\eta - m(v_1 - v_2)\, \xi \right] \right\} d\xi \|_C,$$

где $\bar{v}(\xi)$ — некоторая средняя по отношению к v_1, v_2 функция. Поэтому

$$\| F(v_1) - F(v_2) \|_{C([0,\delta])} \leqslant q \| v_1 - v_2 \|_{C([0,\delta])},$$

где

$$q = \frac{1}{\sigma+2} \left(\frac{l}{N} - m\right) \left(\frac{l\rho}{N} - m\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma+1}} \delta^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}.$$

Отсюда при любых

$$\delta < \left\{(\sigma+2)\left(\frac{l}{N} - m\right)^{-1}\right\}^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}} \left(\frac{l\rho}{N} - m\right)^{\frac{\sigma}{\sigma+2}} \tag{2.21}$$

справедливо неравенство $q < 1$ и, окончательно, при выполнении условий (2.19) — (2.21) существует единственное решение $z(\xi) \in X_{\delta,\rho}$ задачи (2.4), (2.13). Равенство (2.14) в силу достаточной гладкости z непосредственно следует из (2.15), (2.16).

Решения из семейства Q_a. Так же как в предыдущем случае, найдем одно нетривиальное решение задачи (2.4), (2.8) при $a = 1$:

$$z(1;\ 1) = 0,\ z'(1;\ 1) = 0. \tag{2.22}$$

Все остальные $z(\xi;\ a)$ из этого семейства определяются из $z(\xi;\ 1)$ с помощью свойств инвариантности (2.11), (2.12):

$$z(\xi;\ a) = \pm a^{(\sigma+2)/\sigma} z(\xi/a;\ 1).$$

Теорема 2. *Существует такое* $\delta > 0$, *что на интервале* $(1, 1+\delta)$ *задача* (2.4), (2.22) *имеет единственное строго положительное и монотонно возрастающее решение, причем*

$$z(\xi;\ 1) = m^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)^{-\frac{\sigma+1}{\sigma}} (\xi - 1)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} + o\left((\xi-1)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}\right),\ \xi \to 1^+. \tag{2.23}$$

Доказательство. Введем (пока на формальном уровне) обратную функцию $\xi = \xi(z)$. Тогда (2.4) принимает вид

$$(\xi^{N-1} |\xi'(z)|^{-\sigma} (\xi'(z))^{-1})' = m\xi^{\setminus}(z) + (1-\beta)\, z\xi^{N-1}(z)\, \xi'(z). \tag{2.24}$$

Полагая $\xi' > 0$ и интегрируя это уравнение с учетом условий

$$\xi(0) = 1, \quad \xi'(0) = \infty, \tag{2.25}$$

получаем интегральное уравнение

$$\xi(z) = P(\xi)(z) = 1 + \int_0^z (\xi(t))^{\frac{N-1}{\sigma+1}} \left\{ \int_0^t \left(m + \frac{\beta - 1}{N} \right) \xi^N(s)\, ds + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\beta}{N} \xi^N(t)\, t \right\}^{-\frac{1}{\sigma+1}} dt. \tag{2.26}$$

Введем множество функций

$$X_{\delta,\theta} = \{v(z) \mid v \in C([0, \delta]); \quad 1 \leqslant v(z) \leqslant \theta < \\ < (1 + mN/(\beta - 1))^{1/N}, \ z \in [0, \delta]\},$$

где $\delta = \delta(\theta) > 0$ — постоянная, определяемая далее. Условие $\theta < (1 + mN/(\beta - 1))^{1/N}$, как легко видеть, необходимо, чтобы оператор (2.26) был определен и непрерывен на $X_{\delta,\theta}$.

Пусть $v(z) \in X_{\delta,\theta}$. Докажем, что P отображает $X_{\delta,\theta}$ в себя. Действительно, очевидно, что $P(v)(z) \geqslant 1$. Далее,

$$P(v)(z) \leqslant 1 + \int_0^z \theta^{\frac{N-1}{\sigma+1}} \left\{ \int_0^t \left(m + \frac{\beta - 1}{N} \right) ds + \frac{1-\beta}{N} \theta^N t \right\}^{-\frac{1}{\sigma+1}} dt =$$

$$= 1 + \frac{\sigma+1}{\sigma} z^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \theta^{\frac{N-1}{\sigma+1}} B^{-\frac{1}{\sigma+1}}, \quad B = \left(m + \frac{\beta - 1}{N} + \frac{1-\beta}{N} \theta^N \right);$$

$P(v)(z) \leqslant \theta$, $z \in [0, \delta]$ при

$$\delta \leqslant \left[(\theta - 1) \frac{\sigma}{\sigma+1} \right]^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \theta^{\frac{1-N}{\sigma}} B^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{2.27}$$

Докажем теперь, что P — сжимающий оператор на $X_{\delta,\theta}$. Пусть v_1, $v_2 \in X_{\delta,\theta}$; тогда, используя формулу конечных приращений Лагранжа (см., например, [47]), получаем

$$\| P(v_1) - P(v_2) \|_{C([0,\delta])} = \left\| \int_0^z \left\{ \frac{N-1}{\sigma+1} \bar{v}^{\frac{N-(\sigma+2)}{\sigma+1}} (v_1 - v_2) \times \right. \right.$$

$$\times \left[\int_0^t \left(m + \frac{\beta - 1}{N} \right) \bar{v}^N ds + \frac{1-\beta}{N} \bar{v}^N t \right]^{-\frac{1}{\sigma+1}} + \bar{v}^{\frac{N-1}{\sigma+1}} \left(-\frac{1}{\sigma+1} \right) \times$$

$$\times \left[\int_0^t \left(m + \frac{\beta - 1}{N} \right) \bar{v}^N ds + \frac{1-\beta}{N} \bar{v}^N t \right]^{-\frac{\sigma+2}{\sigma+1}} \left[\int_0^t \left(m + \frac{\beta - 1}{N} \right) \times \right.$$

$$\left. \left. \times N \bar{v}^{N-1} (v_1 - v_2)\, ds + (1 - \beta) \bar{v}^{N-1} (v_1 - v_2)\, t \right] \right\} dt \Big\|_{C([0,\delta])},$$

где $\bar{v}(z)$ — некоторая средняя по отношению к v_1, v_2 функция. Далее,

$$\| P(v_1) - P(v_2) \|_C \leqslant \left\{ \frac{N-1}{\sigma+1} B_{N,\sigma} B^{-\frac{1}{\sigma+1}} + \frac{1}{\sigma+1} \theta^{\frac{N-1}{\sigma+1}} B^{-\frac{\sigma+2}{\sigma+1}} \times \right.$$

$$\left. \times [(mN + 2(\beta-1))\theta^{N-1}] \right\}^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \delta^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} \| v_1 - v_2 \|_C,$$

где

$$B_{N,\sigma} = \begin{cases} 1, & N < \sigma + 2, \\ \theta^{\frac{N-(\sigma+2)}{\sigma+1}}, & N \geqslant \sigma + 2. \end{cases}$$

Оператор P сжимающий, если

$$\delta < \left\{ \frac{\sigma+1}{\sigma} \left[\frac{N-1}{\sigma+1} B_{N,\sigma} B^{-\frac{1}{\sigma+1}} + \frac{mN + 2(\beta-1)}{\sigma+1} \theta^{\frac{(N-1)(\sigma+2)}{\sigma-1}} \beta^{-\frac{\sigma+2}{\sigma+1}} \right] \right\}^{-1}. \tag{2.28}$$

Таким образом, при выполнении условий (2.27), (2.28) по теореме Банаха существует единственное решение $\xi(z) \in X_{\delta,\theta}$ задачи (2.24), (2.25), которое, как видно из (2.26), строго возрастает при $z \in [0, \delta]$. Следовательно, на интервале $(1, \theta)$ существует решение $z = z(\xi) \in [0, \delta]$ задачи (2.4), (2.22). Разложение (2.23) прямо следует из (2.26).

Замечание. При доказательстве единственности решения задачи (2.4), (2.22) для прямой функции $z(\xi)$ значительно сложнее выбрать множество функций, на которых следует определить интегральный оператор, что связано с существованием тривиального решения $z \equiv 0$ (оно не должно принадлежать данному множеству).

Глобальные свойства решений линеаризованного уравнения

Главная цель этого подраздела — показать, что все решения из семейств, указанных в предложении 1, бесконечно осциллируют при $\xi \to +\infty$.

Уравнение первого порядка. Положим

$$z(\xi) = \xi^{(\sigma+2)/\sigma} \varphi(\eta), \quad \eta = \ln \xi, \tag{2.29}$$

а затем введем новую функцию

$$P = d\varphi/d\eta. \tag{2.30}$$

Тогда $P = P(\varphi)$ удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\frac{dP}{d\varphi} = -\frac{1}{(\sigma+1)P} \left\{ \frac{a_* \varphi - mP}{\left| \frac{\sigma+2}{\sigma} \varphi + P \right|^{\sigma}} + b\varphi + cP \right\}, \tag{2.31}$$

где введены обозначения

$$a_* = \frac{\beta(\sigma-1)+1}{\sigma}; \qquad m = \frac{\beta-(\sigma+1)}{\sigma+2} > 0; \tag{2.32}$$

$$b = \left(N-1+\frac{2(\sigma+1)}{\sigma}\right)\frac{\sigma+2}{\sigma} > 0; \quad c = N-1+\frac{(\sigma-1)(\sigma+4)}{\sigma} > 0. \tag{2.33}$$

Основной результат здесь состоит в следующем: при любых $\beta > \sigma + 1$ поле интегральных кривых уравнения (2.31) содержит предельный цикл, охватывающий точку (0,0). Этот вывод в силу структуры использованных преобразований (2.29), (2.30) означает, что исходное уравнение второго порядка (2.4) имеет семейства бесконечно осциллирующих решений. Остается, таким образом, показать, что эти решения как раз и составляют семейства P_μ, Q_a, R_ν и S_λ, т. е. удовлетворяют определенным краевым условиям.

Перейдем теперь к краткому изложению результатов анализа поведения траекторий уравнения (2.31). Предварительно заметим, что оно инвариантно относительно преобразования $P \to -P$, $\varphi \to -\varphi$, поэтому исследование, вообще говоря, достаточно провести в одной части плоскости (P, φ), лежащей, например, выше изоклины бесконечности

$$P_\infty(\varphi) = -[(\sigma+2)/\sigma]\varphi \tag{2.34}$$

или просто в полуплоскости $\{\varphi > 0\}$.

Анализ бесконечно удаленной особой точки. Из уравнения (2.31) нетрудно получить, что при $\varphi \to +\infty$ траектории могут уходить в бесконечно удаленную точку только по двум направлениям:

$$P_1(\varphi) = -\frac{\sigma+2}{\sigma}\varphi, \qquad P_2(\varphi) = -\frac{1}{\sigma+1}\left[N+1+\frac{2}{\sigma}\right]\varphi, \tag{2.35}$$

отметим, что первое из них есть уравнение изоклины бесконечности (2.34). В «критическом» случае $N = \sigma + 2$ оба эти направления совпадают.

Случай $N < \sigma + 2$. Здесь вдоль первого направления P_1 располагается целый пучок интегральных траекторий с уравнением

$$P(\varphi) = -[(\sigma+2)/\sigma]\varphi + A\varphi^\alpha + \ldots, \quad \varphi \to +\infty,$$

где A — произвольная постоянная и

$$\alpha = \frac{\sigma}{(\sigma+1)(\sigma+2)}\left[N+\frac{\sigma+2}{\sigma}\right] < 1.$$

В этом пучке нам удобно выделить траекторию, для которой $A = 0$:

$$P : P(\varphi) = -\frac{\sigma+2}{\sigma}\varphi + \left(\frac{\beta-1}{N}\right)^{\frac{1}{\sigma+1}}\varphi^{\frac{1}{\sigma+1}} + \ldots, \quad \varphi \to +\infty. \tag{2.36}$$

Вдоль направления P_2 при $N < \sigma + 2$ уходит только одна сепаратриса:

$$P(\varphi) = -(\sigma+1)^{-1}[N+1+2/\sigma]\varphi - \lambda_0\varphi^{1-(\sigma+\gamma)}[(\sigma+\gamma-1)(N+1+2/\sigma)(\sigma+2-N)]^{-1},$$

где введены обозначения

$$\gamma = \frac{(\sigma+1)(\sigma+2)}{\sigma(N+1+2/\sigma)} > 0; \qquad \lambda_0 = a_* + \frac{[\beta-(\sigma+1)]}{(\sigma+2)(\sigma+1)}\left(N+1+\frac{2}{\sigma}\right). \tag{2.37}$$

Случай $N > \sigma + 2$. Тогда вдоль P_1 движется только одна сепаратриса (2.36), а в окрестности P_2 лежит пучок траекторий

$$P(\varphi) = -\frac{1}{\sigma+1}\left[N+1+\frac{2}{\sigma}\right]\varphi + A\varphi^{\gamma} + \ldots, \quad \varphi \to +\infty,$$

A — параметр пучка, величина γ определена в (2.37).

Случай $N = \sigma + 2$. Имеется траектория (2.36) и, кроме того, вдоль единственного особого направления располагается пучок траекторий вида

$$P(\varphi) = -\frac{\sigma+2}{\sigma}\varphi + \frac{\sigma+2}{\sigma}\varphi\frac{\ln\ln\varphi}{\ln\varphi} + \left(\ln\frac{1}{A} - \frac{\sigma+2}{\sigma}\right)\frac{\varphi}{\ln\varphi} + \ldots$$

При этом траектория (2.36) является элементом данного пучка, ей фактически отвечает $A = 0$.

Важно подчеркнуть, что во всех трех случаях существует траектория (2.36), которая не случайно обозначена буквой P. Без труда проверяется, что после преобразований (2.29), (2.30) уравнение (2.36) вблизи бесконечно удаленной точки дает асимптотическое разложение (2.14) решения $z(\xi; 1)$ из семейства P_μ и всех других функций $z(\xi; \mu)$ (т. е. траектория P на плоскости (P, φ) порождает все семейство решений P_μ исходной задачи). Следовательно, в новых переменных решения из P_μ «начинаются» в бесконечно удаленной точке. Их дальнейшие свойства будут зависеть от поведения траекторий в области, расположенной в окрестности другой особой точки $(0, 0)$, к исследованию которой мы сейчас приступаем.

Анализ конечных особых точек. В зависимости от знака выражения a_* из (2.32) возможны два топологически различных случая. При $a_* > 0$ существует единственная конечная особая точка $(P, \varphi) = (0, 0)$, которой соответствует сложное топологическое состояние (см. [48]). Анализ показывает, что эта точка есть топологический узел, имеющий два особых направления.

Вдоль направления $\varphi = 0$ проходит лишь одна сепаратриса

$$Q: P(\varphi) = m^{\frac{1}{\sigma+1}}\varphi|\varphi|^{-\frac{\sigma}{\sigma+1}} + o(|\varphi|^{\frac{1}{\sigma+1}}), \quad \varphi \to 0, \tag{2.38}$$

вдоль направления $P = a_*\varphi/m$ — пучок фазовых траекторий

$$R: P(\varphi) = \left[\frac{a_*}{m}\varphi + \alpha_2|\varphi|^{\sigma}\varphi + \ldots\right] + \left[\nu_2\exp\left(-\frac{\alpha_1^2}{\sigma}|\varphi|^{\sigma}\right) + \ldots\right], \quad \varphi \to 0, \tag{2.39}$$

где ν_2 — параметр пучка;

$$\alpha_1^2 = \frac{m^2}{a_*(\sigma+1)\,|\,(\sigma+2)/\sigma + a_*/m\,|^\sigma}; \qquad \alpha_2 = \left|\frac{\sigma+2}{\sigma} + \frac{a_*}{m}\right|^\sigma \left\{\frac{a_*^2(\sigma+1)}{m^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{b + a_* c/m}{m}\right\}.$$

При $a_* = 0$ (2.39) принимает другой вид

$$R: P(\varphi) = [\varkappa\varphi\,|\,\varphi|^\sigma + \ldots] + \left[\nu_2 \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma}\,|\,\varphi\,|^{-2\sigma}\right) + \ldots\right], \quad (2.40)$$

$$\varkappa = \frac{b}{m}\left|\frac{\sigma+2}{\sigma}\right|^\sigma, \quad \Delta^2 = \frac{m}{(\sigma+1)}\left|\frac{\sigma}{\sigma+2}\right|^\sigma \frac{1}{\varkappa}.$$

В (2.39), (2.40) естественным образом выделяется рациональная часть асимптотики (первая квадратная скобка) и существенно неаналитическая часть (вторая скобка).

Уравнение сепаратрисы (2.38) после преобразований (2.29), (2.30) порождает однопараметрическое семейство решений Q_a с асимптотическим представлением (2.23). Аналогично пучок траекторий (2.39) порождает двупараметрическое семейство решений R_ν, имеющее в окрестности $\xi = 0$ представление

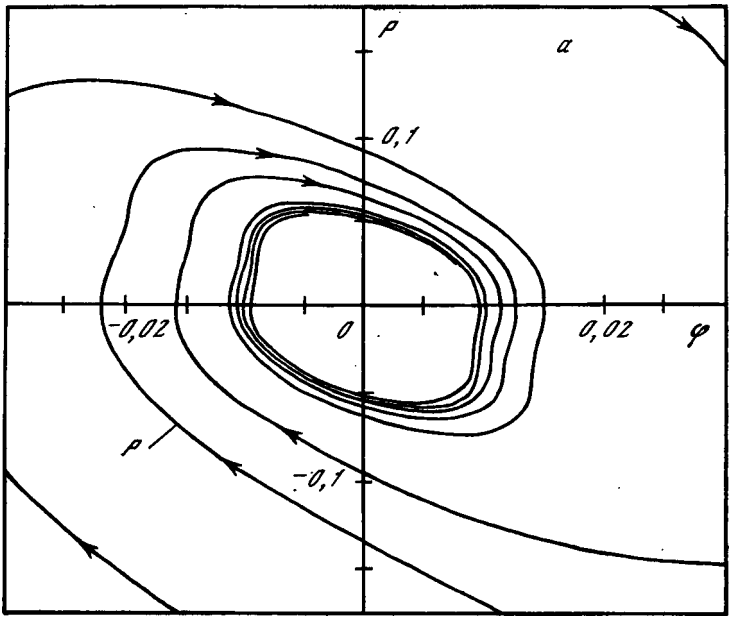
$$R_\nu: z(\xi) = \xi^{\frac{\sigma+2}{\sigma}} \{[\nu_1 \xi^{\frac{a_*}{m}} + \ldots] + [\nu_2 \xi^\alpha \exp(-\delta\xi^{-\alpha}) + \ldots]\}, \quad (2.41)$$

$$\delta = \frac{\alpha_1^2}{\sigma}\,|\,\nu_1\,|^{-\sigma} \geqslant 0, \quad \alpha = \frac{a_* \sigma}{m} > 0,$$

ν_1, ν_2 — параметры семейства решений R_ν ($\nu = (\nu_1, \nu_2)$).

О г л о б а л ь н ы х с в о й с т в а х р е ш е н и й. Учитывая локальное поведение траекторий в окрестности особых точек и на бесконечности, направление движений по траекториям, можно сделать вывод о существовании при $a_* \geqslant 0$ предельного цикла (хотя бы одного), охватывающего особую точку $(P, \varphi) = (0, 0)$. Поле интегральных кривых уравнения (2.31) при $a_* > 0$ показано на рис. 1. Оно получено в процессе численного решения различных задач Коши для уравнения (2.4) с одновременной обработкой в соответствии с преобразованиями (2.29), (2.30). Отчетливо видно, что по мере роста ξ кривые наматываются на предельный цикл либо снаружи (рис. 1, *а*), либо изнутри (рис. 1, *б*). Кривая P на рис. 1, *а* отличается от других траекторий тем, что она имеет при $\varphi \to \infty$ асимптотику (2.36) и порождает однопараметрическое семейство решений P_μ. На рис. 1, *б* обозначены траектория Q (ей отвечает однопараметрическое семейство решений Q_a) и пучок кривых R, которые порождают двупараметрическое семейство R_ν. Жирной линией на этом рисунке обозначен предельный цикл (он «отвечает» за семейство S_λ, см. об этом ниже).

Таким образом, все интегральные кривые бесконечно осциллируют вокруг начала координат при $\eta \to +\infty$. Это означает, что решения z из семейств Q_a, P_μ, R_ν бесконечно осциллируют возле тривиального решения. Отметим, что при $a_* < 0$ столь однозначного



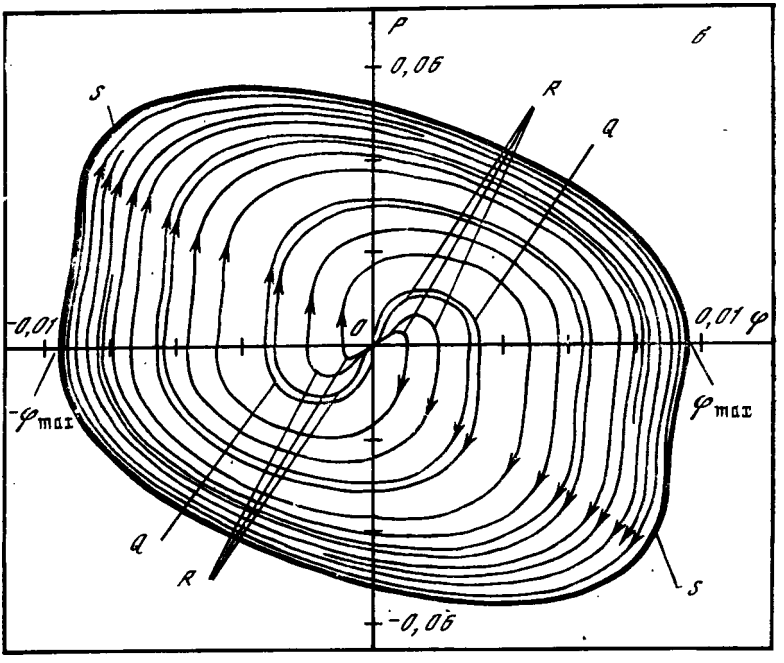


Рис. 1. Фазовый портрет уравнения (2.31) при $\sigma = 1$, $\beta = 3$, $N = 1$ ($a_* > 0$)
а — траектории вне предельного цикла, *б* — внутри цикла

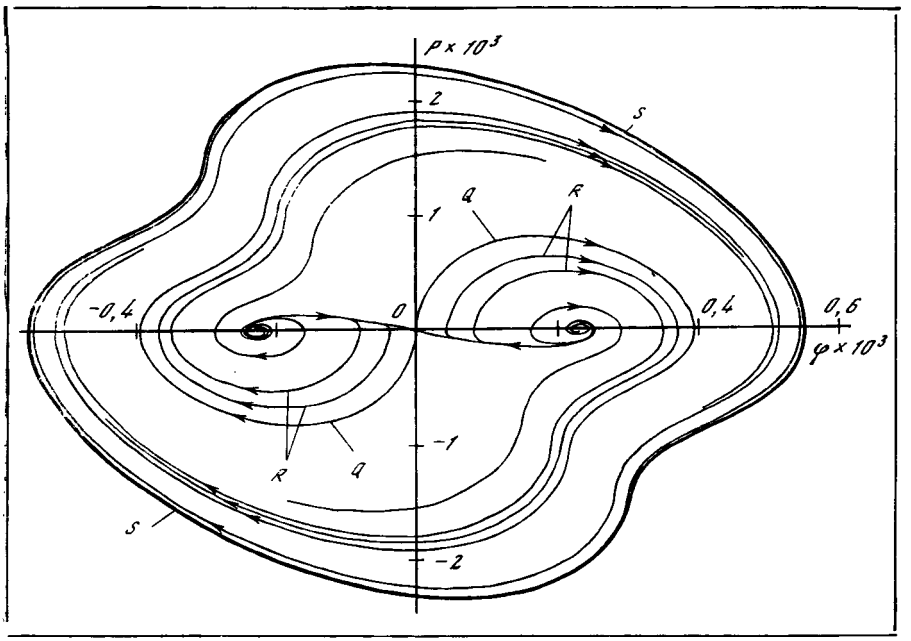


Рис. 2. Фазовый портрет уравнения (2.31) при $\sigma = 0{,}5$, $\beta = 3$, $N = 1$ ($a_* < 0$) (траектории внутри предельного цикла)

вывода о существовании предельного цикла сделать нельзя. Это связано с тем, что при $a_* < 0$, помимо (0, 0), появляются дополнительные конечные особые точки и глобальный анализ существенно усложняется. Для примера на рис. 2 приведено поле интегральных кривых уравнения (2.31) при $a_* < 0$ (численное построение). Здесь внутри предельного цикла S, помимо (0, 0), имеются две другие особые точки:

$$P = 0, \quad \varphi = \pm \frac{\sigma}{(\sigma+2)} \left| \frac{a_*}{b} \right|^{1/\sigma} \equiv$$

$$\equiv \pm \frac{\sigma}{(\sigma+2)} \left| \frac{[\beta(\sigma-1)+1]}{(\sigma+2)[N-1+2(\sigma+1)/\sigma]} \right|^{1/\sigma},$$

которые в данном случае (на рис. 2) являются фокусами. Так же как в случае $a_* \geqslant 0$, здесь существуют траектории P, Q, R и S, которые обратными преобразованиями (2.29), (2.30) порождают четыре семейства решений, указанных в предложении 1.

Так как предельный цикл является некоторой интегральной кривой $P = G(\varphi)$ уравнения (2.31), то это означает существование нового однопараметрического семейства решений (названного ранее S_λ) исходного уравнения (2.4). Решения $z(\xi)$ из S_λ также бесконечно осциллируют возле тривиального решения. Действительно, интегрируя (2.30), получаем, что $\eta + \ln \lambda = \int\limits_{\varphi_{\max}}^{\varphi} dt/G(t) = H(\varphi)$, где $\ln \lambda$ —

константа интегрирования, а φ_{max} — характерный размер, указанный на рис. 1, *б*. Так как $H(\varphi)$ — положительная монотонная функция, то существует обратная периодическая функция $\varphi_\lambda = H^{-1}(\eta + \ln\lambda)$ и, следовательно, семейство решений $z(\xi; \lambda) = \xi^{(\sigma+2)/\sigma} \times H^{-1}(\ln(\lambda\xi))$. Отметим, что при $\xi \to 0$ $z(\xi; \lambda) \to 0$ и происходит сгущение осцилляций. Конкретные оценки φ_{max} и периода функции φ_λ численно получены в [35].

Величина φ_{max} дает точную оценку решений из семейств Q_a, R_ν, S_λ. Кривые, отвечающие решениям из Q_a, R_ν, S_λ, лежат внутри предельного цикла и, следовательно, для них $|\varphi(\eta)| \leqslant \varphi_{max}$. Это дает следующую оценку в исходных переменных:

$$Q_a,\ R_\nu,\ S_\lambda:\ |z(\xi)| \leqslant \varphi_{max}\xi^{\sigma+2/\sigma},\quad \xi \geqslant 0 \tag{2.42}$$

(оценку сверху типа (2.42) можно также вывести непосредственно из уравнения (2.4)). Из этого неравенства, в частности, следует, что функции z из S_λ удовлетворяют условию симметрии $z'(0; \lambda) = 0$. Любопытно отметить, что в силу указанного на рис. 1, *б* поведения траекторий любые решения z из P_μ во всякой окрестности $\xi = +\infty$ не удовлетворяют (2.42).

Итак, установлены два принципиальных факта:

1) семейства решений P_μ, Q_a, R_ν, S_λ линеаризованной задачи непрерывны по соответствующим параметрам;

2) все решения бесконечно осциллируют в окрестности $\xi = +\infty$.

Тогда представления, развитые в [2,4—6,36] (см. разд. 5,6), позволяют сделать следующие выводы. Каждое из однопараметрических семейств P_μ, Q_a, S_λ должно в принципе порождать дискретное (счетное) множество решений исходной задачи (2.2), (2.3) с таким же характером немонотонности в окрестности $0 \equiv 1$. Эти множества решений удобно обозначить соответственно через $P = \{P_i\}$, $Q = \{Q_i\}$ и $S = \{S_i\}$. Что касается семейства R_ν, то здесь за счет появления нового параметра (R_ν, в отличие от предыдущих, двупараметрическое) множество соответствующих решений $\theta(\xi)$ должно быть не дискретным, а континуальным. В дальнейшем оно обозначается через $R = \{R_i^\nu\}$. Здесь индекс $\nu = \{\nu_1\}$ подчеркивает континуальность спектра таких решений. Необходимость дискретного нижнего индекса разъясняется в разд. 3. Степень достоверности этих качественных выводов проверяется численно в разд. 3, а в разд. 5, 6 при $N = 1$ доказывается существование дискретных счетных семейств решений $\{P_i\}$ и $\{Q_i\}$.

3. Нелинейные собственные функции (численные результаты)

Для уравнения (2.2) можно получить формальным разложением следующее представление решений в окрестности $\xi = +\infty$:

$$\theta(\xi) = C\xi^{-\frac{\sigma+2}{\beta-(\sigma+1)}} + o\left(\xi^{-\frac{\sigma+2}{\beta-(\sigma+1)}}\right),\quad \xi \to +\infty, \tag{3.1}$$

где $C > 0$ — произвольная константа. При этом в случае $\beta > \sigma + 1$

имеем $\theta(\xi) \to 0$ при $\xi \to +\infty$, так что второе условие (2.3) выполнено. Ниже проводится численное построение решений задачи (2.2), (2.3) с асимптотическим поведением (3.1) в одномерном случае $N = 1$ при $\sigma = 1$, $\beta = 3$.

Качественные выводы разд. 2 в основном оправдываются. Действительно, существуют четыре семейства решений задачи (2.2), (2.3), имеющих топологически различное локальное поведение в окрестности гомотермического решения $\theta \equiv 1$. Каждому решению из этих семейств соответствует своя константа C из (3.1), и эти решения называются в дальнейшем *собственными функциями* (СФ). Параметр C из (3.1) (он позволяет упорядочить все многообразие решений), отвечающий функциям из семейств $\{P_i\}$, $\{Q_i\}$ и $\{R_i^\nu\}$, будем обозначать соответственно через C_P^i, C_Q^i и $C_R^{i,\nu}$. О семействе S речь пойдет ниже.

Собственные функции из семейства P. СФ $\{P_i\}$, $\theta(0) = \theta_0^{P_i} \neq 1$, имеют в общем случае немонотонный профиль. Индекс i здесь и в дальнейшем равен количеству экстремумов СФ. Численно удается построить несколько первых СФ из P (см. рис. 3). Параметр C_P^i возрастает с ростом i, $C_P^{i+1} > C_P^i$, C_P^1 — конечная, отличная от нуля величина. Видно, что у СФ, имеющих несколько экстремумов, происходит «раскачка» колебаний возле гомотермического решения $\theta \equiv 1$, и справедливо неравенство $|\theta_0^{P_{i+1}} - 1| < |\theta_0^{P_i} - 1|$. У старших СФ (при больших значениях i) происходит сгущение колебаний при $\xi \to 0$.

Собственные функции из семейства Q. Решения $\{Q_i\}$ этого семейства удовлетворяют условию $\theta(\xi) \equiv 1$ при $\xi \in [0, \xi_i]$, а при $\xi > \xi_i$ $\theta(\xi) \not\equiv 1$.

Параметры ξ_i и $\theta_0^{P_i}$ из множеств Q и P соответственно можно назвать собственными значениями задачи (2.2), (2.3). Пары (ξ_i, C_Q^i) упорядочены следующим образом: $\xi_{i+1} < \xi_i$, $C_Q^{i+1} < C_Q^i$; ξ_1 и C_Q^1 — конечные величины. Характер немонотонного поведения СФ Q_i такой же, как у СФ P_i.

Собственные функции из семейства R. Решения из $R = \{R_i^\nu\}$ удовлетворяют условию $\theta(0) = 1$, и в достаточно малой окрестности $\xi = 0$ решения $\theta(\xi)$ монотонны. Немонотонное поведение решений из R такое же, как у СФ из P и Q.

Однако, в отличие от первых двух семейств, спектр СФ $\{R_i^\nu\}$ имеет континуальный характер. Более точно, $R = \{R_i^\nu\}$ состоит из счетного (бесконечного) набора континуальных множеств различных решений $\theta(\xi)$. Причем, как показывают расчеты, при $i \geqslant 0$ любое $C \in (C_Q^{i+1}, C_Q^i)$ порождает собственную функцию из R_i^ν (здесь формально полагаем $C_Q^0 = \infty$, так что множество R_0^ν состоит из одного пространственно однородного решения $\theta \equiv 1$). Поведение таких СФ в области монотонного стремления к гомотермическому решению при $\xi \to 0$ характеризуется константой ν_1 из разложения (2.41). Любой СФ из R соответствует пара констант $(\nu_1^i, C_R^{i,\nu})$. График за-

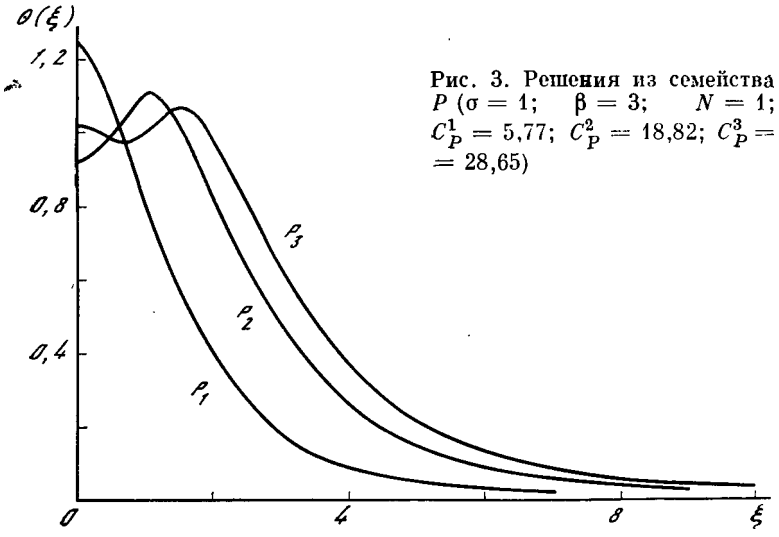


Рис. 3. Решения из семейства P ($\sigma = 1$; $\beta = 3$; $N = 1$; $C_P^1 = 5{,}77$; $C_P^2 = 18{,}82$; $C_P^3 = 28{,}65$)

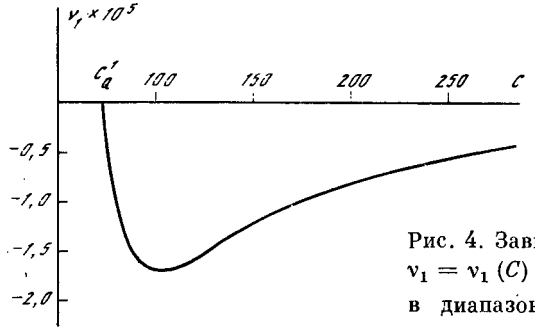


Рис. 4. Зависимость параметра $\nu_1 = \nu_1(C)$ функций из R_1^{ν} в диапазоне $C \geqslant C_Q^1 = 73{,}56$

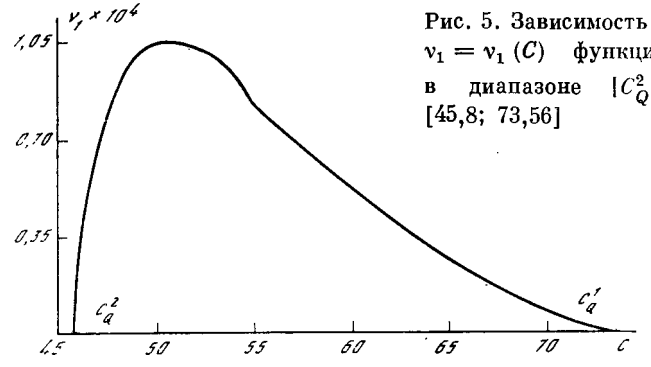
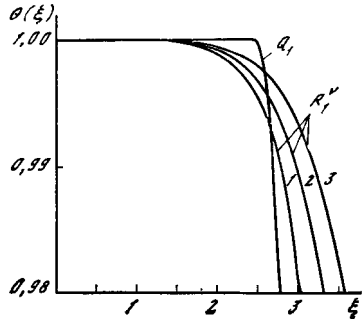


Рис. 5. Зависимость параметра $\nu_1 = \nu_1(C)$ функций из R_2^{ν} в диапазоне $[C_Q^2, C_Q^1] = [45{,}8; 73{,}56]$



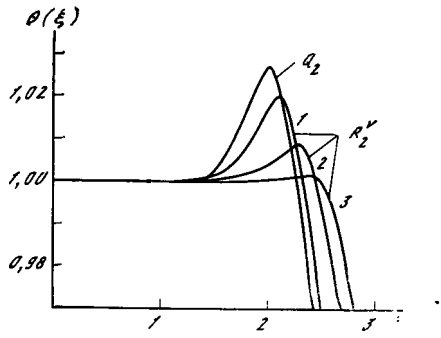


Рис. 6. Решение Q_1 и три решения из R_1^ν ($\sigma = 1$; $\beta = 3$; $N = 1$; $C_Q^1 = 73{,}56$; $C_1 = 100$; $C_2 = 150$; $C_3 = 200$)

Рис. 7. Решение Q_2 и три решения из R_2^ν ($\sigma = 1$; $\beta = 3$; $N = 1$; $C_Q^2 = 45{,}8$; $C_1 = 50$; $C_2 = 60$; $C_3 = 70$)

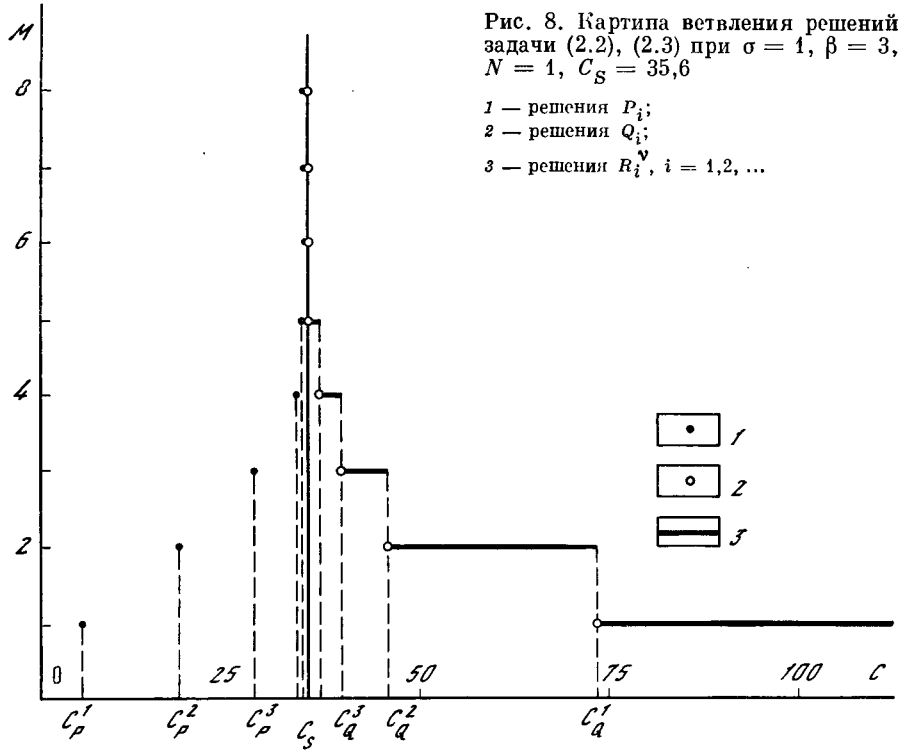


Рис. 8. Картина ветвления решений задачи (2.2), (2.3) при $\sigma = 1$, $\beta = 3$, $N = 1$, $C_S = 35{,}6$

1 — решения P_i;
2 — решения Q_i;
3 — решения R_i^ν, $i = 1, 2, \ldots$

висимости ν_1^i от $C_R^{i,\nu} \in (C_Q^{i+1}, C_Q^i)$ имеет нулевые значения ν_1^i на границе области изменения $C_R^{i,\nu}$ и один конечный экстремум (см. рис. 4, 5 — численный результат). Отсюда ясно, что СФ Q_i являются в определенном смысле «предельными» из континуального семейства R_i^ν, т. е. им отвечают константы $\nu_1^i = 0$.

На рис. 6, 7 изображено сравнительное поведение СФ Q_i и R_i^{ν} при $i = 1, 2$ в области значений, близких к гомотермическому решению. При больших ξ все эти решения монотонно стремятся к нулю при $\xi \to +\infty$ (так же, как на рис. 3).

Картина ветвления решений. Собственная функция из семейства S. На рис. 8 изображена зависимость количества экстремумов M СФ от значений константы C из (3.1). Видно, что при $i \to \infty$ константы C_P^i сходятся снизу, а C_Q^i, $C_R^{i,\nu}$ — сверху к некоторому значению C_S. Учитывая, что $\theta_0^{P\,i} \to 1$, $\xi_i \to 0$ при $i \to \infty$, а также результаты разд. 2, можно сделать вывод о том, что C_S отвечает некоторой СФ семейства S. Эта СФ удовлетворяет условию $\theta(0) = 1$ и бесконечно осциллирует в любой малой окрестности $\xi = 0$, т. е. ей соответствует $M = +\infty$. По всей видимости, решение типа S единственно.

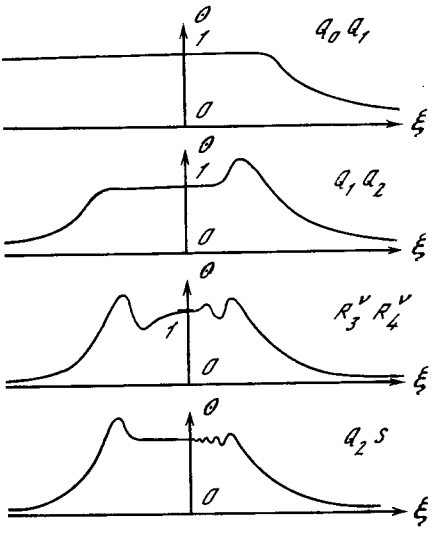


Рис. 9. Примеры несимметричных собственных функций

Несимметричные СФ. Очевидно, что при $N = 1$ СФ Q_i, R_i^{ν}, S можно гладко соединить друг с другом при $\xi = 0$ и получить при этом несимметричные СФ, определенные на всей оси $\xi \in (-\infty, \infty)$. Примеры таких решений схематически изображены на рис. 9. Все они являются обобщенными решениями уравнения (2.2) в R^1. Из вида асимптотики $\theta(\xi)$ при $\xi \to 0$ нетрудно вывести условия, при которых θ на рис. 9 являются классическими решениями ($\theta \in C^2(R^1)$).

4. Об асимптотической устойчивости неограниченных автомодельных решений (численное исследование)

Ниже кратко излагаются результаты численного исследования асимптотической устойчивости автомодельных решений (1.5), $\beta \geq \sigma + 1$, которые, как уже отмечалось в разд. 1, описывают поведение при $t \to T_0^-$ неограниченных решений задачи Коши (1.1), (1.2). Предварительно определим, что мы понимаем под асимптотической устойчивостью неограниченного автомодельного решения (1.5). Самое естественное (см. библиографию в [44, 45]) определение таково: пусть $T_0 < +\infty$ — время обострения неограниченного решения $u = u(t, |x|)$ задачи Коши. Тогда в соответствии с (1.5) введем

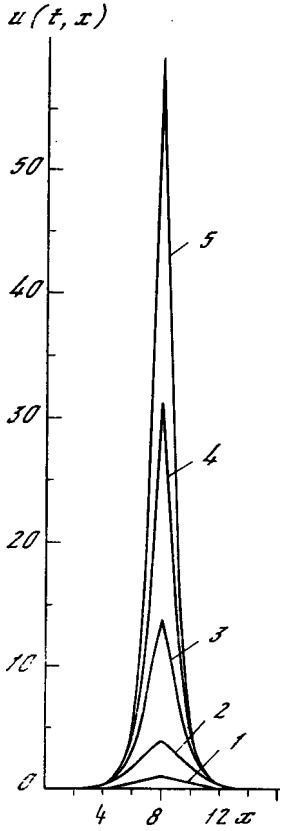
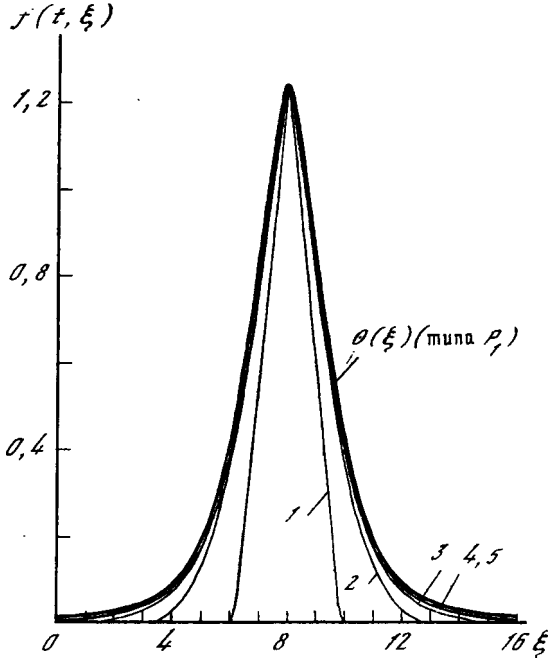


Рис. 10. Численное решение задачи Коши (1.1), (1.2) ($\sigma = 1$; $\beta = 3$; $N = 1$; $t_1 = 0$; $t_2 = 1{,}123$; $t_3 = 1{,}167$; $t_4 = 1{,}17039$; $t_5 = 1{,}17096$)

Рис. 11. Асимптотическая устойчивость автомодельного решения (1.5) с функцией $\theta(\xi)$ типа P_1

Автомодельная обработка (4.2) результатов расчета, приведенных на рис. 10



автомодельное представление

$$f(t, \xi) = (T_0 - t)^{\frac{1}{\beta-1}} u(t, \xi (T_0 - t)^{m_*}), \quad m_* = \frac{\beta - (\sigma + 1)}{(\sigma + 2)(\beta - 1)}, \qquad (4.1)$$

и под асимптотической устойчивостью решения (1.5) будем понимать стабилизацию $f(t, \xi) \to \theta(\xi)$ при $t \to T_0^-$ по крайней мере для некоторого класса начальных функций $u_0 \in W \neq \{u_A(0, x)\}$. Однако «автомодельную обработку» (4.1) нельзя с достаточной надежностью использовать в численных расчетах, поскольку величина $T_0 < +\infty$ априорно не известна и, более того, часто не может быть вычислена с нужной степенью точности. Поэтому вместо (4.1) на самом деле мы будем использовать такое автомодельное представление:

$$f(t, \xi) = \frac{\theta(0)}{u_m(t)} u\left(t, \xi \left(\frac{\theta(0)}{u_m(t)}\right)^{m_*(\beta-1)}\right), \qquad (4.2)$$

где $u_m(t) = \sup\limits_x u(t, x)$ (предполагается, что $u_m(t) \equiv u(t, 0)$). Легко видеть, что в определенном смысле «обработки» (4.1) и (4.2) экви-

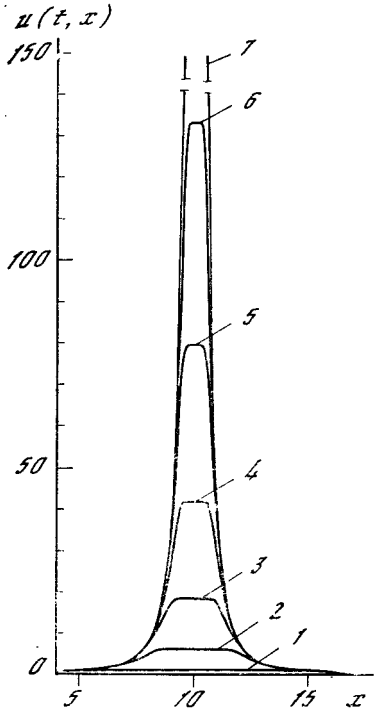
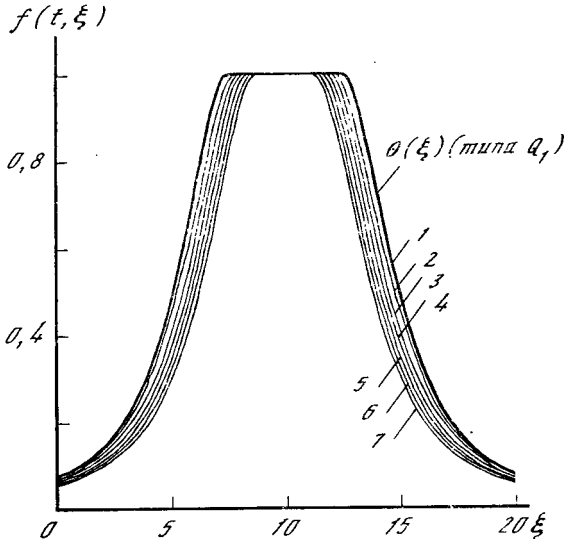


Рис. 12. Неограниченное решение задачи Коши ($\sigma = 1$; $\beta = 3$; $N = 1$; $t_1 = 0$; $t_2 = 0{,}443$; $t_3 = 0{,}456$; $t_4 = 0{,}4572$; $t_5 = 0{,}45741$; $t_6 = 0{,}457463$; $t_7 = 0{,}457479$)

Рис. 13. Неустойчивость решения (1.5) с $\theta(\xi)$ типа Q_1

Автомодельная обработка (4.2) результатов, приведенных на рис. 12



валентны; при этом речь идет, естественно, об исследовании одного и того же автомодельного решения (1.5) с фиксированной функцией $\theta(\xi)$ и, следовательно, величиной $\theta(0)$ в (4.2). Автомодельное представление типа (4.2) использовалось в одном частном случае в [49], независимым образом оно было введено в [5] (см. также [2, 6]) при исследовании устойчивости неограниченных автомодельных решений (1.12) уравнения (1.11).

Хорошо известно, что «наиболее устойчивым» в том или ином смысле является, как правило, решение параболического уравнения с минимальным количеством точек экстремума, об этом, в частности, свидетельствуют численные результаты [2, 5, 6], а также выводы общей теории устойчивости стационарных решений (см. библиографию в [44, 45]). Поэтому следует ожидать, что устойчивым в наиболее широком множестве $u_0 \in W$ является решение (1.5) с минимальной по своей сложности функцией 0.

На рис. 10, 11 приведены результаты численного решения задачи (1.1), (1.2), показывающие асимптотическую устойчивость $u_A(t, x)$ с простейшей функцией $\theta(\xi)$, $\xi = |\eta|$, типа P_1. Что касается решения u_A с функцией $\theta(\xi)$ типа Q_1 (простейшей из семейства Q), то оно является, по-видимому, неустойчивым при $t \to T_0^-$ (см. рис. 12, 13). Здесь в качестве $u_0(x)$ было взято автомодельное распре-

деление $u_A(0, x) = T_0^{-1/(\beta-1)}\theta(xT_0^{-m_*})$, однако стабилизации $f(t, \xi) \to \theta(\xi)$ в этом случае не происходит. Отметим, что функция $\theta(\xi)$ типа Q_1 в отличие от P_1 имеет две нетривиальные точки экстремума (при $\xi = \pm a_1$), что, вероятно, ведет к неустойчивости соответствующего неограниченного автомодельного решения.

В заключение отметим, что для теоретического исследования асимптотической устойчивости автомодельных решений (1.5) применимы некоторые подходы, развитые в [43] для аналогичного анализа решений (1.12) уравнения (1.11).

5. Теоремы существования решений из семейства P

Ниже для удобства изложения рассматривается задача

$$\xi^{1-N}(\xi^{N-1}|\theta'|^{\sigma}\theta')' - m\theta'\xi - \theta + |\theta|^{\beta-1}\theta = 0, \quad \xi > 0, \tag{5.1}$$

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta(+\infty) = 0, \quad m = [\beta - (\sigma+1)]/(\sigma+2) > 0, \tag{5.2}$$

которая является «продолжением» исходной задачи (2.2), (2.3) в область отрицательных значений $\theta = \theta(\xi) < 0$ (если $\theta \geqslant 0$, то они тождественно совпадают). Поскольку при доказательстве теорем существенно используется свойство бесконечной осциллируемости решений соответствующей линеаризованной задачи, мы будем считать, что $a_* = [\beta(\sigma-1)+1]/\sigma \geqslant 0$ (см. предложение 1 в разд. 2). Основной результат данного раздела состоит в следующем.

Теорема 3. *Пусть* $\beta > \sigma + 1$, $N = 1$. *Тогда существует бесконечное (счетное) множество различных положительных решений* $\theta = \theta_i(\xi)$ *задачи* (5.1), (5.2) *из семейства* $P = \{P_i\}$, *так что* $\theta_i(0) \neq 1$ (см. рис. 3). *Каждая функция* $\theta_i(\xi)$ *имеет на* $[0, +\infty)$ *ровно* i *точек экстремума*

Теорема 4. *Пусть* $N > 1$ *и* $\sigma + 1 < \beta < \beta_* = [N(\sigma+1) + (\sigma+2)]/[N - (\sigma+2)]_+$ (*здесь используется обозначение* $(z)_+ = \max\{0, z\}$). *Тогда существует положительное решение* $\theta = \theta_1(\xi)$, $\theta_1(0) > 1$ *задачи* (5.1), (5.2), *монотонно убывающее по* ξ.

Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений, устанавливающих свойства решений $\theta = \theta(\xi; \mu)$ следующей задачи Коши для уравнения (5.1):

$$\theta_\xi'(0; \mu) = 0; \quad \theta(0; \mu) = \mu \neq 1, \quad \mu > 0. \tag{5.3}$$

Необходимо найти такие значения μ, при которых $\theta(\xi; \mu) > 0$ и выполнено второе условие (5.2).

Прежде всего отметим, что локальная разрешимость задачи (5.1), (5.2) при всех достаточно малых $\xi > 0$ устанавливается так же, как при доказательстве теоремы 1 в разд. 2. К вопросу о локальной разрешимости уравнения в окрестности точки вырождения, где $\theta' = 0$, мы вернемся при обсуждении непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра (см. лемму 5 ниже). Следующие две леммы очевидны.

Лемма 1. *Решение задачи* (5.1), (5.3) *бесконечно продолжаемо.*

Лемма 2. *Пусть существует* (*конечный или бесконечный*) *предел положительного решения* $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \theta(\xi; \mu) = s$. *Тогда* $s = 0$.

Лемма 3. *Если* $\theta(\xi;\mu)$ — *неотрицательное решение задачи* (5.1), (5.3), *то* $\theta(\xi;\mu) > 0$ *в* R^1.

Последнее утверждение означает, что функция $\theta(\xi;\mu)$ не может быть финитной по ξ, т. е. ни в одной точке $\xi_1 \in R^1_+$ не могут выполняться одновременно два условия: $\theta(\xi_1) = 0$, $\theta'(\xi_1) = 0$, причем $\theta(\xi) > 0$ при $\xi < \xi_1$. Доказательство проводится на основе локального анализа уравнения (5.1) на малом интервале $(\xi_1 - \delta, \xi_1)$, $\delta > 0$.

Следующая лемма имеет принципиальное значение. В ней устанавливается существование немонотонных решений задачи Коши со сколь угодно большим числом точек экстремума, расположенных на компакте $K = [0, \xi_K]$ определенного размера, где $\theta(\xi;\mu) > 0$.

Лемма 4. *Пусть* $\beta > \sigma + 1$, $N \geqslant 1$ *и* M — *произвольное натуральное число. Тогда найдется такое* $\mu_M > 0$ $(\neq 1)$ *и некоторый компакт* $K = [0, \xi_K]$, *что* $\theta(\xi;\mu_M) > 0$ *на* K *и имеет в* $[0, \xi_K]$ *не менее* M *точек экстремума.*

Доказательство. Сделаем в (5.1) преобразование $\theta \to 1 + \varepsilon z(\xi)$, $\xi \to \xi\varepsilon^{(\sigma+2)/\sigma}$, $\varepsilon > 0$, формально линеаризующее (5.1) в окрестности однородного решения $\theta \equiv 1$. Тогда уравнение примет вид (ср. (2.4)):

$$\xi^{1-N}(\xi^{N-1} \mid z' \mid^{\sigma} z')' - mz'\xi + (\beta - 1)z + F(z,\varepsilon) = 0,\ \xi > 0, \quad (5.4)$$

где введено обозначение $F(z,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\{|1 + \varepsilon z|^{\beta-1}(1 + \varepsilon z) - 1 - \varepsilon\beta z\}$, причем функция $F(z,\varepsilon)$ непрерывна вместе со своими производными по z, ε и $F(z,\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для любого фиксированного z. Положим теперь $\mu = 1 + \mu_0\varepsilon$ ($\mu_0 \neq 0$ — фиксированная постоянная). Тогда краевые условия для $z(\xi;\varepsilon)$ примут такой вид:

$$z'_{\xi}(0;\varepsilon) = 0, \qquad z(0;\varepsilon) = \mu_0 \neq 0. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.4) при $\varepsilon = 0$ формально превращается в линеаризованное уравнение (2.4), бесконечная осциллируемость решений которого установлена в разд. 2. Поэтому справедливость леммы 4 вытекает из непрерывной зависимости решений задачи (5.4), (5.5) от параметра ε в окрестности $\varepsilon = 0$, которая доказывается ниже. Положительность осциллирующего на K решения $\theta(\xi;\mu)$ вытекает из свойств решений линеаризованного уравнения и структуры преобразований, которые использовались при переходе к новому уравнению (5.4).

Лемма 5. *При любом фиксированном* $\mu_0 \neq 0$ *решение задачи* (5.4), (5.5) *на произвольном компакте* $K = [0, \xi_K]$ *непрерывно зависит от параметра* ε *в окрестности* $\varepsilon = 0$.

Доказательство.

Изложим основные моменты доказательства. Очевидно, что нарушение непрерывной зависимости от ε в окрестности $\varepsilon = 0$ может произойти за счет появления на рассматриваемом компакте точек экстремума (вырождения), где $z' = 0$. В то же время сжимаемость оператора $\widetilde{\Phi}$ в эквивалентном (5.4) интегральном уравнении $z = \widetilde{\Phi}(z)$ в некотором подходящем множестве функций $\{z \in C(\Delta),\ \Delta \subset K,\ \Delta \neq \varnothing\}$ обеспечивает непрерывность зависимости $z(\xi;\varepsilon)$ от ε на Δ. Поэтому достаточно доказать существование покрытия K конечной

системой непересекающихся отрезков $\{\Delta_i\}$, $\inf\limits_i \operatorname{mes} \Delta_i > 0$, на каждом из которых имеет место сжимаемость оператора $\widetilde{\Phi}$ (в подходящем множестве $\{z\}$), и тогда непрерывная зависимость от ε на K будет вытекать из наличия этого же свойства на каждом отрезке Δ_i. Уравнение (5.4) в окрестности произвольной точки $\xi_0 > 0$, где заданы условия [1] $z(\xi_0; \varepsilon) = h_1$, $z'_\xi(\xi_0; \varepsilon) = h_2$, эквивалентно интегральному уравнению ($\widetilde{\Phi} \equiv h_1 + \Phi$)

$$z(\xi; \varepsilon, h_1, h_2) = h_1 + \Phi(z; \varepsilon, h_1, h_2)(\xi), \quad \xi \in \Delta, \tag{5.6}$$

где оператор $\Phi(\cdot)$ имеет вид

$$\Phi(z; \varepsilon, h_1, h_2) = \int_{\xi_0}^{\xi} \Big\{ mzt - mh_1 \Big(\frac{\xi_0}{t}\Big)^{N-1} \xi_0 - lt^{1-N} \int_{\xi_0}^{t} s^{N-1} z\, ds - \\ - t^{1-N} \int_{\xi_0}^{t} s^{N-1} F(z, \varepsilon)\, ds + h_2^{\sigma+1} \Big(\frac{\xi_0}{t}\Big)^{N-1} \Big\}^{\frac{1}{\sigma+1}} dt, \quad l = Nm + \beta - 1. \tag{5.7}$$

Рассмотрим теперь на Δ два решения $z_i = z_i(\xi; \varepsilon_i, h_1^i, h_2^i)$, $i = 1, 2$ (при доказательстве леммы проводится аналогичный анализ при $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$). Используя формулу конечных приращений Лагранжа, из (5.6), (5.7) получаем оценку

$$\| z_1 - z_2 \|_{C(\Delta)} \leqslant |h_1^1 - h_1^2| + \| \Phi'_z(\bar{z}; \varepsilon_1, h_1^1, h_2^1) \|_{C(\Delta)} \| z_1 - z_2 \|_{C(\Delta)} + \\ + \| \Phi'_\varepsilon(z_2; \bar{\varepsilon}, h_1^1, h_2^1) \|_{C(\Delta)} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + \| \Phi'_{h_1}(z_2; \varepsilon_2, \bar{h}_1, h_2^1) \|_{C(\Delta)} |h_1^1 - h_1^2| + \\ + \| \Phi'_{h_2}(z_2; \varepsilon_2, h_1^2, \bar{h}_2) \|_{C(\Delta)} |h_2^1 - h_2^2|, \tag{5.8}$$

где $\bar{z}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ — некоторые средние значения. Без труда проверяется, что нормы производных $\| \Phi'_z(\cdot) \|_{C(\Delta)}$, $\| \Phi'_{h_1}(\cdot) \|_{C(\Delta)}$, $\| \Phi'_{h_2}(\cdot) \|_{C(\Delta)}$, $\| \Phi'_\varepsilon(\cdot) \|_{C(\Delta)}$ ограничены для некоторого $\Delta \neq \varnothing$, если величины $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$, $|\varepsilon_i|$, $|h_i^1 - h_i^2|$, $i = 1, 2$, достаточно малы, причем $|h_1^i| + |h_2^i| \neq 0$. При этом допустимая величина Δ при малых ε_i зависит только от $\rho = \min\{|h_1^1| + |h_2^1|, \ |h_1^2| + |h_2^2|\}$ и $\delta = \operatorname{mes} \Delta \to 0$ при $\rho \to 0$. Последнее в силу (5.8) означает непрерывную зависимость решения $z(\xi; \varepsilon, h_1, h_2)$, а, следовательно, и его производной на Δ от h_1, h_2 ($|h_1| + |h_2| \neq 0$) и ε (в окрестности $\varepsilon = 0$). Действительно, если $\| \Phi'_z(\cdot) \|_{C(\Delta)} = q = q(\Delta) < 1$, то (5.8) легко привести к виду

$$\| z_1 - z_2 \|_{C(\Delta)} \leqslant q \| z_1 - z_2 \|_{C(\Delta)} + \operatorname{const} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |h_1^1 - h_1^2| + |h_2^1 - h_2^2|),$$

откуда непосредственно вытекает справедливость сделанного утверждения.

[1] Ниже без ограничения общности рассматривается случай $h_2 \geqslant 0$, $z'_\xi \geqslant 0$ на Δ.

Следовательно, непрерывная зависимость от ε может нарушиться лишь в том случае, если решение линеаризованного уравнения (5.4) при $\varepsilon = 0$ обращается в некоторой точке в нуль вместе со своей производной. Однако, как нетрудно проверить, такие точки не существуют. Действительно, предположим, что покрытие K конечной системой подходящих отрезков $\{\Delta_i\}$ невозможно, т. е. $\inf_i \operatorname{mes} \Delta_i = 0$. Тогда на основе тех же рассуждений приходим к выводу о существовании точки $\xi_* \in K$, в которой $z = 0$ и $z' = 0$, что невозможно.

Важную роль играют следующие утверждения.

Лемма 6. *Пусть* $\beta > \sigma + 1$, $N = 1$. *Тогда, если* $\mu > [(\beta + 1)/2]^{1/(\beta-1)} > 1$, *то* $\theta(\xi; \mu)$ *обращается в нуль в некоторой точке* $\xi = \xi_\mu > 0$, *причем на* $(0, \xi_\mu]$ *функция* $\theta(\xi; \mu)$ *монотонно убывает.*

Доказательство. Умножим уравнение (5.1) на $\theta_\xi(\xi; \mu)$ и проинтегрируем получившееся равенство по некоторому интервалу (ξ_1, ξ_2). В результате получим

$$\frac{\sigma+1}{\sigma+2}\{|\theta'(\xi_2; \mu)|^{\sigma+2} - |\theta'(\xi_1; \mu)|^{\sigma+2}\} - m\int_{\xi_1}^{\xi_2} s(\theta')^2\, ds + \omega(\theta(\xi_2; \mu)) - \omega(\theta(\xi_1; \mu)) = 0, \tag{5.9}$$

где введено обозначение $\omega(s) = |s|^{\beta+1}/(\beta + 1) - s^2/2$. Предположим, что $\xi = \xi_2$ — первая точка положительного минимума функции $\theta(\xi; \mu)$, и положим в (5.9) $\xi_1 = 0$. Очевидно, что $\theta(\xi_2; \mu) < 1$. Тогда в силу условия $m > 0$ приходим к неравенству

$$\omega(\theta(\xi_2; \mu)) = \omega(\mu) + m\int_0^{\xi_2} s(\theta')^2\, ds > \omega(\mu).$$

Отсюда $\omega(\theta(\xi_2; \mu)) > 0$, и, поскольку $\theta(\xi_2; \mu) < 1$, имеем $\theta(\xi_2; \mu) < -[(\beta + 1)/2]^{1/(\beta-1)} < 0$, что завершает доказательство.

С помощью тождества (5.9) нетрудно получить следующую информацию о некоторых конкретных свойствах решений уравнения (5.1).

Следствие 1. *При* $\beta > \sigma + 1$, $N = 1$ *всякое положительное решение задачи* (5.1), (5.2) *удовлетворяет оценке*

$$\theta(\xi) < [(\beta + 1)/2]^{1/(\beta-1)}. \tag{5.10}$$

Следствие 2. *Пусть* $\beta > \sigma + 1$, $N = 1$. *Если* $0 \leqslant \xi_1 < \xi_2$ — *точки минимума (максимума) функции* $\theta(\xi; \mu) > 0$ *на* $[\xi_1, \xi_2]$, *то* $\theta(\xi_1; \mu) > \theta(\xi_2; \mu)$ (*соответственно* $\theta(\xi_1; \mu) < \theta(\xi_2; \mu)$).

Другими словами, при $N = 1$ амплитуда осцилляций положительных решений уравнения (5.1) возрастает при увеличении ξ.

Лемма 7. *Пусть* $\beta > \sigma + 1$, $N = 1$. *Фиксируем произвольное* $\xi_0 \geqslant 0$. *Существует такое значение* $\nu_* \in (0, 1)$ (ν_* *не зависит от* ξ_0), *что при любых* $\nu_0 \in (0, \nu_*)$ *решение задачи Коши* $\theta = \theta(\xi; \xi_0, \nu_0)$ *для уравнения* (5.1) *в области* $\xi > \xi_0$ *с условиями* $\theta(\xi_0) = \nu_0$, $\theta_\xi(\xi_0) = 0$ *обращается в нуль в некоторой точке* $\xi = \xi_*$ ($\xi_* > \xi_0$),

причем $\theta > 0$ *на* (ξ_0, ξ_*) *и имеет на этом интервале одну точку максимума.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. для любого $\nu_* \in (0, 1)$ существуют такие $\xi_0 \geqslant 0$ и $\nu_0 \in (0, \nu_*)$, что $\theta(\xi)$ имеет в некоторой точке $\xi_2 > \xi_0$ положительный минимум. Тогда, очевидно, существует и точка максимума $\xi = \xi_3 \in (\xi_0, \xi_2)$, а также точка $\xi = \xi_4 \in (\xi_0, \xi_3)$, такая, что $\theta(\xi_4) = \beta^{-1/(\beta-1)} < 1$. Полагая в (5.9) $\xi_1 = \xi_0$, получаем

$$0 > \omega(\theta(\xi_2)) = \omega(\nu_0) + m\int_{\xi_0}^{\xi_2} s(0')^2\,ds > \omega(\nu_0) + m\int_{\xi_0}^{\xi_4} s(0')^2\,ds. \qquad (5.11)$$

Покажем, что при малых $\nu_0 > 0$ (и любых $\xi_0 \geqslant 0$) правая часть (5.11) положительна, и тем самым получим противоречие. Для этого оценим величину ξ_4 и производную $0'(\xi)$ на $[\xi_0, \xi_4]$.

Введем обозначение $0_m = \beta^{-1/(\beta-1)}$ и $F_m = \max\limits_{\theta>0}\{\theta - \theta^\beta\} = 0_m - 0_m^\beta$. Интегрируя (5.1) по интервалу (ξ_0, ξ), $\xi \in (\xi_0, \xi_4)$ с учетом условия $\theta' > 0$, получаем такую оценку:

$$(\theta')^{\sigma+1} = m(\xi 0 - \xi_0\nu_0) - m\int_{\xi_0}^{\xi} 0\,ds + \int_{\xi_0}^{\xi}(\theta - 0^\beta)\,ds < m\xi\theta_m + F_m\xi, \qquad (5.12)$$

или, что тоже самое, $\theta'(\xi) < (m\theta_m + F_m)^{1/(\sigma+1)}\,\xi^{1/(\sigma+1)}$, откуда непосредственно следует, что $\theta_m - \nu_0 < (m0_m + F_m)^{1/(\sigma+1)} \times (\xi_4^{(\sigma+2)/(\sigma+1)} - \xi_0^{(\sigma+2)/(\sigma+1)})$, т. е

$$\xi_4 > \left\{\frac{(0_m - \nu_0)}{(F_m + m0_m)^{\frac{1}{\sigma+1}}} + \xi_0^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\right\}^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}} \equiv G(\nu_0, \xi_0). \qquad (5.13)$$

Однако из (5.1) также нетрудно получить оценку

$$(|\theta'|^\sigma\theta')' - m\theta'\xi = \theta - \theta^\beta > 0, \quad \xi \in (\xi_0, \xi_4),$$

или

$$0'(\xi) > \left[\frac{\sigma m}{2(\sigma+1)}\right]^{1/\sigma}(\xi^2 - \xi_0^2)^{1/\sigma}, \quad \xi \in (\xi_0, \xi_4). \qquad (5.14)$$

Тогда с помощью (5.14) и (5.13) выводим следующее:

$$\omega(\nu_0) + m\int_{\xi_0}^{\xi_4} s(0')^2\,ds > \omega(\nu_0) + m\left[\frac{\sigma m}{2(\sigma+1)}\right]^{2/\sigma}\int_{\xi_0}^{\xi_4} s(s^2 - \xi_0^2)^{2/\sigma}\,ds >$$

$$> -\frac{\nu_0^2}{2} + m\left[\frac{\sigma m}{2(\sigma+1)}\right]^{2/\sigma}\int_{\xi_0}^{\xi_4} s(s^2 - \xi_0^2)^{2/\sigma}\,ds \equiv H(\nu_0).$$

Очевидно, что $H(\nu_0) > 0$ при всех достаточно малых $\nu_0 > 0$ независимо от величины ξ_0. Сопоставление данного результата с (5.11) приводит к противоречию.

Для того чтобы перейти непосредственно к доказательству теоремы 3, нам понадобится еще одна

Лемма 8. *Решение задачи* (5.1), (5.3) *и его производная непрерывным образом зависят от* μ *в окрестности* $\mu = \mu_* > 0$, $\mu_* \neq 1$, *на произвольном компакте* K.

Справедливость этого утверждения доказывается так же, как лемма 5. При этом используется тот факт, что на произвольном компакте $K = [0, \xi_K]$ не содержатся точки $\xi = \xi_* > 0$, в которых одновременно выполняются условия $\theta(\xi_*; \mu_*) = 0$, $\theta'(\xi_*; \mu_*) = 0$ (см. лемму 3) или $\theta(\xi_*; \mu_*) = 1$, $\theta'(\xi_*; \mu_*) = 0$. В последнем случае также может нарушаться непрерывная зависимость от μ, так как сформулированная задача Коши имеет в $(\xi_*, +\infty)$ неединственное решение (собственно, этот факт обеспечивает существование решений из семейства Q, см. локальный анализ, проведенный при доказательстве теоремы 2 в разд. 2). Однако, как нетрудно проверить, в этом случае единственным «продолжением» $\theta(\xi; \mu_*)$ в область $(0, \xi_*)$ будет $\theta(\xi; \mu_*) \equiv 1$, что приводит к условию $\mu_* = 1$. Следовательно, такая ситуация невозможна.

Доказательство теоремы 3. Проведем сначала подробное доказательство существования монотонного решения (типа P_1) задачи (5.1), (5.2), следуя в основном [36].

Рассмотрим множество $W_1 = \{\mu > 1 \mid$ существует такой компакт $K = [0, \xi_K]$, что $\theta(\xi; \mu) > 0$ на K и имеет на K по крайней мере одну точку минимума$\}$. В силу леммы 4 $W_1 \neq \varnothing$. Из леммы 6 вытекает, что W_1 ограничено сверху и, следовательно, существует $\mu_1 = \sup W_1 > 1$. Докажем, что $\theta(\xi; \mu_1)$ — искомое положительное (см. лемму 3) монотонное решение задачи (5.1), (5.2). Предположим противное. Тогда возможны две ситуации: 1) функция $\theta(\xi; \mu_1)$ монотонна на некотором компакте $K = [0, \xi_K]$, причем $\theta(\xi_K; \mu_1) = 0$ (тогда $\theta'(\xi_K; \mu_1) < 0$, лемма 3); 2) существует компакт $K = [0, \xi_K]$, такой, что $\theta(\xi; \mu_1) > 0$ на K и имеет на K точку минимума.

Однако оба эти случая противоречат наличию непрерывной зависимости $\theta(\xi; \mu)$ от μ на K в окрестности $\mu = \mu_1 > 1$ (лемма 8), поскольку указанные ситуации будут иметь место при всех достаточно малых $|\mu - \mu_1|$ и, следовательно, $\mu_1 \neq \sup W_1 < +\infty$. Таким образом, единственная точка минимума $\theta(\xi; \mu_1)$ находится в бесконечно удаленной точке ($\xi = +\infty$).

Для доказательства существования немонотонных решений с любым числом экстремумов вводятся множества:

$W_i = \{\mu > 1 \mid$ существует компакт K, такой, что $\theta(\xi; \mu) > 0$ на K и имеет на K не менее i точек минимума$\}$;

$U_i = \{0 < \mu < 1 \mid$ существует компакт K, такой, что $\theta(\xi; \mu) > 0$ на K и имеет на K не менее $i + 1$ точки минимума$\}$.

Тогда функции $\theta(\xi; \mu_i)$, $\mu_i = \sup W_i > 1$ или $\mu_i = \inf U_i \in (0, 1)$ (условие $\inf U_i > 0$ вытекает из леммы 7) являются немонотонными положительными решениями задачи (5.1), (5.2), обладающими ровно i точками минимума на $[0, +\infty)$. Последнее устанавливается с помощью лемм 7 и 8.

Лемма о стационарных решениях. Основой исследования разрешимости задачи (5.1), (5.2) в многомерном случае служит следующее утверждение о свойствах решения $v = v(r; \lambda)$ стационарной задачи:

$$r^{1-N}(r^{N-1}|v'|^{\sigma}v')' + |v|^{\beta-1}v = 0, \quad r > 0;$$
$$v'(0) = 0, \ v(0) = \lambda > 0. \tag{5.15}$$

Легко видеть, что $v(r; \lambda)$ убывает по r на любом компакте $K = [0, \xi_K]$, на котором она положительна.

Лемма 9. 1. *Если* $0 < \beta < \beta_* = [N(\sigma+1) + \sigma + 2]/[N - (\sigma + 2)]_+$, *то* $v(r; \lambda)$ *обращается в нуль в некоторой точке* $r = r_\lambda > 0$, $v(r; \lambda) > 0$ *при* $r \in (0, r_\lambda)$.

2. *Если* $\beta > \beta_*$, *то* $v(r; \lambda) > 0$ *в* R^1_+ *и* $v(+\infty; \lambda) = 0$.

3. *Если* $\beta = \beta_*$ $(N > \sigma + 2)$, *то*

$$v(r; \lambda) = (a^2)^{\frac{N-(\sigma+2)}{(\sigma+2)^2}} C_{N,\sigma}(a^2 + r^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}})^{-\frac{N-(\sigma+2)}{\sigma+2}} > 0, \tag{5.16}$$

где

$$C_{N,\sigma} = \left\{N\left[\frac{N-(\sigma+2)}{\sigma+1}\right]^{\sigma+1}\right\}^{\frac{N-(\sigma+2)}{(\sigma+2)^2}}; \qquad a^2 = \left[\frac{C_{N,\sigma}}{\lambda}\right]^{\frac{(\sigma+2)^2}{(\sigma+1)[N-(\sigma+2)]}}. \tag{5.16'}$$

Замечание. Подчеркнем, что при $\beta > \beta_*$ отсутствует компактное вложение $W^{1,\sigma+2}(\Omega) \subset L^{\beta+1}(\Omega)$ (Ω — ограниченная область в R^N) функциональных пространств, отвечающих двум операторам $\nabla(|\nabla(\cdot)|^{\sigma}\nabla(\cdot))$ и $|\cdot|^{\beta-1}(\cdot)$ в левой части (5.15). Хорошо известно, что при некоторых ограничениях на Ω это влечет за собой отсутствие нетривиального решения краевой задачи с условием $v = 0$ на $\partial\Omega$ [22, 23]. В «критическом» случае ($\beta = \beta_*$) возникает семейство положительных в R^N решений (5.16), (5.16'), представимых в явном виде.

Насколько нам известно, это уже третий подобный пример. Первый из них построен в [50] (см. также [51] и библиографию в ней) и относится к случаю $\sigma = 0$, когда $\beta_* = (N+2)/(N-2)_+$ и уравнение (5.15) имеет вид $\Delta u + u^{(N+2)/(N-2)} = 0$, $x \in R^N$, $N > 2$ (множество функций (5.16) при $\sigma = 0$ совпадает с семейством решений [50, 51]). Существование семейства решений в этом случае можно связать с инвариантностью данного уравнения относительно конформного преобразования (см. [52] и [50]). Другой пример — семейство решений уравнения с бигармоническим дифференциальным оператором $-\Delta^2 u + u^{(N+4)/(N-4)} = 0$, $x \in R^N$, $N > 4$, построенным в [53] ($\beta_* = (N+4)/(N-4)_+$).

Следует, наверное, ожидать, что во всех этих случаях имеет место инвариантность уравнения при критическом значении $\beta = \beta_*$ относительно некоторого конформного преобразования. В связи с этим возникает проблема определения конкретного вида решения, исходя из структуры этого преобразования, что, по-видимому, может сделать поиск решения менее трудоемким. Пока же решение (5.16),

как и в [53], было найдено практически путем подбора, хотя и на этом пути удается сформулировать ряд конструктивных рекомендаций.

Доказательство леммы 9. В своей главной части оно практически целиком основано на известном тождестве [22, 23]. При доказательстве мы будем следовать схеме [51].

1. Пусть $\beta < \beta_*$. Предположим противное: $v(r; \lambda) > 0$ в R^1_+.

а) Рассмотрим сначала более простой случай $N \leqslant \sigma + 2$. Перепишем (5.15) в виде

$$r^{N-1} |v'|^\sigma v' = -\int_0^r \eta^{N-1} v^\beta(\eta; \lambda)\, d\eta, \quad r > 0. \tag{5.17}$$

Тогда при всех $r > 1$ будет справедлива оценка $r^{N-1} |v'|^\sigma v' < < -c < 0$, откуда

$$v(r; \lambda) < v(1; \lambda) - c^{\frac{1}{\sigma+1}} \int_1^r \eta^{\frac{1-N}{\sigma+1}}\, d\eta,$$

и, следовательно, $v(r; \lambda)$ обращается в нуль, если $(1 - N)/(\sigma + 1) + + 1 \geqslant 0$, т. е. при $N \leqslant \sigma + 2$.

б) Пусть теперь $N > \sigma + 2$. Тогда из (5.17), учитывая монотонность $v(r; \lambda)$, получим $r^{N-1} |v'|^\sigma v' < -v^\beta r^N/N$, $r > 0$, откуда следует оценка сверху

$$v(r; \lambda) < \left[\lambda^{\frac{\sigma+1-\beta}{\sigma+1}} + N^{-\frac{1}{\sigma+1}} \frac{[\beta - (\sigma+1)]}{(\sigma+2)} r^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\right]^{-\frac{\sigma+1}{\beta-(\sigma-1)}}, \quad r \geqslant 0. \tag{5.18}$$

Это означает, что $\overline{\lim\limits_{r \to +\infty}} v(r; \lambda)\, r^{(\sigma+2)/[\beta-(\sigma+1)]} < \infty$ и, как нетрудно проверить,

$$\int_0^{+\infty} r^{N-1} [v(r; \lambda)]^{\beta+1}\, dr < +\infty, \tag{5.19}$$

если $N - (\sigma + 2)(\beta + 1)/[\beta - (\sigma + 1)] < 0$. Последнее условие эквивалентно неравенству $\beta < \beta_*$. Умножим (5.15) на $r^{N-1} v(r; \lambda)$ и проинтегрируем по $(0, r)$. В результате получим равенство

$$r^{N-1} (vv' |v'|^\sigma)(r) - \int_0^r s^{N-1} |v'|^{\sigma+2}\, ds + \int_0^r s^{N-1} v^{\beta+1}\, ds = 0 \tag{5.20}$$

и, поскольку $v' < 0$, следующую оценку (см. (5.19)):

$$\int_0^{+\infty} s^{N-1} |v'(s; \lambda)|^{\sigma+2}\, ds \leqslant \int_0^{+\infty} s^{N-1} v^{\beta+1}(s; \lambda)\, ds < +\infty. \tag{5.21}$$

Умножая теперь (5.15) на $r^N v'(r; \lambda)$ и интегрируя по $(0, r)$, приходим к такому равенству:

$$h(r) = \frac{N}{\beta+1} \int_0^r s^{N-1} v^{\beta+1}\, ds - \left[N - 1 - N\frac{\sigma+1}{\sigma+2}\right] \int_0^r s^{N-1} |v'|^{\sigma+2}\, ds, \tag{5.22}$$

где $h(r) = (\sigma + 1)\, r^N \mid v' \mid^{\sigma+2}/(\sigma + 2) + r^N v^{\beta+1}/(\beta + 1)$. Из (5.21) и (5.22) вытекает, что

$$\lim_{r \to +\infty} h(r) < +\infty, \quad \int_a^{+\infty} [h(r)/r]\, dr < +\infty \quad (a > 0),$$

и, следовательно, $\lim\limits_{r \to +\infty} h(r) = 0$. Тогда из (5.22) при $r = +\infty$ получаем

$$\frac{N}{(\beta + 1)} \int_0^{+\infty} s^{N-1} v^{\beta+1}\, ds = \left(N - 1 - N\frac{\sigma + 1}{\sigma + 2}\right) \int_0^{+\infty} s^{N-1} \mid v' \mid^{\sigma+2} ds. \qquad (5.23)$$

Однако, учитывая (5.21), заключаем, что (5.23) не имеет места, если $N/(\beta + 1) > N - 1 - N(\sigma + 1)/(\sigma + 2)$, т. е. при $\beta < \beta_*$.

2. Предположим, что при $\beta > \beta_*$ $v(r; \lambda)$ обращается в нуль в некоторой точке $r = r_\lambda > 0$. Положим $\Omega = \{r = \| x \| < r_\lambda\}$. Тогда $v = 0$ на $\partial\Omega = \{r = r_\lambda\}$, и, полагая в (5.20), (5.22) $r = r_\lambda$, получаем тождества

$$\| v' \|^{\sigma+2}_{L^{\sigma+2}(\Omega)} = \| v \|^{\beta+1}_{L^{\beta+1}(\Omega)},$$

$$r_\lambda^N \mid v'(r_\lambda; \lambda) \mid^{\sigma+2} \frac{\sigma + 1}{\sigma + 2} + \left(\frac{N}{\sigma + 2} - 1\right) \| v' \|^{\sigma+2}_{L^{\sigma+2}(\Omega)} -$$

$$- \frac{N}{\beta + 1} \| v \|^{\beta+1}_{L^{\beta+1}(\Omega)} = 0,$$

из которых следует равенство

$$r_\lambda^N \mid v'(r_\lambda; \lambda) \mid^{\sigma+2} \frac{\sigma + 1}{\sigma + 2} + \left(\frac{N}{\sigma + 2} - 1 - \frac{N}{\beta + 1}\right) \| v' \|^{\sigma+2}_{L^{\sigma+2}(\Omega)} = 0, \qquad (5.24)$$

не выполняющееся в том случае, когда $N/(\sigma + 2) - 1 - N/(\beta + 1) > 0$, т. е. при $\beta > \beta_*$. Отметим, что $| v' | \neq 0$ при $r = r_\lambda$, так что (5.24) нарушается и при $\beta = \beta_*$ (хотя здесь подобный анализ излишен, так как (5.16) охватывает все семейство решений задачи (5.15) в этом случае).

Доказательство теоремы 4. Если следовать схеме доказательства теоремы 3, то для доказательства существования монотонного решения типа P_1 достаточно показать, что всякое решение задачи (5.1), (5.3) при всех достаточно больших μ обращается в нуль и монотонно на интервале, на котором оно положительно (аналогом этого утверждения при $N = 1$ является лемма 6). Последнее устанавливается путем сравнения решения задачи (5.1), (5.3) при больших μ с решением соответствующей «стационарной» задачи (5.15). Положим $f_\mu(\eta) = \theta(\xi; \mu)/\mu$, $\eta = \mu^m \xi$, $m = [\beta - (\sigma + 1)]/(\sigma + 2)$ ($\mu = \theta(0; \mu) > 0$). Функция f_μ является решением задачи

$$\eta^{1-N} (\eta^{N-1} \mid f_\mu' \mid^\sigma f_\mu')' + \mid f_\mu \mid^{\beta-1} f_\mu = \mu^{1-\beta} (m f_\mu' \eta + f_\mu), \ \eta > 0, \qquad (5.25)$$

$$f_\mu(0) = 0, \quad f_\mu(0) = 1. \qquad (5.26)$$

Уравнение (5.25) можно рассматривать как «возмущенное» стационарное уравнение (5.15), множитель $\mu^{1-\beta}$ при «возмущающем» операторе является малым параметром при $\mu \gg 1$. Из леммы 9 следует, что функция $f_\infty(\eta) = v(\eta; 1)$ при $\beta < \beta_*$ обращается в нуль в некоторой точке, и, следовательно, это же будет справедливо для решений f_μ задачи (5.25), (5.26) при всех достаточно больших $\mu > 0$. Последнее вытекает из непрерывной зависимости решения f_μ (и f_μ) на любом компакте $K = [0, \eta_K]$ от μ в окрестности $\mu = +\infty$. При доказательстве этого утверждения (см. аналогичные по смыслу леммы 5 и 8) используется тот факт, что $f_\infty(\eta)$ ни в одной точке $\eta > 0$ не может обращаться в нуль вместе со своей производной.

Замечание. Для доказательства существования бесконечного множества решений ($\beta < \beta_*$, $N > 1$) необходимо установить справедливость утверждения, аналогичного лемме 7, относящейся к одномерному случаю. Это исследование будет опубликовано в другой работе. Вопрос о существовании решения $\theta \in \{P_i\}$ задачи (5.1), (5.2) при $\beta \geqslant \beta_*$, $N > \sigma + 2$ остается открытым.

6. Теоремы существования решений из семейства Q

Здесь при тех же предположениях ($a_* = [\beta(\sigma - 1) + 1]/\sigma > 0$) доказывается существование положительных решений задачи (5.1), (5.2), принадлежащих семейству Q, т. е. $\theta(0) = 1$ и $\theta(\xi) \equiv 1$ для всех достаточно малых значений $\xi > 0$.

Теорема 5. *Пусть* $\beta > \sigma + 1$, $N = 1$. *Тогда существует бесконечное (счетное) множество положительных решений* $0 = \theta_i(\xi) > 0$ *задачи* (5.1), (5.2) *из семейства* $Q = \{Q_i\}$, *так что* $\theta_i(\xi) \equiv 1$ *при* $\xi \in [0, a_i]$, $a_i > 0$, $\theta_i(\xi) \not\equiv 1$ *в некоторой правой окрестности* $\xi = a_i$. *Каждая функция* $\theta_i(\xi)$ *имеет на* $[a_i, +\infty)$ *ровно* i *точек экстремума.*

Теорема 6. *Пусть* $\beta > \sigma + 1$, $N > 1$. *Тогда существует по крайней мере одно положительное решение задачи* (5.1), (5.2) *из семейства* Q: $0 = \theta_1(\xi)$, $\theta_1(\xi) \equiv 1$ *на* $[0, a_1]$, *монотонно убывающее по* ξ *в* $(a_1, +\infty)$.

Отметим, что в многомерном случае существование $\theta_1 \in Q$ имеет место без дополнительного ограничения на величину параметра β, как в теореме 4.

Так же как в разд. 5, рассмотрим семейство решений $\theta = \theta(\xi; a)$ уравнения (5.1), $\xi > a$, зависящих от параметра $a > 0$ и удовлетворяющих условиям

$$\theta(a; a) = 1, \qquad \theta'_\xi(a; a) = 0. \tag{6.1}$$

Всюду в дальнейшем речь будет идти о функциях $\theta(\xi; a) \not\equiv 1$ в некоторой окрестности $(a, a + \delta)$, $\delta > 0$. Существование при любом $a > 0$ ровно двух таких решений ($\theta(\xi; a) > 1$ и $\theta(\xi; a) < 1$ в $(a, a + \delta)$) устанавливается так же, как при доказательстве теоремы 2 в разд. 2. Необходимо найти такие значения $a = a_i > 0$, чтобы функция $\theta(\xi; a) \geqslant 0$ удовлетворяла второму условию (5.2). Тогда, полагая $\theta(\xi, a) \equiv 1$ при $\xi \in [0, a]$ и учитывая, что $0 > 0$ в R^1_+

(см. лемму 3 в разд. 5), получаем, что $\theta = \theta(\xi; a)$ — искомое решение задачи (5.1), (5.2) типа Q.

Для доказательства теорем в дополнение к результатам разд. 5 нам необходимо установить ряд новых утверждений, аналогичных (в смысле замены параметра μ (в 5.3) на a в (6.1)) леммам 4, 6 и 7. В остальном доказательство принципиальных изменений не претерпевает.

Лемма 10. *Пусть* $\beta > \sigma + 1$, $N \geqslant 1$ и M — *произвольное натуральное число. Тогда существуют такие* $l > 0$ *и* $a = a_M > 0$, *что функция* $\theta(\xi; a_M) > 0$ *на* $(a_M, a_M + l)$ *и имеет на этом интервале не менее* M *точек экстремума.*

Справедливость леммы устанавливается так же, как при доказательстве леммы 4 в разд. 5. Замена $\theta \to 1 + a^{(\sigma+2)/\sigma} z(\xi)$, $\xi \to a\xi$ приводит к следующей задаче для функции z (ср. (2.4)): $z(1) = 0$, $z'(1) = 0$,

$$\xi^{1-N}(\xi^{N-1} \mid z' \mid^{\sigma} z')' - mz'\xi + (\beta - 1) z + G(z; a) = 0, \quad \xi > 1,$$

где G — достаточно гладкая функция, причем $G(z; a) \to 0$ при $a \to 0$. Поэтому данное утверждение вытекает из предложения 1 разд. 2 и непрерывной зависимости z, z' от a в окрестности $a = 0$. Последнее доказывается так же, как лемма 5 в разд. 5.

Следующее утверждение играет роль леммы 6 в доказательстве теоремы 3 (аналогичная по смыслу лемма используется при доказательстве теоремы 4).

Лемма 11. *Пусть* $\beta > \sigma + 1$, $N \geqslant 1$. *Тогда существует такое* $a_1 > 0$, *что при всех* $a \geqslant a_1$ *функция* $\theta(\xi; a) < 1$, $\xi \in (a, a + \delta)$, *обращается в нуль в некоторой точке* $\xi = \xi_a > a$ *и строго монотонна на* (a, ξ_a).

Доказательство. Фиксируем некоторое $a_1 > 0$ и перепишем (5.1) в виде

$$\xi^{1-N}(\xi^{N-1} \mid \theta' \mid^{\sigma}\theta')' - m\theta\xi' = \theta - \theta^{\beta}, \quad \xi > a_1.$$

Воспользуемся теперь оценкой $\theta - \theta^{\beta} \leqslant (\beta - 1)(1 - \theta)$, $\theta > 0$, и положим $z = 1 - \theta$. В результате получим, что $z = z(\xi; a_1)$ ($z > 0$ в $(a_1, a_1 + \delta)$) удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\xi^{1-N}(\xi^{N-1} \mid z' \mid^{\sigma} z')' - mz'\xi + (\beta - 1) z \geqslant 0, \quad \xi > a_1, \tag{6.2}$$

$z(a_1) = z'(a_1) = 0$, причем знак неравенства в (6.2) строгий всюду, где $z \neq 0$. Сравним теперь $z(\xi)$ с соответствующим решением $z_0(\xi) > 0$ в $(a_1, a_1 + \delta)$ линеаризованного уравнения (см. разд. 2)

$$\xi^{1-N}(\xi^{N-1} \mid z_0' \mid^{\sigma} z_0')' - mz_0'\xi + (\beta - 1) z_0 = 0, \quad \xi > a_1, \tag{6.3}$$

$z_0(a_1) = z_0'(a_1) = 0$. Нетрудно проверить, что $z(\xi) > z_0(\xi)$ в некоторой правой окрестности $\xi = a_1$, это вытекает из анализа соответствующего интегрального уравнения типа (2.26). Покажем, что величину $a_1 > 0$ можно выбрать такой, что при любых $a \geqslant a_1$ найдется такая

точка $\xi = \xi_a > a$, что $z(\xi_a; a) \geqslant 1$ (следовательно, $\theta = 1 - z \leqslant 0$ при $\xi = \xi_a$) и $z(\xi; a)$ монотонна на $(0, \xi_a)$.

Фиксируем некоторое $a_1 > 0$ и рассмотрим семейство решений типа Q уравнения (6.3) $z_0(\xi; a) \equiv a^{(\sigma+2)/\sigma} z_0(\xi/a; 1)$, $a > 0$ (см. разд. 2). Оно непрерывно зависит от a на любом компакте. Обозначим через $\xi_1 > 0$ первый корень уравнения $z_0(\xi; 1) = 0$. Тогда, очевидно, что $z_0(\xi; a) > 0$ при $\xi \in (a, a\xi_1)$. Справедливость леммы вытекает из следующей оценки: существует такое $\xi_{a_1} > a_1$, что

$$z(\xi_{a_1}; a_1) > g_*(\xi_{a_1}); g_*(\xi) = \sup_{a \in (\xi/\xi_1, \xi)} a^{(\sigma+2)/\sigma} z_0(\xi/a; 1) > 0, \quad \xi > 0. \tag{6.4}$$

На уровне графической интерпретации непрерывная кривая $z = g_*(\xi)$ в плоскости (z, ξ) является огибающей к семейству кривых $\{z = z_0(\xi; a), \ \xi \in (a, a\xi_1)\}$.

Доказательство (6.4) проведем от противного. Предположим, что это неравенство не выполняется ни при каком $\xi > a_1$. Тогда, уменьшая величину $a < a_1$, всегда можно добиться касания кривых $z = z(\xi; a_1)$ и $z = z_0(\xi; a)$ в некоторой точке $\xi = \xi_* > 0$, где функция $w = z_0 - z$ имеет минимум по ξ, $w(\xi_*) = 0$, $w'(\xi_*) = 0$. Однако это приводит к противоречию, так как из (6.2) и (6.3) тогда следует, что $|z'(\xi_*)|^\sigma w''(\xi_*) < 0$. Очевидно, что $g_*(\xi)$ монотонна и неограниченно возрастает при $\xi \to +\infty$, причем $g_*(0) = 0$. Поэтому искомая величина $a_1 > 0$ находится из равенства $g_*(a_1) = 1$.

Лемма 12. *Пусть* $\beta > \sigma + 1$, $N = 1$. *Тогда существует такое* $a_2 > 0$, *что при всех* $a \geqslant a_2$ *функция* $\theta(\xi; a) > 1$, $\xi \in (a, a + \delta)$ *обращается в нуль в некоторой точке* $\xi = \xi_a > a$ *и имеет на* (a, ξ_a) *ровно одну точку максимума.*

Доказательство. Напомним, что из рассуждений, использовавшихся при доказательстве леммы 6, функция $\theta(\xi; a)$, достигающая в некоторой точке $\xi = \xi_1 > a_2$ положительного экстремального значения $\theta(\xi_1; a) \geqslant [(\beta + 1)/2]^{1/(\beta-1)} = \theta_*$, обращается в нуль при $\xi = \xi_2 > \xi_1$ и монотонно убывает на (ξ_1, ξ_2). Покажем, что указанная ситуация возникает при всех достаточно больших $a > 0$. Воспользуемся для этого оценкой

$$\theta - \theta^\beta > -k_*(\theta - 1), \theta \in (1, \theta_*), \quad k_* = \frac{\theta_*^\beta - \theta_*}{\theta_* - 1} > 0,$$

и, полагая $z = \theta - 1$, вместо (6.2) получим дифференциальное неравенство ($N = 1$)

$$(|z'|^\sigma z')' - mz'\xi + k_* z > 0, \tag{6.5}$$

справедливое для всех $\xi > a_2$, таких, что $z(\xi) \in (0, \theta_* - 1)$. Анализ и сравнение функции z с семейством решений $\{z_0(\xi; a)\}$ соответствующего дифференциального уравнения с оператором (6.5) производится так же, как при доказательстве леммы 11 с использованием оценки типа (6.4) (отметим, что при этом факт наличия осцилляций $z_0(\xi; a)$ значения не имеет). В результате устанавливается, что при

любых $a \geqslant a_2$, где $g_* (a_2) = \theta_* - 1$, $z(\xi; a)$, монотонно возрастая достигает значений $z \geqslant \theta_* - 1$, и, следовательно, $0 \geqslant \theta_*$, что завершает доказательство.

Доказательство теорем 5 и 6 в основном повторяет доказательство двух предыдущих. При $N = 1$ рассматриваются множества:

$W_i = \{a > 0 \mid$ существует такое $l > 0$, что функция $\theta(\xi; a) > 0$ на $(a, a + l)$ $(\theta(\xi; a) < 1$ на $(a, a + \delta))$ и имеет на $(a, a + l)$ не менее i точек минимума$\}$;

$U_i = \{a > 0 \mid$ существует такое $l > 0$, что функция $\theta(\xi; a) > 0$ на $(a, a + l)$ $(0(\xi; a) > 1$ на $(a, a + \delta))$ и имеет на $(a, a + l)$ не менее i точек минимума$\}$, $i = 1, 2, \ldots$

Леммы 11 и 12 обеспечивают существование $a_{2i-1} = \sup W_i < +\infty$, $a_{2i} = \sup U_i < +\infty$, и, так же как в разд. 5, устанавливается, что $\theta(\xi; a_i)$ являются искомыми решениями типа Q_i и имеют на $[a_i, +\infty)$ ровно i точек экстремума. Последнее вытекает из леммы 7 и непрерывной зависимости $\theta(\xi; a)$ от a на любом компакте. Без утверждения типа леммы 7 в многомерном случае $N > 1$ тем же способом удается доказать существование одного самого простого решения типа Q_1.

Замечание. Что касается решений задачи (5.1), (5.2) типа R и S, то подходов к доказательству их существования пока найти не удалось.

В заключение отметим, что в последних двух разделах проведено лишь некоторое предварительное исследование задачи (5.1), (5.2). В дальнейшем для детального описания свойств неограниченных решений задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения (1.1), в частности свойства локализации при $\beta \geqslant \sigma + 1$, а также характера асимптотики вблизи «сингулярной» точки $(u(T_0, x) = +\infty)$, необходимы весьма конкретные оценки решений $\theta = \theta(\xi)$, удовлетворяющих (5.1), (5.2). Это исследование, так же как более подробный анализ многомерной эллиптической задачи, будет отражено в последующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. I.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 12, с. 2123—2140.
2. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.— В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. [М.: Наука, 1982, с. 217—243.
3. *Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объёмными источниками тепла.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 321—324.
4. *Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В.* и др. Горение нелинейной среды в виде сложных структур.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330—1333.
5. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П.* Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 106. М., 1977. 80 с.

6. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1983, т. 23, № 2, с. 380—390.
7. *Самарский А. А.* О новых методах исследования асимптотических свойств параболических уравнений.— Тр. МИАН СССР, 1981, т. 158, с. 153—162.
8. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t = \nabla (u^\sigma \nabla u) + u^\beta$.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 6, с. 1362.
9. *Галактионов В. А.* О несуществовании и существовании глобальных решений краевых задач для квазилинейных параболических уравнений.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1982, т. 22, № 6, с. 1369—1385.
10. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А.* Архитектура многомерных тепловых структур.— Докл. АН СССР, 1984, т. 274, № 5, с. 1072—1075.
11. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Локализация тепла в нелинейных средах.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826—1841.
12. *Шабат А. Б.* О задаче Коши для уравнения Гинзбурга—Ландау.— В кн.: Сб. тр. Ин-та гидродинамики СО АН СССР. Новосибирск, 1969, с. 180.
13. *Захаров В. Е., Сынах В. С.* О характере особенности при самофокусировке.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1975, т. 68, вып. 3, с. 940—947.
14. *Дегтярев Л. М., Крылов В. В.* Об асимптотике решения задачи самофокусировки света в кубичной среде.— Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 1.
15. *Дегтярев Л. М., Крылов В. В.* Гидродинамическое описание самофокусировки пучков света в кубичной среде.— В кн.: Изучение гидродинамической неустойчивости численными методами. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1980, с. 106—161.
16. *Власов С. Н., Пискунова Л. В., Таланов В. И.* Структура поля вблизи особенности, возникающей при самофокусировке в кубичной среде.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1978, т. 75, вып. 5, с. 1602—1609.
17. *Glassey R. T.* On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrodinger equations.— J. Math. Phys., 1977, vol. 18, p. 1794—1797.
18. *Wood D.* The self-focusing singularity in the nonlinear Schrodinger equation.— Stud. Appl. Math., 1984, vol. 71, p. 103—115.
19. *Alikakos N. D., Evans L. C.* Continuity of the gradient for weak solutions of a degenerate parabolic equation.— J. math. pures et appl., 1983, vol. 62, p. 253—268.
20. *Галактионов В. А.* Об условиях несуществования в целом и локализации решений задачи Коши для одного класса нелинейных параболических уравнений.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1983, т. 23, № 6.
21. *Галактионов В. А.* Доказательство локализации неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta$.— Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 1, с. 15—23.
22. *Похожаев С. И.* О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$.— Докл. АН СССР, 1965, т. 165, № 1, с. 36—39.
23. *Похожаев С. И.* О собственных функциях квазилинейных эллиптических задач.— Мат. сб., 1970, т. 82, № 2, с. 192—212.
24. *Berger M. S.* Nonlinearity and functional analysis. N. Y.; L.: Acad. press, 1977. 414 p.
25. *Berger M. S.* Nonlinear problems with exactly three solutions.— Ind. Univ. Math. J., 1979, vol. 28, p. 689—698.
26. *Похожаев С. И.* Об одном подходе к нелинейным уравнениям.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 6, с. 1327—1331.
27. *Lions P.-L.* On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations.— SIAM Rev., 1982, vol. 24, p. 441—467.
28. *Berestycki H., Lions P.-L.* Nonlinear scalar field equations.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1983, vol. 82, p. 313—375.
29. *Bahri A., Berestycki H.* A perturbation methods in critical point theory and applications.— Trans. Amer. Math. Soc., 1981, vol. 267, p. 1—32.

30. *Strauss W. A.* Existence of solitary waves in higher dimensions.— Commun. Math. Phys., 1977, vol. 55, p. 149–162.
31. *Brezis H., Nirenberg L.* Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.— Commun. Pure and Appl. Math., 1983, vol. 36, p. 437—477.
32. *Gidas B., Spruck J.* Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations.— Commun. Pure and Appl. Math., 1981, vol. 34, p. 525—598.
33. *Nehary Z.* On a nonlinear differential equation arizing in nuclear physics.— Proc. Roy. Irish Acad. A, 1963, vol. 62, p. 117—135.
34. *Berestycki H., Lions P.-L., Peletier L. A.* On ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in R^N.— Ind. Univ. Math. J., 1981, vol. 30, p. 141—157.
35. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* Об одной «линеаризованной» нелинейной эллиптической задаче, возникающей в теории режимов с обострением: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 10. М., 1985. 25 с.
36. *Адъютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П.* Автомодельные тепловые структуры с сокращающейся полушириной.— Дифферен. уравнения, 1983, т. 19, № 7, с. 1107—1114.
37. *Ryder G. H.* Boundary value problems for a class of nonlinear differential equations.— Pacif. J. Math., 1967, vol. 22, p. 477—503.
38. *Kamin S., Peletier L. A.* Large time behavior of solutions of the heat equation with absorption: Prepr. N 25 Math. Inst. Univ. Leiden, 1983. 21 p.
39. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об асимптотических «собственных функциях» задачи Коши для одного нелинейного параболического уравнения.— Мат. сб., 1985, т. 126, № 4, с. 435—472.
40. *Белоносов В. С., Вишневский М. П.* Некоторые вопросы качественной теории краевых задач для нелинейных параболических систем.— В кн.: Математические проблемы химии. Ч. I. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975, с. 132—138.
41. *Berryman J. G., Holland C. J.* Stability of the separable solution for fast diffusion.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1980, vol. 74, p. 379—388.
42. *Ni W.-M., Sacks P. E., Tavantzis J.* On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear parabolic equations.— J. Different. Equat., 1984, vol. 54, p. 97—120.
43. *Галактионов В. А.* Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^{\sigma+1}$.— Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 7, с. 1126—1134.
44. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об асимптотической устойчивости инвариантных решений нелинейных уравнений теплопроводности с источником.— Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 4.
45. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* О приближенных автомодельных решениях одного класса квазилинейных уравнений теплопроводности с источником.— Мат. сб., 1984, т. 124, № 2, с. 163—188.
46. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.
47. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.
48. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
49. *Hocking L. M., Stewartson K., Stuart J. T.* A nonlinear instability burst in plane parallel flow.— J. Fluid Mech., 1972, vol. 51, p. 705—735.
50. *Loewner C., Nirenberg L.* Partial differential equations invariant under conformal and projective transformations.— In: Contributions to analysis. N. Y.: Acad. press, 1974, p. 245—272.
51. *Haraux A., Weissler F. B.* Non-uniqueness for a semilinear initial value problem.— Ind. Univ. Math. J., 1982, vol. 31, p. 167—189.
52. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
53. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. II.— Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 9, с. 1544—1559.

УДК 531.43 .4°:532.516

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ, СМАЗКИ И ИЗНОСА

М. А. Галахов, П. П. Усов

Введение

Наука о трении, смазке и износе изучает процессы, происходящие в контакте двух тел, движущихся одно относительно другого. Подвижные контакты (кинематические пары) являются структурными элементами всей современной техники — энергетических, транспортных, технологических машин, средств автоматики и управления, приборов и космических аппаратов. Как показала практика, долговечность и надежность машин в основном определяются выходом из строя подвижных соединений, меняющих свои характеристики под воздействием сил трения. С трением связаны громадные энергетические потери в машинах (потери на трение только в машинах промышленности нашей страны исчисляются в миллиардах киловатт-часов энергии; в одной лишь текстильной промышленности эти потери достигают 85% от всей потребляемой энергии и только 15% ее идет на полезную работу). Расходы на ремонт машин составляют более 15 млрд. руб. в год. Во многих отраслях промышленности каждый пятый рабочий — ремонтник. Все это определяет большую экономическую значимость проблемы применения современных методов теории трения, смазки и износа к расчету и проектированию узлов трения.

Физико-механические явления в контакте деформируемых тел отличаются большим разнообразием и сложностью. Для их исследования используются данные и методы различных смежных наук. Сюда относятся механика сплошных сред, теория колебаний, электродинамика сплошных сред, химия, физика твердого тела, физика поверхностных явлений и тонких пленок, металловедение, физика разрушения, теплофизика, аналитическая и вычислительная математика. Развитие современных физических методов исследований поверхностей твердых тел, таких, как спектроскопия, радиоспектроскопия, рентгеноструктурный анализ, электронография, электронная микроскопия, позволяет проводить детальные исследования изменений, происходящих в поверхностных слоях трущихся тел. К настоящему времени по проблемам трения, смазки и износа накоплен огромный экспериментальный материал. Его осмысление и получение количественных зависимостей общего характера до сих пор представляют собой сложную задачу. Полуэмпирическая наука о трении, смазке и износе формировалась в работах Амонтона, Л. Эйлера, Ш. О. Кулона, О. Рейнольдса, Ф. Боудена, Д. Тейбора, Б. В. Дерягина,

И. В. Крагельского и других исследователей. Создание этой науки на уровне математических моделей затруднено неясностью многих физических и химических процессов, недостаточностью сведений о значениях параметров, характеризующих поверхностные слои тел, огромным количеством влияющих факторов, сложностью моделирования и аналитического и численного решения уже поставленных граничных задач.

В данной статье излагаются некоторые достаточно развитые математические модели теории трения, смазки и износа и результаты их решения. В основном представлены теория смазки и элементы математической теории износа с приложениями к расчету узлов трения. Авторы ограничились теми областями, в которых применение математического моделирования уже возможно и дает полезные для практики результаты. Статья не претендует на обзорный характер.

Трение принято подразделять на внешнее и внутреннее. Под внешним трением понимается сопротивление, возникающее в области контакта твердых тел при их относительном перемещении в плоскости касания. По кинематическим признакам внешнее трение подразделяют на: 1) *трение скольжения*, при котором одна и та же номинальная поверхность одного тела поступательно перемещается по поверхности другого тела; 2) *трение верчения*, при котором точки поверхности трения одного тела описывают в плоскости касания двух тел концентрические окружности вокруг центра, лежащего на оси вращения; 3) *трение качения*.

По признакам состояния поверхностей трущихся тел и наличия смазочных материалов различают следующие виды трения скольжения:

1) *трение идеально чистых* (*ювенильных*) *поверхностей*, с которым приходится сталкиваться в высокотемпературной, вакуумной и космической технике;

2) *реодинамическое трение* — трущиеся поверхности разделены слоем среды, движение которой в зазоре определяется ее объемными реологическими соотношениями; такой вид трения с использованием жидких, газообразных и порошковых смазочных материалов реализуется в разнообразных подшипниках скольжения и качения;

3) *граничное трение*, при котором твердые поверхности разделены весьма тонкими (0,1 мкм и менее) адсорбированными слоями любой природы и происхождения; физические свойства этих слоев определяются влиянием твердых фаз, граничное трение имеет место в большинстве узлов трения и во многих технологических процессах обработки материалов;

4) *сухое трение*, возникающее при отсутствии смазочного материала и загрязнений между контактирующими поверхностями; при сухом трении поверхности покрыты сравнительно толстыми пленками окислов (более 0,1 мкм);

5) *полусухое трение* — смешанное трение, одновременно граничное и сухое;

6) *полуреодинамическое трение*, при таком виде трения трущиеся поверхности в некоторых областях разделены слоем смазочного ма-

териала, движение которого определяется его объемными свойствами, а в остальных областях осуществляется граничное трение.

Поверхность тел (деталей) никогда не бывает абсолютно гладкой, а всегда имеет микроскопические неровности, образующие шероховатость. Эти неровности оказывают существенное влияние на эксплуатационные свойства деталей, в том числе и на трение, смазку и износ. Вследствие физических особенностей способов образования поверхностей их шероховатость является нерегулярной. Именно нерегулярность шероховатости вызывает необходимость применять для ее описания и анализа теоретико-вероятностные методы. Анализ способов получения поверхностей показывает [1],что в общем случае их шероховатость можно моделировать детерминированной периодической основой и налагающейся на нее случайной компонентой. В зависимости от соотношения технологических факторов, влияющих на образование детерминированной и случайной составляющих, в шероховатости может превалировать та или иная составляющая. Анализ причин образования неровностей позволяет предложить следующую классификацию шероховатых поверхностей [1]: 1) детерминированная периодическая со случайной фазой; 2) детерминированная основа с наложенной на нее случайной компонентой (композиционная шероховатость) и 3) случайная, причем последняя может быть изотропной и анизотропной.

Существующие способы описания шероховатых поверхностей основываются на использовании параметров, которые определяются по профилограммам — профилю поверхности, снятому в нескольких направлениях. По ГОСТу 2789—73 шероховатость поверхности должна характеризоваться следующими параметрами: а) *высотой неровностей профиля* — средним арифметическим отклонением профиля R_a, высотой R_z неровности профиля, определенной по 10 точкам, наибольшей высотой неровности $R_{\max}$; б) *шагом неровностей* — средним шагом неровностей профиля по вершинам s, средним шагом неровностей по средней линии s_m; в) *опорной длиной профиля* — относительной опорной длиной профиля t_p на заданном уровне сечения.

В последнее время интенсивно развиваются методы более полного описания шероховатости поверхности с помощью корреляционных функций, получающихся в результате обработки профилограмм [1—5]. После некоторых видов обработки поверхностей (виброабразивная, ультразвуковая обработка, доводка свободным абразивом, шабрение и др.) их шероховатость можно моделировать гауссовым случайным изотропным в широком смысле полем. После таких видов обработки поверхностей, как хонингование, суперфиниширование, протягивание, прокатка, их шероховатость можно моделировать гауссовым случайным анизотропным полем. После протягивания, прокатки и некоторых других видов обработки шероховатость имеет случайный характер, но меняется только по одному направлению (имеет вид борозд). Такую шероховатость будем называть одномерной.

Физические процессы, протекающие в контакте твердых упругих тел, в значительной мере определяются видом трения. В связи с этим и математические модели в теории трения, смазки и износа разнооб-

разны и во многом отличаются одна от другой для различных видов трения. Рассмотрим некоторые наиболее обоснованные и экспериментально проверенные математические модели реодинамического трения и износа, сформулированные к настоящему времени.

1. Смазка гладких поверхностей при реодинамическом трении

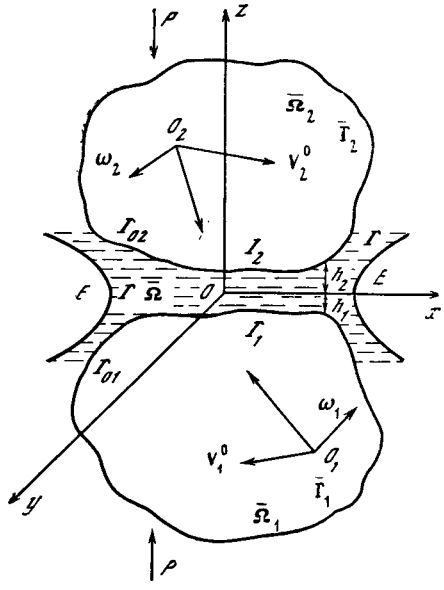
Если толщина смазочного слоя значительно превышает высоту микронеровностей поверхностей, то при расчете характеристик контакта шероховатостью можно пренебречь и считать поверхности гладкими.

1.1. Контактно-гидродинамическая теория смазки ньютоновскими жидкостями. Основные уравнения

Контактно-гидродинамическая теория смазки имеет дело с жидкими смазочными материалами. Для постановки задач контактной гидродинамики необходимо записать уравнения течения жидкости, уравнения теории упругости и теплопроводности для упругих тел, граничные и начальные условия, параметры жидкости как функции термодинамических параметров. В эти уравнения следует внести ряд изменений и упрощений, связанных с геометрией упругогидродинамического (УГД) контакта и экстремальными условиями в нем. Уравнения теории упругости и теплопроводности в рассматриваемой задаче представляют собой хорошо известные объекты. Остановимся на уравнениях течения жидкости. В подшипниках скольжения, как правило, применимы уравнения гидродинамики. При внешнем контакте упругих тел (зубчатые передачи, подшипники качения, пара кулачок—толкатель) обычные уравнения гидродинамики не всегда применимы, так как большие давления ($\sim 10^9$ Н/м^2), скорости сдвига ($\sim 10^6$—10^7 с$^{-1}$) и малые времена процессов ($\sim 10^{-6}$—10^{-3} с) приводят к зависимости вязкости от скорости сдвига и запаздыванию установления равновесных характеристик. Наиболее приемлемы для контактной гидродинамики в этом случае нелинейные уравнения упруговязкой максвелловской жидкости, основанные на теории конечных деформаций, развитой в работах Л. И. Седова.

Рассмотрим неподвижную систему координат O_{xyz} и два упругих тела $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ (рис. 1), вращающихся вокруг точек O_j с угловыми скоростями ω_j. Точки O_j с координатами X_j, Y_j, Z_j движутся со скоростями $\dot{X}_j$, $\dot{Y}_j$, $\dot{Z}_j$. Тела прижаты одно к другому нагрузкой P, а некоторая область $\overline{\Omega}$, граничащая с $\overline{\Omega_j}$ и с окружающей средой E, заполнена жидкостью. Область, в которой давление в жидкости существенно превосходит атмосферное, будем называть областью высокого давления. Границы $\overline{\Omega}$ с $\overline{\Omega_j}$ и E обозначим $\overline{\Gamma}_j$ и Γ, пересечения $\overline{\Gamma}_j$ и $\overline{\Omega}$ с областью высокого давления — Γ_j, Ω, $\Gamma_{0j} = \overline{\Gamma}_j \setminus \Gamma_j$.

В $\overline{\Omega}$ надо записать уравнения неразрывности, движения, энергии и определяющие соотношения для жидкости, приняв для нее модель,



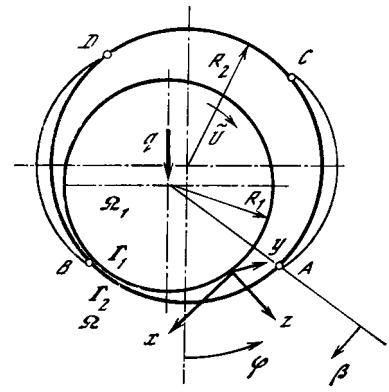


Рис. 2. Схема гидродинамического подшипника скольжения

←

Рис. 1. Схема контакта упругих тел

соответствующую условиям в УГД-контакте. В Ω_j выполняются уравнения линейной теории упругости и теплопроводности. На Γ_j ставятся условия непрерывности скорости, температуры, теплового потока и напряжений. На Γ_{0j} необходимы условия охлаждения (например, конвективный теплообмен с окружающим пространством E через тонкую пленку жидкости) и условия для напряжений или перемещений, соответствующие конкретному силовому взаимодействию Ω_j с другими телами. Граница Г обычно не задана и должна определяться из условий непротекания и непрерывности напряжений. Рассмотрим случай малых деформаций (малых времен релаксации), при которых допустимы обычные уравнения пьютоновской несжимаемой жидкости.

Предположим, что размер h области Ω в направлении z много меньше размеров Ω по x и y, а эти размеры, в свою очередь, много меньше характерного радиуса R кривизны поверхностей Γ_j. Вследствие этих асимптотических свойств Ω в Ω выполняются предположения классической гидродинамической теории смазки. Уравнения движения жидкости имеют вид

$$\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x(x, y, z, t)}{\partial z}, \quad \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} = \frac{\partial \tau_y(x, y, z, t)}{\partial z}, \tag{1.1}$$

где τ_x, τ_y — zx-я и zy-я компоненты тензора напряжений; p — давление.

Уравнение неразрывности записывается обычным образом:

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial z} = 0, \tag{1.2}$$

где u, v, w — составляющие вектора скорости жидкости $\mathbf{V}(x, y, z, t)$.

В уравнении энергии главным источником тепловыделения будем считать вязкую сдвиговую диссипацию. Это справедливо при чистом скольжении и при умеренных скоростях качения ($u \leqslant 10$ м/с), для которых тепловыделением от сжатия можно пренебречь. При тех же скоростях качения и достаточно малых толщинах h смазочной пленки ($\lesssim 10^{-1}$—1 мкм) тепловой поток направлен в основном из жидкости в Ω_j. В этом случае уравнение энергии имеет вид

$$k\partial^2 T/\partial z^2 = -\tau_x \partial u/\partial z - \tau_y \partial v/\partial z, \tag{1.3}$$

где T — температура, а теплопроводность k жидкости считается постоянной, поскольку ее изменение во всем диапазоне давлений и температур имеет порядок 10% и во много раз меньше изменения вязкости. Если неизвестные функции не зависят от y, то размер Ω по y может быть сколь угодно велик.

Уравнения (1.1), (1.3) справедливы и в том случае, когда размеры Ω по x и y одного порядка с радиусом кривизны R (например, цилиндр в цилиндре с малым зазором, см. рис. 2). В этом случае, однако, вместо системы координат O_{xyz} следует ввести локальную систему координат, связанную с одной из поверхностей Γ_j. Ось z этой системы направлена по местной нормали к Γ_j, оси x и y лежат в касательной плоскости. При рассмотрении внутреннего контакта цилиндрических тел рис. 2 систему координат O_{xyz} будем выбирать так, чтобы поверхность $z = 0$ совпала с поверхностью вала.

В гидродинамических подшипниках скольжения толщина смазочного слоя обычно достаточно велика ($\gtrsim 1$ мкм). В этом случае в уравнении энергии следует учитывать конвективный перенос тепла по направлению скольжения (направление оси x на рис. 2), а также по толщине смазочного слоя. Таким образом, для подшипника скольжения уравнение энергии необходимо записывать так

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c w \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \tau_x \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_y \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{1.4}$$

где ρ и c — плотность и теплоемкость смазочного материала, которые, как и коэффициент теплопроводности k, следует считать постоянными.

Зависимость между касательным напряжением и скоростью сдвига для ньютоновских жидкостей имеет вид

$$\partial u/\partial z = \tau_x/\mu\,(p, T), \quad \partial v/\partial z = \tau_y/\mu\,(p, T), \tag{1.5}$$

где μ — вязкость, зависящая от температуры и давления. На основании измерений вязкости смазочных материалов, проведенных методом падающего шарика на ротационно-вибрационном вискозиметре и другими методами, можно предложить различные аппроксимационные формулы. Одна из наиболее близких к экспериментальным данным формул имеет вид

$$\mu(p, t) = \mu_0 \exp\left[\frac{\alpha p}{1+\beta' p} - \left(\delta + \frac{\varkappa' p}{1+\beta' p}\right)(T - T_0)\right]. \tag{1.6}$$

Здесь μ_0, α, β', δ, $\varkappa'$, T_0 — постоянные; T_0 — некоторая фиксированная температура; $\mu_0 = \mu(0, T_0)$; α — пьезокоэффициент вязкости; $\varkappa'$ характеризует убывание пьезокоэффициента с ростом температуры.

Пусть уравнения $\overline{\Gamma}_j$ в системе координат O_{xyz} имеют в окрестности точки O вид $z = (-1)^j h_j(x, y, t)$. Для жестких тел $h_j(x, y, t) = f_j(x, y, t) + C_j(t)$, где $f_j(x, y, t)$ — форма поверхности тела в момент времени t; $C_j(t)$ — расстояние от точки O до точки пересечения оси Oz с поверхностью $\overline{\Gamma}_j$. Для упругих тел

$$h_j(x, y, t) = C_j(t) + f_j(x, y, t) + v^j(x, y, t), \tag{1.7}$$

где $v^j(x, y, t)$ — упругое перемещение (по z) точек $\overline{\Gamma}_j$ под действием давления p и касательных напряжений τ_x, τ_y, действующих на $\overline{\Gamma}_j$. Для получения замкнутой системы уравнений необходимо v^j выразить через p, τ_x и τ_y.

Рассмотрим сначала внешний контакт бесконечно длинных (по оси y) цилиндров. Пусть проекции Γ_j на ось x близки к некоторому отрезку $[a, c]$. Вследствие неравенства $(c - a) \ll R$ (R — радиус какого-либо цилиндра) при вычислении v^j естественно заменить цилиндр на полупространство. В этом случае (см. [6]) при каждом t

$$\frac{dv^j}{dx} = \frac{2}{\pi E_j'} \int_a^c \frac{p(\xi)\, d\xi}{\xi - x} - \frac{1 - 2\nu_j}{1 - \nu_j} \frac{\tau_j(x)}{E_j'}, \tag{1.8}$$

где $E_j' = E_j/(1 - \nu_j^2)$; E_j — модуль упругости; ν_j — коэффициент Пуассона материала цилиндра; τ_j — касательная распределенная нагрузка, действующая на границу полупространства. Существенно, что (1.8) представляет собой результат решения первой граничной задачи для полупространства в статике. Предполагаем, что скорости всех процессов и, в частности, скорость качения много меньше скорости распространения упругих волн в телах и в соответствии с этим пренебрегаем динамическими эффектами.

Интегрируя (1.8) и подставляя результат в (1.7), получаем

$$h_j(x, t) = h_j(c, t) + f_j(x, t) - f_j(c, t) + \\ + \frac{2}{\pi E_j'} \int_a^c p(\xi, t) \ln \frac{c - \xi}{|\xi - x|}\, d\xi - \frac{1 - 2\nu_j}{1 - \nu_j} \frac{1}{E_j'} \int_a^x \tau_j(\xi, t)\, d\xi,$$

где a и c, вообще говоря, зависят от t.

Анализ показывает [7], что τ_j слабо влияет на h_j. Для круговых цилиндров

$$h(x, t) = h_1(x, t) + h_2(x, t) = h_0(t) + \frac{x^2 - c^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \\ + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'}\right) \int_a^c p(\xi) \ln \frac{c - \xi}{|x - \xi|}\, d\xi, \tag{1.9}$$

где $h_0(t) = h(c, t)$.

При внутреннем контакте бесконечно длинных цилиндрических тел близких радиусов размер области контакта соизмерим с их радиусами. Если внешнее тело моделировать упругим пространством с цилиндрическим вырезом, то, как показано в [8], толщина смазочного слоя и распределение контактного давления связаны уравнением

$$\left(\frac{\varkappa_1-1}{4G_1}-\frac{\varkappa_2-1}{4G_2}\right)p(\varphi)-\left(\frac{\varkappa_1+1}{8\pi G_1}+\frac{\varkappa_2+1}{8\pi G_2}\right)\int_{-\varphi_1}^{\varphi_2}p'_\vartheta\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\vartheta}{2}\,d\vartheta+$$

$$+\frac{\varkappa_2+1}{8\pi G_2}\int_{-\varphi_1}^{\varphi_2}p(\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{2\pi R_1}\left(\frac{1}{G_1}+\frac{\varkappa_2}{G_2}\right)q\cos\varphi+\frac{\Delta}{R_1}=$$

$$=\frac{1}{R_1}\left(h+\frac{d^2h}{d\varphi^2}\right), \tag{1.10}$$

где φ — угловая координата, отсчитываемая от линии действия нагрузки (рис. 2); φ_2 и φ_1 — углы, определяющие начало и конец области контакта; $\varkappa$ — постоянная Мусхелишвили ($\varkappa = 3 - 4\nu$ для плоского деформированного состояния); q — нагрузка на единицу длины; Δ — радиальный зазор, $\Delta = R_2 - R_1$; G_1, G_2 — модули сдвига; индекс 1 относит величины к цилиндру, а 2 — к пространству с вырезом. В уравнении (1.10) не учтены тепловые деформации тел, что допустимо при средних скоростях скольжения.

Если в отсутствие нагрузки контакт тел осуществляется в одной точке, а размеры площадки контакта, образованной при приложении нагрузки, значительно меньше радиусов кривизны тел, то при расчете v^j тела можно заменить на полупространства. Используя решение задачи теории упругости для полупространства, получаем [7]

$$h=h_0+\frac{x^2}{2R_x}+\frac{y^2}{2R_y}+\iint_\omega p(\xi,\eta)\,[K(\xi,\eta,x,y)-$$

$$-K(\xi,\eta,0,0)]\,d\xi\,d\eta. \tag{1.11}$$

Здесь область ω предполагается близкой к проекциям Γ_j на плоскость Oxy; R_x, R_y — приведенные радиусы кривизны недеформированных поверхностей в плоскостях zx и zy; h_0 — толщина смазочного слоя при $x = y = 0$; $K(\xi, \eta, x, y)$ — ядро уравнения, зависящее от материалов контактирующих тел. В случае, когда рассматриваются однородные изотропные упругие тела,

$$K(\xi,\eta,x,y)=\frac{2}{\pi E'}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{-1}, \tag{1.12}$$

где E' — приведенный модуль упругости.

К выписанной системе уравнений необходимо присоединить граничные условия. Из условия прилипания смазывающей жидкости к поверхностям следует [7]

$$u[x,y,(-1)^jh_j(x,y,t),t]=u_j(x,y,t),$$
$$v[x,y,(-1)^jh_j(x,y,t),t]=v_j(x,y,t), \tag{1.13}$$
$$w[x,y,(-1)^jh_j(x,y,t),t]=w_j+(-1)^j\left[u_j\frac{\partial h_j}{\partial x}+v_j\frac{\partial h_j}{\partial y}\right],$$

где u_j, v_j, w_j — скорости точек Γ_j. При записи (1.13) не учтено влияние касательных упругих перемещений точек Γ_j на скорость жидкости. Функция $p(x, y, t)$ принимается равной нулю на входной части границы $\partial\omega$ области ω (т. е. там, где поток жидкости направлен внутрь области). На выходной части $\partial_-\omega$ границы принимаются условия равенства нулю давления и нормальной составляющей градиента давления [7]. В одномерном случае, т. е. при контакте бесконечно длинных цилиндров, это условие имеет вид

$$p(a) = p(c) = 0, \quad dp(c)/dx = 0. \tag{1.14}$$

Смазочная пленка в контакте является источником тепла, который прогревает поверхность. Температура поверхности влияет на тепловыделение в жидкости, поэтому в общем случае необходимо решать совместно уравнения течения жидкости и уравнения теплопроводности в телах, требуя непрерывности температуры и теплового потока на границах Γ_j. При внешнем контакте цилиндров можно ограничиться полем температур в окрестности контакта и заменить контактирующие тела на полупространства аналогично тому, как это было сделано при нахождении упругих деформаций. В этом случае при $\mathrm{Pe}_j = u_j(c-a)\rho_j c_j/k_j \gg 1$ (ρ_j, c_j, k_j — плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала j-го тела) можно получить [7]

$$T[x, (-1)^j h_j] = T_{0j} + (-1)^{j+1} k (\pi c_j \rho_j k_j u_j)^{-1/2} \times$$
$$\times \int_a^x \frac{\partial T}{\partial z}[\xi, (-1)^j h_j] \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}},$$

где T_{0j} — температура на входе в контакт, $T_{0j} = T[a, (-1)^j h_j]$. При выводе этой формулы предполагается, что тепло рассеивается на бесконечности, причем температура на бесконечности равна температуре на входе и равна T_{0j}. При упрощенной постановке температуру поверхностей тел при внешнем контакте можно считать заданной и граничные условия записывать в виде

$$T[(-1)^j h_j] = T_j, \tag{1.15}$$

где T_j могут быть постоянными, а могут меняться с изменением x.

Для подшипника скольжения (внутренний контакт цилиндров) граничные условия зависят от его конструкции. Рассмотрим для определенности конструкцию подшипника с частичным углом охвата, используемого в качестве опоры валка прокатного стана. Жидкость попадает в рабочий зазор подшипника (область AB на рис. 2 при обходе по часовой стрелке) из гидродинамического кармана (область CA), в который она подается под небольшим давлением через ряд отверстий. Предполагается, что область положительных давлений в смазочном слое начинается на входной кромке вкладыша (точке A) и заканчивается либо на выходной кромке вкладыша (точка B), либо до выходной кромки вкладыша. В соответствии с этим

$$p(-\varphi_1) = dp(-\varphi_1)/d\varphi = p(\varphi_2) = 0, \tag{1.16}$$

если смазочный слой обрывается до выходной кромки вкладыша, и

$$p(-\varphi_1) = p(\varphi_2) = 0, \tag{1.17}$$

если слой обрывается на выходной кромке. При использовании условия $dp(-\varphi_1)/d\varphi = 0$ (или $dp(c)/dx = 0$) координата φ_1 (или c) неизвестна и должна находиться из решения задачи.

Граничные условия для температуры при внутреннем контакте цилиндрических тел ставятся так. Вследствие вращения цилиндра температура его поверхности меняется мало, поэтому ее можно принять постоянной. Кроме того, температуру масла на входе в рабочий зазор можно принять равной средней температуре поверхности вала. В результате получаем

$$T(\varphi, y, 0) = T(\varphi_2, y, z) = T_c, \tag{1.18}$$

где T_c — средняя температура поверхности вала. Для определения T_c можно использовать уравнение теплового баланса подшипника. Анализ показывает, что в опорах валков прокатных станов не следует учитывать влияние теплоотдачи из смазочного слоя во вкладыш на температуру масла в рабочей зоне. В соответствии с этим имеем

$$\partial T(\varphi, y, h)/\partial z = 0, \tag{1.19}$$

где h — толщина смазочного слоя.

Давление в УГД-контакте должно уравновешивать внешнюю нагрузку

$$\iint\limits_{\omega} p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = P. \tag{1.20}$$

Для бесконечно длинных цилиндров естественно ввести нагрузку q на единицу длины цилиндра по y. При внешнем контакте цилиндрических тел

$$\int\limits_{a}^{c} p(x, t)\, dx = q, \tag{1.21}$$

при внутреннем

$$R_1 \int\limits_0^L dz \int\limits_{-\varphi_1}^{\varphi_2} p(\varphi, z, t)\cos\varphi\, d\varphi = P \quad \text{или} \quad R_1 \int\limits_{-\varphi_1}^{\varphi_2} p(\varphi, t)\cos\varphi\, d\varphi = q, \tag{1.22}$$

где L — длина подшипника; P — полная нагрузка на подшипник. Первое выражение (1.22) относится к подшипнику конечной длины, а второе — к подшипнику бесконечной длины.

Приведенные уравнения совместно с граничными условиями позволяют определить все неизвестные величины: границу области высокого давления, функции h, p, T, если заданы размеры тел, упругие постоянные их материалов, сорт масла и относительное движение тел.

Подставляя (1.1) в (1.5) и интегрируя полученные уравнения при условиях (1.13), получаем распределение компонент u и v скорости смазочной жидкости по толщине смазочного слоя:

$$(u, v) \equiv \mathbf{V}(x, y, z, t) = \left[F_3(x, y, z, t) - \frac{F_3(x, y, h_2, t)}{F_0(x, y, h_2, t)} F_0(x, y, z, t) \right] \operatorname{grad} p + \\ + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \frac{F_0(x, y, z, t)}{F_0(x, y, h_2, t)} + \mathbf{V}_1, \tag{1.23}$$

где

$$F_0(x, y, z, t) = \int_0^{h_1+z} \frac{d\xi}{\mu(x, y, -h_1 + \xi, t)};$$

$$F_3(x, y, z, t) = \int_0^{h_1+z} \frac{\xi\, d\xi}{\mu(x, y, -h_1 + \xi, t)};$$

$\mathbf{V}_1 = (u_1, v_1)$; $\mathbf{V}_2 = (u_2, v_2)$ — скорости поверхностей.

Интегрируя (1.2) по z от $-h_1$ до h_2 и используя (1.23), приходим к уравнению для $p(x, y, t)$, которое называется обобщенным уравнением Рейнольдса [9]

$$\operatorname{div} \left[F_2(x, y, h_2, t) \operatorname{grad} p + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \frac{F_3(x, y, h_2, t)}{F_0(x, y, h_2, t)} - \mathbf{V}_2 h \right] = \frac{\partial h}{\partial t}, \tag{1.24}$$

где

$$F_2(x, y, z, t) = \int_0^{h_1+z} \frac{\xi}{\mu(x, y, -h_1 + \xi, t)} \left[\xi - \frac{F_3(x, y, h_2)}{F_0(x, y, h_2)} \right] d\xi.$$

В изотермическом случае из (1.24) получаем [10]

$$\operatorname{div} [(h^3/12\mu) \operatorname{grad} p - \mathbf{U}h] = \partial h/\partial t, \tag{1.25}$$

где

$$\mathbf{U} = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)/2.$$

Для бесконечно длинных цилиндров уравнение (1.25) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}\right) = 12\mu \left(U \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}\right), \tag{1.26}$$

где

$$U = (U_{1,x} + U_{2,x})/2.$$

Таким образом, при неучете тепловых явлений задача теории смазки ньютоновскими жидкостями заключается в решении уравнений (1.6), где $T = T_0$, одного из уравнений (1.9) — (1.11) и (1.26) (или (1.25)) при сформулированных выше условиях. При учете тепловых эффектов необходимо решать уравнения (1.3) или (1.4), (1.6), одно из уравнений (1.9)—(1.11), (1.23), (1.24) и уравнение

$$w = -\int_{-h_1}^{z} \operatorname{div} \mathbf{V}(x, y, \xi, t)\, d\xi + \dot{Z}_1 - \mathbf{V}_1 \operatorname{grad} h_1, \tag{1.27}$$

которое следует из (1.2). В (1.27) $\mathbf{V}$ (x, y, z, t) определяется выражением (1.23).

1.2. Одномерные контактно-гидродинамические задачи теории смазки ньютоновскими жидкостями

Рассмотрим внешний контакт цилиндров в стационарном изотермическом случае. Постановка и приближенные методы решения этой задачи впервые были предложены в работах [11—13]. В дальнейшем эта задача неоднократно решалась численными методами [14—16]. В [17—19] развит асимптотический подход. Отметим, что для подшипников скольжения входная граница смазочного слоя совпадает с входной кромкой вкладыша. Для внешнего контакта значение параметра a зависит от условий подачи жидкости в контакт. При обильной смазке можно положить $a = -\infty$, что соответствует обращению давления в нуль на расстоянии от точки $x = 0$, много большем характерной гидродинамической величины $\sqrt{2Rh_0}$. Как для жестких, так и для упругих цилиндров изменение a от $-\infty$ приблизительно до $-3\sqrt{2Rh_0}$ почти не отражается на решении задачи. Поэтому $a \ll -1$, так же как и $a = -\infty$, можно считать соответствующим режиму обильной смазки. Режим недостаточной смазки для бесконечно длинных цилиндров, по-видимому, достаточно хорошо моделируется заданием a, такого, что $-3\sqrt{2Rh_0} \lesssim a < 0$, или заданием расхода жидкости с последующим определением a.

Относя линейные размеры к герцевой полуширине контакта b, p к максимальному герцеву давлению p_0, h к толщине пленки h_0 при $x = c$, систему (1.6), (1.9) и (1.26) при $T = T_0$ в стационарном случае можно привести к виду

$$d\Pi/dx = (V/H_0^2)\,(\bar{h} - 1)/\bar{h}^3, \tag{1.28}$$

$$H_0(\bar{h} - 1) = \bar{x}^2 - \bar{c}^2 + \frac{2}{\pi}\int_{\bar{a}}^{\bar{c}} \ln\frac{\bar{c} - t}{|t - \bar{x}|}\,\bar{p}(t)\,dt, \tag{1.29}$$

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{c}} \bar{p}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}, \tag{1.30}$$

$$\bar{p}(\bar{a}) = \bar{p}(\bar{c}) = d\bar{p}(\bar{c})/d\bar{x} = 0, \tag{1.31}$$

где

$$V = 3\pi^2\overline{U}W^{-2}; \qquad \overline{U} = \mu_0 U/(E'R); \qquad W = q/(E'R);$$

$$H_0 = 2Rh_0/b^2; \qquad R = R_1R_2/(R_1 + R_2); \qquad U = (U_1 + U_2)/2;$$

$$\Pi = \{1 - \exp[-Q\bar{p}(x)]\}/Q; \qquad Q = \alpha p_0 \ (\beta = 0).$$

В конце 40-х годов А. И. Грубин на основании результатов А. М. Эртеля предложил метод, позволяющий определить $H_0(V, Q)$,

не решая систему (1.28)—(1.31) [12]. Суть метода Эртеля—Грубина заключается в следующем. При $Q \gg 1$, $\bar{p} \gg Q^{-1}$ и $d\bar{p}/d\bar{x} \sim 1$ левая часть (1.28) экспоненциально мала, т. е. почти для всей области высокого давления $\bar{h}(x) \approx 1$ с большой точностью. При $\bar{h} = 1$ уравнения (1.29), (1.30) имеют решение $\bar{p} = \sqrt{1 - \bar{x}^2}$ при $|\bar{x}| \leqslant 1$, $\bar{p} = 0$ при $\bar{x} \geqslant 1$ и $\bar{x} \leqslant -1$, $\bar{c} = 1$. При $|\bar{x}| > 1$ $\bar{h}$ вычисляется из (1.29) и дается формулой

$$\bar{h} = 1 + H_0^{-1} [\, |\bar{x}| \sqrt{\bar{x}^2 - 1} - \ln(|\bar{x}| + \sqrt{\bar{x}^2 - 1})], \quad (1.32)$$

что соответствует форме зазора вне сухого упругого контакта. Теперь уравнение (1.28) можно (подставив $\bar{h}$ из (1.32)) проинтегрировать от $-\infty$ до -1 с граничными условиями $\Pi(-\infty) = 0$, $\Pi(-1) = Q^{-1}$. Это приводит к уравнению

$$(VQ)^{-1} = \int_{-\infty}^{1} J(x) [H_0 + J(x)]^{-3} dx, \quad (1.33)$$

где

$$J(x) = |x| \sqrt{x^2 - 1} - \ln(|x| + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Правая часть (1.33) определяется численным интегрированием. Результат аппроксимирован степенной функцией и имеет вид

$$H_0 = 0{,}254\ (VQ)^{0{,}73}. \quad (1.34)$$

В размерных переменных

$$h_0/R = 1{,}65\ (\mu_0 \alpha U/R)^{0{,}73} (p_0/E')^{-0{,}18}. \quad (1.35)$$

Асимптотический анализ, проведенный в [20], показал, что при тех же допущениях и при $Q \gg 1$, $VQ \ll 1$ $H_0 \approx 0{,}272\ (VQ)^{3/4}$. Отличие этой формулы от (1.34) мало́. При ограниченной смазке зависимость $H_0(\bar{a}, V, Q)$ получена в виде [19]

$$H_0(\bar{a}, V, Q)/H_0(-\infty, V, Q) = [1 - (1 + 0{,}84\,\psi^{0{,}96})^{-2{,}1}]^{0{,}87}, \quad (1.36)$$

где $\psi = |\bar{a} + 1|/H_0(-\infty, V, Q)$.

Система уравнений (1.28), (1.29) при условиях (1.30), (1.31) решалась численно на ЭВМ [7,21]. Результаты показали, что зависимость H_0 от V и Q имеет выраженный степенной характер. Среднеквадратичная аппроксимация результатов численного решения линеаризованной системы в диапазоне $5 \leqslant Q \leqslant 20$, $0{,}005 \leqslant V \leqslant 0{,}2$ при $\bar{a} = -2$ позволяет получить формулу

$$H_0 = 0{,}53\ V^{0{,}6} Q^{0{,}3}. \quad (1.37)$$

Сопоставление формул (1.34) и (1.37) показывает, что они хорошо согласуются друг с другом при больших Q и малых V (сопоставление производится при $5 \leqslant Q \leqslant 20$, $0{,}005 \leqslant V \leqslant 0{,}2$). При $Q = 5$ формула (1.34) дает почти в два раза меньшее H_0, чем (1.37), что связано с невыполнением условия $Q \gg 1$, при котором была получена формула (1.34). При $Q = 20$ и $V = 0{,}2$ значение H_0 по (1.34) на 40%

больше, чем H_0 по (1.37), это связано, по-видимому, с тем, что чем больше V, тем функции $p\ (x)$ и $h\ (x)$ сильнее отличаются от принятых при выводе формулы (1.34) и при больших V (1.37) дает большую погрешность. Результаты расчетов на ЭВМ показывают, что при больших Q распределение давления имеет два максимума, причем один из них довольно острый.

Наряду со средней толщиной пленки, мало отличающейся от h_0, для приложений важно определить и минимальную толщину пленки. На основании результатов численного решения в указанном диапазоне V и Q получена формула для $H_m = (h_m/h_0)\ H_0$:

$$H_m = 0{,}31 V^{0{,}66} Q^{0{,}52},$$

а также формула для момента сопротивления качению M и касательной силы F, действующей на цилиндр:

$$\frac{F}{E'R} = 3{,}01\,\frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}\left(\frac{\mu_0 U}{E'R}\right)^{0{,}54}(\alpha E')^{-0{,}54}\left(\frac{p_0}{E'}\right)^{0{,}3}, \tag{1.38}$$

$$\frac{M}{E'R^2} = 6{,}02\left(\frac{\mu_0 U}{E'R}\right)^{0{,}54}(\alpha E')^{-0{,}54}\left(\frac{p_0}{E'}\right)^{0{,}3}. \tag{1.39}$$

Сопоставление формул (1.38) и (1.39) с экспериментальными данными показывает, что расчет соответствует эксперименту до скорости качения ~ 5 м/с.

К стационарным изотермическим задачам примыкают задачи с заданным полем температур. Простейшая из них возникает, если температуры поверхностей различны, а тепловыделение пренебрежимо мало. Разность температур поверхностей, например, в роликовых подшипниках может быть порядка 10°. В этом случае, как видно из (1.3), температура меняется линейно поперек смазочной пленки. Данная задача сводится к системе

$$dp/dx = 12\mu' \bar{U}(h - h_0)/h^3,$$

где $\mu' = \mu\,[p,\ (T_1 + T_2)/2]$,

$$\bar{U} = \frac{1}{6}\,\frac{k^3 \operatorname{sh} k}{\operatorname{sh}^2 k - k^2}\left[U_1 + U_2 + (U_2 - U_1)\left(\frac{1}{k} - \operatorname{cth} k\right)\right],$$

$$k = [\delta + \varkappa' p/(1 + \beta' p)]\ (T_2 - T_1)/2,$$

и к уравнению контактных деформаций. К этой системе применимы приближенный метод решения уравнений (1.28)—(1.30), а для определения h_0 при $Q \gg 1$, $VQ \ll 1$ можно использовать формулу $H_0 \approx \approx 0{,}272\ (VQ)^{-3/4}$, которая в размерных переменных имеет вид

$$h_0/R = 1{,}75\ (\mu_0' \alpha \bar{U}/R)^{3/4}\ (p_0/E')^{-1/4},\ \mu_0' = \mu\,[0,\ (T_1 + T_2)/2]. \tag{1.40}$$

Отсюда видно, что при неподвижной горячей поверхности h_0 больше, чем при неподвижной холодной.

При высоких скоростях качения и скольжения необходимо учитывать тепловые явления в контакте. В работе [22] для чистого качения цилиндров уравнения (1.1), (1.2), (1.3), (1.5), (1.6) при $\beta' = \varkappa' = 0$

совместно с условиями (1.14) и (1.15) при $T_1 = T_2 = \text{const}$ сведены к одному уравнению

$$dp/dx = 12\mu_0 \exp(\alpha p)\, U\, [(h - h_0/h^3]\, \Phi(F),$$

где $F = (\delta\mu_0/k) \exp(\alpha p)\, U^2 (h - h_0)^2/h^2$; $\Phi(x)$ — функция, задаваемая графиком. Методом Эртеля—Грубина в [22] выведена формула

$$h_0/R = 1{,}65\ (\mu_0\alpha U/R)^{0{,}73}\ (p_0/E')^{-0{,}18}\ (1 + 0{,}18\ L^{0{,}66})^{-1},$$

где $L = \mu_0\delta U^2/k$. Эта же задача, но при наличии скольжения тел решена аналогичным методом в [23], где получена формула

$$h_0/R = 1{,}65\,(\mu_0\alpha U/R)^{0{,}73}\ (p_0/E')^{-0{,}18}\,[1 + 0{,}18\,(\mu_0\delta U^2/k)^{0{,}66} + \\ + 0{,}45\ (\mu_0\delta U_c^2/k)^{0{,}63}]^{-1} \qquad (1.41)$$

(U_c — скорость скольжения, $U_c = U_1 - U_2$). Из (1.41) следует, что при внешнем контакте цилиндров изотермическим решением можно пользоваться при выполнении условий $\mu_0\delta U^2/k \ll 1$ и $\mu_0\delta U_c^2/k \ll 1$. Область применимости формулы (1.41) ограничена условиями $Q \gg 1$, $VQ \ll 1$. В работе [7] изложен метод численного решения уравнений неизотермической контактно-гидродинамической задачи для внешнего контакта бесконечно длинных цилиндров, смазываемых ньютоновской жидкостью, при использовании условия (1.15). Результаты расчетов показывают, что при учете температурного поля второй максимум давления уменьшается. Отметим также, что эта задача в работе [7] сведена к следующей системе уравнений (записана в безразмерном виде):

$$\frac{\partial^2\bar{\sigma}}{\partial\bar{y}^2} = -4H\Phi^2 Q_0^{-2} \exp(L\bar{p} + \bar{\sigma}) \left\{1 + \left[\frac{Q_0 - Q_1\Phi}{\Phi Q_0} - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{Q_0^* - Q_1^*\Phi}{\bar{h}\Phi Q_0^*}\right] \frac{(\bar{y} - Q_1 Q_0^{-1})}{\left[\frac{Q_2}{Q_0} - \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^2\right]}\right\}^2, \qquad (1.42)$$

$$\bar{\sigma}(\pm 1) = \pm S, \qquad (1.43)$$

$$Q_j = Q_j(x) = \int_{-1}^{1} \bar{y}^j \exp\sigma(\bar{x}, \bar{y})\, d\bar{y}, \qquad (1.44)$$

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{2\exp(Lp)}{3\bar{h}^3} \frac{Q_0}{Q_0Q_2 - Q_1^2} \left[\bar{h}\left(1 - \frac{\Phi Q_1}{Q_0}\right) - \left(1 - \frac{\Phi Q_1^*}{Q_0^*}\right)\right], \qquad (1.45)$$

$$\bar{p}(\bar{a}) = \bar{p}(\bar{c}) = 0,$$

$$\bar{h}(\bar{x}) = 1 + \bar{x}^2 - \bar{c}^2 + D\int_{\bar{a}}^{\bar{c}} \bar{p}(\xi) \ln\frac{\bar{c} - \xi}{|\xi - \bar{x}|}\, d\xi. \qquad (1.46)$$

Звездочкой обозначены величины, вычисленные в точке $\bar{x} = \bar{c}$, $S = \delta(T_2 - T_1)/2$, $\Phi = (U_2 - U_1)/(U_1 + U_2)$, $L = 6\mu_0\alpha\,(U_1 + U_2)\sqrt{2h_0R}/h_0^2$, $D = 48\,\mu_0\,(U_1 + U_2)\cdot R/\pi E' h_0^2$, x, a, c отнесены к $\sqrt{2h_0R}$, h к h_0, p к $6\mu_0\,(u_1 + u_2)\sqrt{2h_0R}/h_0^2$, $\mu_0 = \mu\,[0, (T_1 + T_2)/2]$,

$R = R_1 \cdot R_2/(R_1 + R_2)$, $\bar{\sigma} = \delta\,[T(x, y) - (T_1 + T_2)/2]$. Интеграл от давления вычисляется после решения (1.42)—(1.46), однако h_0 приходится определять отдельно, так как h_0 входит в L, D и в указанный интеграл.

Перейдем к внутреннему контакту цилиндрических тел (подшипник скольжения). Контактно-гидродинамические задачи для подшипника бесконечной длины рассматривались в работах [24—26]. Для масел, используемых в опорах валков прокатных станов, зависимость вязкости от температуры и давления обычно аппроксимируют формулой

$$\mu = \mu_0 (T_0/T)^m \exp\{[\alpha - \varkappa'(T - T_0)]\, p\}, \tag{1.47}$$

где μ_0 — вязкость масла при фиксированной температуре T_0 и атмосферном давлении; m — температурный коэффициент; $\varkappa'$ характеризует уменьшение фактического пьезокоэффициента с ростом температуры. Стационарная задача сводится к следующей системе уравнений [24], записанной в безразмерном виде:

$$\frac{d}{d\beta}\left[\bar{h}^3 F_2(\beta, 1)\frac{d\bar{p}}{d\beta}\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\left[\bar{h}\frac{F_3(\beta, 1)}{F_0(\beta, 1)}\right], \tag{1.48}$$

$$\bar{h}^2 V_\beta \frac{\partial \bar{T}}{\partial \beta} + \bar{h} V_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} + \Lambda \bar{\mu}\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial \bar{z}}\right)^2, \tag{1.49}$$

$$\lambda_\vartheta \int_0^{\beta_\Gamma} \bar{p}'(\xi)\operatorname{ctg}\frac{\beta - \xi}{2}\,d\xi - 2\pi\gamma_1\lambda_\vartheta \bar{p}(\beta) - \lambda_\vartheta\gamma_3 \int_0^{\beta_\Gamma} \bar{p}(\beta)\,d\beta -$$

$$- 4\lambda_\vartheta\gamma_2\zeta\cos(\beta - \vartheta) + \bar{h} + \frac{d^2\bar{h}}{d\beta^2} = 1, \tag{1.50}$$

$$\bar{\mu} = (\bar{T}_0/\bar{T})^m \exp\{[G - G'(\bar{T} - \bar{T}_0)]\,\bar{p}\}. \tag{1.51}$$

Здесь β — угловая координата, отсчитываемая от входной кромки вкладыша по часовой стрелке (рис. 2); $\bar{z}$ — координата, направленная поперек смазочного слоя ($\bar{z} = 0$ соответствует валу);

$$F_0(\beta, \bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \frac{d\xi}{\bar{\mu}(\beta, \xi)}, \qquad F_3(\beta, \bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \frac{\xi\,d\xi}{\bar{\mu}(\beta, \xi)},$$

$$F_2(\beta, \bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \frac{\xi}{\bar{\mu}(\beta, \xi)}\left[\xi - \frac{F_3(\beta, 1)}{F_0(\beta, 1)}\right] d\xi,$$

$$V_\beta = 1 - \frac{F_0(\beta, \bar{z})}{F_0(\beta, 1)} + 2h^2\frac{dp}{d\beta}\left[F_3(\beta, \bar{z}) - \frac{F_3(\beta, 1)}{F_0(\beta, 1)}F_0(\beta, \bar{z})\right],$$

$$V_z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\bar{h}\int_0^{\bar{z}} V_\beta(\beta, \xi)\,d\xi\right] + \bar{z}V_\beta\frac{d\bar{h}}{d\beta};$$

$$\mathrm{Pe} = \Psi^2\rho\bar{U}cR_1/\lambda, \quad \Psi = \Lambda/R_1, \quad \Lambda = \mu_c\bar{U}/(\Psi^2 R_1\rho c T_c),$$

T_c — температура масла на входе в рабочий зазор, μ_c — вязкость масла при температуре T_c, $\bar{U}$ — скорость скольжения; $\lambda_\vartheta = \mu_c \bar{U} \gamma_4 / (4\pi R_1 \Psi^3 G_1 G_2)$, $\gamma_4 = G_2(\varkappa_1 + 1) + G_1(\varkappa_2 + 1)$, $\gamma_1 = [(\varkappa_1 - 1) G_2 - (\varkappa_2 - 1) G_1]/\gamma_4$, $\gamma_2 = (G_2 + \varkappa_2 G_1)/\gamma_4$, $\gamma_3 = G_1(\varkappa_2 + 1)/\gamma_4$, $\zeta = q\Psi^2/(2\mu_c \bar{U})$, $G = 2\mu_c \bar{U} \alpha / (\Psi^2 R_1)$, $G' = 2\mu_c \bar{U} \varkappa T_c / (\Psi^2 R_1)$; β_Γ — координата места обрыва смазочного слоя, $\bar{h} = h/\Delta$, $\bar{p} = \Psi^2 R_1 p / (2\mu_c \bar{U})$, $\bar{T} = T/T_c$, $\bar{\mu} = \mu/\mu_c$, $\bar{T}_0 = T_0/T_c$, ϑ — половина угла охвата подшипника.

Систему уравнений (1.48)—(1.51) надо решать при условиях (1.16) или (1.17), (1.18), (1.19) и (1.22), которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\bar{p}(0) = \bar{p}(\beta_\Gamma) = d\bar{p}(\beta_\Gamma)/d\beta = 0, \tag{1.52}$$

или

$$\bar{p}(0) = \bar{p}(\beta_\Gamma) = 0, \tag{1.53}$$

$$\bar{T}(0, \bar{z}) = \bar{T}(\beta, 0) = 1, \quad \partial \bar{T}(\beta, 1)/\partial \bar{z} = 0, \tag{1.54}$$

$$\int_0^{\beta_\Gamma} \bar{p}(\beta) \cos(\beta - \vartheta) d\beta = \zeta. \tag{1.55}$$

В изотермическом случае уравнение (1.48) упрощается:

$$\frac{d}{d\beta}\left(\bar{h}^3 \frac{d\bar{p}}{d\beta}\right) = 3\frac{d\bar{h}}{d\beta}. \tag{1.56}$$

Система уравнений (1.56), (1.50) и (1.55) при условиях (1.52) (или (1.53)) решалась численно в работе [24]. Расчеты производились для угла охвата подшипника 120° и показали, что коэффициент нагруженности ζ, как функция λ_ϑ, имеет ярко выраженный максимум, положение которого зависит от минимальной толщины смазочного слоя. Для примера на рис. 3 показана зависимость ζ от λ_ϑ при различных значениях $\bar{h}_{\min}$, полученная для одинаковых материалов контактирующих тел. Параметр λ_ϑ характеризует деформируемость поверхностей трения: чем больше λ_ϑ, тем больше деформация. Из рис. 3 видно, что при малых значениях λ_ϑ рост деформируемости тел приводит к увеличению несущей способности смазочного слоя, а при больших λ_ϑ — к уменьшению, что связано с уменьшением «клиновидности» зазора. Анализ численного решения показал, что при угле охвата подшипника 120° и заданном значении минимальной толщины смазочного слоя $\bar{h}_{\min}$ выполняется соотношение $\lim\limits_{\lambda_\vartheta \to \infty} (\zeta \lambda_\vartheta) = 0{,}597\,(1 - \bar{h}_{\min})$.

Переходя в этом соотношении к размерным переменным, получаем, что при угле охвата подшипника 120° и одинаковых материалах вала и вкладыша максимальное среднее удельное давление (среднее удельное давление $p_{cp} = P/(2LR_1)$, где P — нагрузка на подшипник, L — длина подшипника), которое может обеспечить подшипник скольжения в гидродинамическом режиме, равно $p_{cp,\max} = 0{,}468 \times \Psi E/(1 - \nu^2)$. В опорах валков прокатных станов Ψ уменьшается с ростом размеров подшипника до $2 \cdot 10^{-4}$ в крупногабаритных подшипниках.

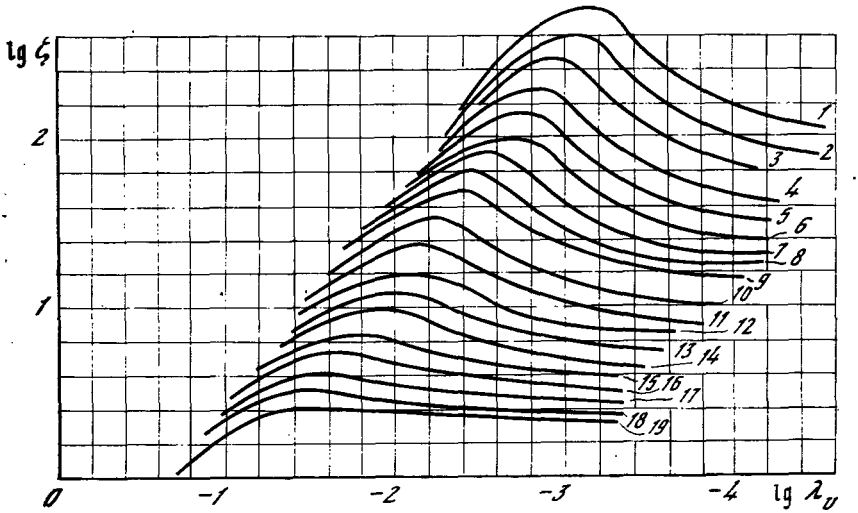


Рис. 3. Зависимость коэффициента нагруженности ζ от λ_v

h_{min} равно: *1* — 0,01; *2* — 0,015; *3* — 0,02; *4* — 0,03; *5* — 0,04; *6* — 0.05; *7* — 0,06; *8* — 0,07; *9* — 0,08; *10* — 0,10; *11* — 0,12; *12* — 0,14; *13* — 0,17; *14* — 0,20; *15* — 0,23; *16* — 0,26; *17* — 0,30; *18* — 0,34; *19* — 0,38

При таком значении Ψ для подшипника из стали $p_{cp\ max}$ сравнительно невелико ($\approx$ 20,6 МПа). Такое низкое $p_{cp,\max}$ является следствием больших деформаций массивного подшипника. Отметим, что в классической гидродинамической теории смазки, которая не учитывает деформации деталей подшипника, $\lim\limits_{h_{min}\to 0} p_{cp.\max} = \infty$. В подшипниках небольших размеров, как правило, действительное значение среднего удельного давления значительно меньше $p_{cp,\max}$. В таких подшипниках деформации поверхностей меняют форму зазора, значения λ_θ малы и ζ растет с ростом λ_θ. Это означает, что в подшипниках скольжения небольших размеров подшипники с меньшим модулем упругости несут бо́льшую нагрузку при одной и той же минимальной толщине смазочного слоя.

В работе [25] изложен метод численного решения системы уравнений (1.48) — (1.51) при условиях (1.52) — (1.55). Учет тепловых эффектов не меняет характера зависимости $\zeta(\lambda_\theta)$, однако из-за разогрева смазочного материала толщина смазочного слоя уменьшается.

1.3. Двумерные УГД-задачи теории смазки ньютоновскими жидкостями

Если размеры области Ω по x и y имеют одинаковый порядок величины, как, например, в шариковом подшипнике, то необходимо учитывать течение жидкости в направлениях x и y. При точечном контакте тел и отсутствии тепловых эффектов задача заключается в решении

уравнений (1.6) с $T - T_0$, (1.11) (K может принимать вид (1.12)) и (1.25). Для качения тел в x-направлении в работах [19, 27] при допущениях, аналогичных допущениям А. И. Грубина для контакта бесконечно длинных цилиндров, получены следующие выражения для толщины смазочного слоя:

а) при обильной смазке в изотермическом случае

$$h_0/R_x = 1{,}75\ K_0^{1/2}\ (\mu_0 \alpha U_k/R_x)^{1/4}\ (p_0/E)^{-1/4} \qquad (1.57)$$

(R_x — приведенный радиус кривизны поверхностей в x-направлении, p_0 — максимальное герцево давление, $K_0 = 4\ R_x p_0/(b_0 E)$, b_0 — длина полуоси контактного эллипса, лежащей на оси x);

б) при недостаточной смазке в изотермическом случае

$$h_0/h_{0\infty} = \{1 - [1 + 0{,}84\ (K_0^{2/3}\ \Psi_0)^{0{,}96}]^{-2{,}1}\}^{0{,}67}$$

($h_{0\infty}$ — толщина пленки при обильной смазке — определяется по формуле (1.57), $\Psi_0 = \varepsilon\ (2R_x h_{0\infty}/b_0^2)^{-2/3}$, $\varepsilon = |a| - b_0$, a — координата входной точки в сечении $y = 0$);

в) при обильной смазке в неизотермическом случае

$$h_0/R_x = (1{,}82 - 0{,}68 R_x/R_y)(\mu_0 \alpha U_k/R_x)^{3/4} (p_0/E)^{-1/4} [1 + 0{,}254\ (\mu_0 \delta U_k^2/K)^{0{,}62}]^{-1}.$$

Для расчета высокоскоростных и тяжелонагруженных гидродинамических подшипников конечной длины необходимо решать уравнения (1.4), (1.23), (1.24), (1.27), (1,51) и уравнение, связывающее толщину смазочного слоя и распределение гидродинамического давления, которое в явном виде получить не удается. В работах [28, 29] данная задача решается при ряде упрощающих допущений, которые, однако, не обосновываются. Предполагается, что в каждом сечении $z = z_0$ функции $h\ (\beta, z_0)$ и $p\ (\beta, z_0)$ с точностью до коэффициента, зависящего от z_0, связаны тем же соотношением, что и в случае подшипника бесконечной длины, т. е. соотношением (1.10). Результаты расчетов на ЭВМ удовлетворительно согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Нестационарность смазочного слоя может быть обусловлена либо вибрациями узла трения, либо изменением во времени внешней нагрузки (как, например, в подшипниках скольжения двигателя внутреннего сгорания), либо обоими указанными факторами.

При рассмотрении нестационарных задач уравнения УГД-теории смазки необходимо дополнять уравнениями движения деталей узла трения. Вопросы динамики системы тел, разделенных смазочными слоями, составляют самостоятельную область науки о трении, смазке и износе.

1.4. Теория смазки поверхностей трения ньютоновскими жидкостями

В контактной гидродинамике для описания жидкости при больших давлениях и скоростях сдвига применяются уравнения нелинейной

максвелловской среды [7]

$$kd^2T/dz^2 = -(\tau^2/\mu)\ [1 - (\tau/G)^2]^{-1}, \tag{1.58}$$

$$dU/dz = (\tau/\mu)\ [1 - (\tau/G)^2]^{-1}, \tag{1.59}$$

где $\tau = \sigma_{xz}$ — касательное напряжение; G — предельное касательное напряжение. Из (1.6), (1.58) и (1.59) в [7] получено следующее уравнение относительно τ:

$$\frac{\tau}{1-(\tau/G)^2} = \mu_0(p)\exp[-\delta^*(T'-T_0)]\frac{U_2-U_1}{h}\frac{\operatorname{arsh}\Lambda}{\Lambda\sqrt{1+\Lambda^2}}. \tag{1.60}$$

Здесь

$$\delta^* = \delta + \varkappa' p/(1+\beta' p);\quad T' = (T_1+T_2)/2;$$

$$\Lambda = \{\Lambda_0^2[1-(\tau/G)^2] + \operatorname{sh}^2[\delta^*(T_2-T_1)/4]\}^{1/2};$$

$$\Lambda_0 = (\mu'\delta^*/8k)^{1/2}\,|U_2-U_1|;\quad \mu' = \mu_0(p)\exp[-\delta^*(T'-T_0)].$$

После определения τ из уравнения (1.60) максимальная температура $T_{\max}$ и тепловые потоки q_j в поверхности тел находят по формулам [7]

$$T_{\max} = \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{1}{\delta^*}\ln\left\{\operatorname{ch}\frac{\delta^*(T_2-T_1)}{2} + \Lambda_0'^2 + \frac{1}{4\Lambda_0'^2}\operatorname{sh}^2\frac{\delta^*(T_2-T_1)}{2}\right\}, \tag{1.61}$$

$$q_j = \frac{\tau(U_2-U_1)}{2}\left[1 \pm \frac{1}{2\Lambda_0'^2}\operatorname{sh}\frac{\delta^*(T_2-T_1)}{2}\right], \tag{1.62}$$

где $\Lambda_0' = \Lambda_0\sqrt{1-(\tau/G)^2}$. При $T_2 > T_1$ знак плюс в (1.62) берется при $j = 1$.

Неньютоновское поведение смазочных материалов имеет различную физическую природу и объясняется не только вязкоупругими явлениями. Построение адекватных моделей смазочных материалов представляет собой сложную проблему.

1.5. Теория газовой смазки

Широкое применение в узлах гироскопов, станков, медицинской технике находят подшипники скольжения с газовой смазкой. В таких подшипниках упругие деформации поверхностей малы, и их можно не учитывать. Уравнения течения газа в узком зазоре подшипника сводятся к одному уравнению относительно давления [30]

$$\operatorname{div}[(h^3/12\mu)\,p^{1/\varkappa}\operatorname{grad}p] = \operatorname{div}(p^{1/\varkappa}h\mathbf{V}) + \partial(p^{1/\varkappa}h)/\partial t, \tag{1.63}$$

где $\varkappa$ — показатель политропы, который изменяется от 1 до 5/3. Случай $\varkappa = 1$ соответствует изотермическому процессу. Вязкость μ меняется слабо, поэтому в уравнении (1.63) можно принимать $\mu = \text{const}$.

Если ∂G — граница смазочного слоя с окружающим воздухом и процесс является установившимся, то

$$p|_{\partial G} = p_{\text{атм}},$$

где $p_{\text{атм}}$ — атмосферное давление.

В работе [30] приведены некоторые частные аналитические решения уравнения (1.63) в стационарном случае. Для стационарного случая разработаны также алгоритмы численного решения уравнения (1.63) [31]. При нестационарном режиме работы подшипника уравнение (1.63) решается совместно с уравнениями движения ротора.

2. Смазка шероховатых поверхностей при реодинамическом трении

2.1. Гидродинамическая смазка шероховатых поверхностей

Вопросу о влиянии шероховатости на гидродинамическую смазку поверхностей в последние годы уделяется большое внимание [32—37]. К настоящему времени наибольшее признание получил вероятностный подход к решению задачи, при котором толщина смазочного слоя в подшипнике задается случайной функцией. Рассмотрим (см. [36, 37]) течение тонкого слоя жидкости, разделяющего две движущиеся шероховатые поверхности S_1 и S_2 (рис. 4), которые зададим случайными функциями. Системы криволинейных координат $O_1\xi'\eta'\zeta'$ и $O_2\xi''\eta''\zeta''$ жестко связаны с телами I и II. Уравнения поверхностей S_1 и S_2 запишем в виде

$$\zeta' = \zeta_0' + \varepsilon_1^*(\xi', \eta', \omega_1), \quad \zeta'' = \zeta_0'' + \varepsilon_2^*(\xi'', \eta'', \omega_2),$$

где ε_1^* и ε_2^* — однородные в широком смысле случайные функции, имеющие нулевые средние значения; $\zeta_0' = E[\zeta']$; $\zeta_0'' = E[\zeta'']$; $E[\cdot]$ — математическое ожидание; ω_1, ω_2 — элементарные события из некоторых пространств Ω_1 и Ω_2. Каждой паре ω_1 и ω_2 соответствуют вполне определенные функции $\varepsilon_1^*(\xi', \eta')$, $\varepsilon_2^*(\xi'', \eta'')$ — реализации полей $\varepsilon_1^*(\xi', \eta', \omega_1)$, $\varepsilon_2^*(\xi'', \eta'', \omega_2)$. Поверхности $\zeta' = \zeta_0'$ и $\zeta'' = \zeta_0''$ обозначим S_1^0 и S_2^0, а область, занимаемую смазочным слоем, — Ω. Проведем в Ω поверхность S, лежащую на равных расстояниях от S_1^0 и S_2^0, и введем систему ортогональных криволинейных координат $Oxyz$ так, чтобы поверхность $z = 0$ совпала с S.

Пусть $h_0(x, y, t)$ — зазор между поверхностями S_1^0 и S_2^0, а $h(x, y, t)$ — зазор между поверхностями S_1 и S_2. По условию, $h_0 > 0$. Функция h может принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем если $h < 0$, то при контактном взаимодействии тел поверхности деформируются и с учетом деформаций $h \geqslant 0$. Если среднеквадратические отклонения σ_1 и σ_2 функций ε_1^* и ε_2^* малы по сравнению с h_0, то реализации, для которых $h \leqslant 0$ в сколь-нибудь значительной области, маловероятны и их вклад в средние величины мал. Пусть $(\sigma_1/h_0)^2 \leqslant 1$, $(\sigma_2/h_0)^2 \leqslant 1$ и любые реализации

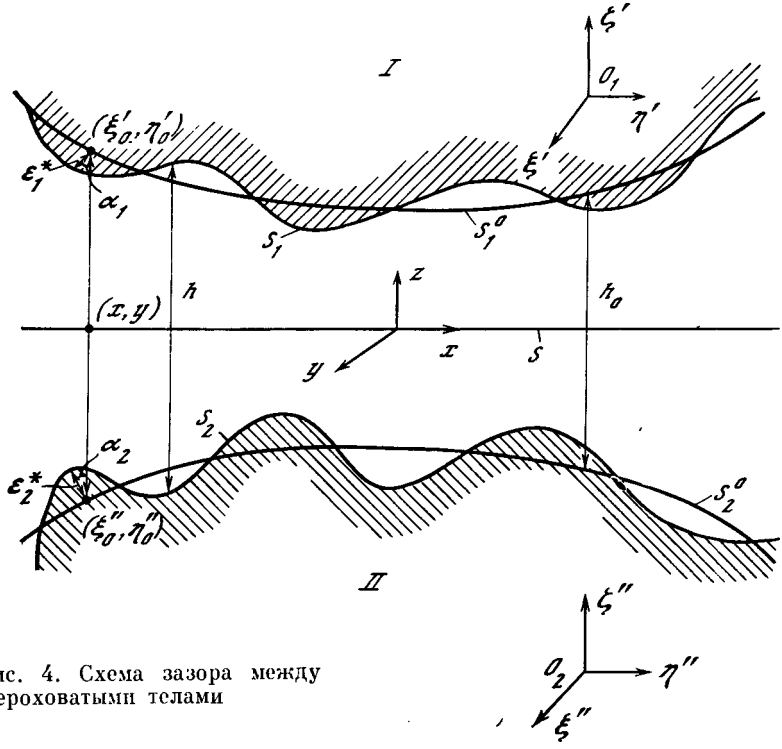


Рис. 4. Схема зазора между шероховатыми телами

$\varepsilon_1^*(\xi', \eta')$ и $\varepsilon_2^*(\xi'', \eta'')$ жестких поверхностей S_1 и S_2 разделены положительным зазором в односвязной области ω на поверхности Oxy. Будем также считать, что $h_0 \leqslant \lambda_i$ (λ_i — шаг микронеровностей на поверхности S_i) и смазочный слой не имеет разрывов в области ω. Тогда в соответствии с теорией смазки для каждых ω_1 и ω_2 гидродинамическое давление $p(x, y, t)$ удовлетворяет в области D уравнению Рейнольдса (1.25).

При принятых допущениях углы α_i между осью Oz и нормалями к поверхностям S_1^0 и S_2^0 в области D малы, поэтому можно принять

$$h(x, y, t) = h_0(x, y, t) - \varepsilon_1^*(\xi', \eta') - \varepsilon_2^*(\xi'', \eta''), \tag{2.1}$$

где ξ', η', ξ'' и η'' зависят от x, y и t. Переходя в (2.1) от переменных ξ', η', ξ'', η'' к переменным x и y, получим

$$h(x, y, t) = h_0(x, y, t) - \varepsilon_1(x, y, t) - \varepsilon_2(x, y, t), \tag{2.2}$$

где

$$\varepsilon_1(x, y, t) = \varepsilon_1^*[\xi'(x, y, t), \eta'(x, y, t)]; \varepsilon_2(x, y, t) = \varepsilon_2^*[\xi''(x, y, t), \eta''(x, y, t)].$$

Для реализации ε_1 и ε_2 справедливо

$$\partial\varepsilon_1/\partial t = -\mathbf{U}_1 \operatorname{grad} \varepsilon_1, \quad \partial\varepsilon_2/\partial t = -\mathbf{U}_2 \operatorname{grad} \varepsilon_2. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (1.25), получаем

$$\operatorname{div}\left[(h^3/12\mu)\operatorname{grad} p - \mathbf{U}h\right] = \partial h_0/\partial t + \mathbf{U}_1 \operatorname{grad} \varepsilon_1 + \mathbf{U}_2 \operatorname{grad} \varepsilon_2. \tag{2.4}$$

Таким образом, ω_1 и ω_2 соответствует функция $p(x, y, t)$ — решение уравнения (2.4) при соответствующих условиях на границе $\partial\omega$ области ω. Каждую пару (ω_1, ω_2) можно рассматривать как элементарное событие $\omega' = (\omega_1, \omega_2)$. Когда ω_1 пробегает Ω_1, а ω_2 — Ω_2, ω' пробегает пространство элементарных событий Ω'. Функцию p можно рассматривать как случайную функцию, заданную на пространстве Ω' элементарных событий ω'. Рассмотрим задачу определения случайной функции $p(x, y, t, \omega')$ из уравнения (2.4). Решение уравнения (2.4) при некоторых реализациях ε_1 и ε_2 может принимать отрицательные значения. Это означает, что принятое допущение о заполнении смазочным слоем без разрывов односвязной области ω не выполняется. Однако если $p(x, y, t, \omega')$ удовлетворяет условию

$$E\left[(p - E[p])^2\right] \leqslant (E[p])^2, \quad E[p] \geqslant 0, \tag{2.5}$$

то реализации p, принимающие в сколь-нибудь значительной области отрицательные значения, маловероятны и их вклад в средние величины мал.

Таким образом, при выполнении условий $\sigma_i/h_0 \leqslant 1$, $h_0/\lambda_i \leqslant 1$ и (2.5) для определения давления в смазочном слое между шероховатыми поверхностями можно использовать уравнение (2.4). Отметим, что при учете деформаций шероховатых поверхностей область применимости уравнения (2.4) будет ограничена только условиями $h_0/\lambda_i \leqslant 1$ и (2.5), а условия $\sigma_i/h_0 \leqslant 1$ при этом снимаются.

Так как случайные функции ε_1 и ε_2^* однородны в широком смысле, то моменты

$$K_i = E\left[\varepsilon_i(x, y, t, \omega_i)\ \varepsilon_i(x + \tau_x, y + \tau_y, t, \omega_i)\right], \quad i = 1, 2,$$

не зависят от t, т. е. $K_i = K_i(\tau_x, \tau_y)$. В дальнейшем будем считать, что ε_1 и ε_2 являются гауссовыми случайными функциями переменных x и y. Введем малый параметр $\alpha = \sigma/\Delta$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$, $\Delta = \min\limits_{x,y}\{h_0(x, y, t)\}$.

Обозначим

$$p_0 = E[p], \quad K_{\varepsilon p}(x, y; x_1, y_1) = E[\varepsilon(x, y)\ \delta p(x_1, y_1)],$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$; $\delta p = p - p_0$; $K_{ip}(x, y; x_1, y_1) =$

$= E[\delta p(x, y)\ \delta p(x_1, y_1)]$; $K_{\varepsilon_i p}(x, y; x_1, y_1) = E[\varepsilon_i(x, y)\ \delta p(x_1, y_1)]$.

Разложим неизвестные функции в ряд по α

$$p_0 = p_{00} + \alpha p_{01} + \alpha^2 p_{02} + \ldots,$$
$$K_{\varepsilon_i p} = K_{\varepsilon_i p_0} + \alpha K_{\varepsilon_i p_1} + \alpha^2 K_{\varepsilon_i p_2} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Следуя [36, 37], получаем систему уравнений

$$\operatorname{div}\left[(h_0^3/12\ \mu)\operatorname{grad} p_{00} - h_0\,\mathbf{U}\right] = \partial h_0/\partial t, \tag{2.6}$$

$$\operatorname{div}(h_0^3\operatorname{grad} p_{01}) = 0, \tag{2.7}$$

$$\operatorname{div}(h_0^3\operatorname{grad} p_{02}) + 3\Delta^2\operatorname{div}(h_0\operatorname{grad} p_{00}) - \frac{3}{\alpha^2}\operatorname{div}\{h_0^2[\operatorname{grad} K_{\varepsilon p_0}(x_1, y_1; x, y)]_{\substack{x_1=x\\ y_1=y}}\} = 0, \tag{2.8}$$

$$\operatorname{div}[h_0^3\operatorname{grad} K_{\varepsilon_1 0}(x_1, y_1; x, y)] - 3\operatorname{div}[h_0^2 K(\tau_x, \tau_y)\operatorname{grad} p_{00}] = 12\mu\{\mathbf{U}_1\operatorname{grad} K_1(\tau_x, \tau_y) + \mathbf{U}_2\operatorname{grad} K_2(\tau_x, \tau_y) - \operatorname{div}[\mathbf{U}K(\tau_x, \tau_y)]\}, \tag{2.9}$$

$$\operatorname{div}[h_0^3\operatorname{grad} K_{1p_0}(x_1, y_1; x, y)] - 3\operatorname{div}[h_0^2 K_{\varepsilon p_0}(x, y; x_1, y_1)\operatorname{grad} p_{00}] = 12\mu\{\mathbf{U}_1\operatorname{grad} K_{\varepsilon_1 p_0}(x, y; x_1, y_1) + \mathbf{U}_2 K_{\varepsilon_2 0}(x, y; x_1, y_1) - \operatorname{div}[\mathbf{U}K_{\varepsilon p_0}(x, y; x_1, y_1)]\}, \tag{2.10}$$

$$\operatorname{div}[h_0^3\operatorname{grad} K_{\varepsilon_1 p_0}(x_1, y_1; x, y)] - 3\operatorname{div}[h_0^2 K_1(\tau_x, \tau_y)\operatorname{grad} p_{00}] = 12\mu\{\mathbf{U}_1\operatorname{grad} K_1(\tau_x, \tau_y) - \operatorname{div}[\mathbf{U}K_1(\tau_x, \tau_y)]\}, \tag{2.11}$$

$$K_{\varepsilon p_0} = K_{\varepsilon p_1} + K_{\varepsilon p_2}, \tag{2.12}$$

где $\tau_x = x - x_1$; $\tau_y = y - y_1$; $K = K_1 + K_2$; операции div и grad производятся по переменным x и y. При выводе (2.6)—(2.12) принято, что взаимная корреляция микронеровностей на различных поверхностях отсутствует. Если для $p(x, y, t)$ справедливо условие

$$p(x, y, t)|_{x,\, y\in\partial\omega} = p_\omega,$$

где p_ω^3 — детерминированная функция, то неизвестные функции, входящие в (2.6)—(2.12), удовлетворяют условиям

$$p_{00}|_{\partial\omega} = p_\omega,\ p_{01}|_{\partial\omega} = p_{02}|_{\partial\omega} = 0,\ K_{\varepsilon p_0}(x_1, y_1; x, y)|_{x,\, y\in\partial\omega} = 0,$$
$$K_{\varepsilon_1 0}(x_1, y_1; x, y)|_{x,\, y\in\partial\omega} = 0,\ K_{p p_0}(x_1, y_1; x, y)|_{x,\, y\in\partial\omega} = 0. \tag{2.13}$$

Из (2.6) и (2.13) следует, что $p_{01} = 0$. Среднее значение силы трения, действующей на i-е тело, для бесконечно длинных цилиндров равно

$$-F_{i0} = \int_a^c \left\{\mu\frac{U_i - U_j}{h_0} + \frac{h_0}{2}\frac{\partial p_{00}}{\partial x} + \mu(U_i - U_j)\frac{\sigma^2}{h_0^3} + \frac{\alpha^2 h_0}{2}\frac{\partial p_{02}}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}K_{\varepsilon p_0}(x_1, x)\right]_{x_1=x}\right\} dx. \tag{2.14}$$

Рассмотрим примеры.

1. *Сближение номинально плоских шероховатых поверхностей. Поперечная шероховатость* (рис. 5). Пусть $\varepsilon = \varepsilon(x)$, $h_0 = h_0(t)$. Система уравнения (2.6), (2.8)—(2.10) с граничными условиями

принимает вид

$$h_0^3\, d^2p_{00}/dx^2 = 12\mu\, dh_0/dt, \tag{2.15}$$

$$h_0^3 \frac{d^2p_{02}}{dx^2} + 3h_0^3 \frac{d^2p_{00}}{dx^2} - 3\frac{h_0^4}{\sigma^2}\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial x} K_{\varepsilon p_0}(x_1, x)\right]_{x_1=x} = 0, \tag{2.16}$$

$$h_0^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_{\varepsilon p_0}(x_1, x) = 3h_0^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[K(\tau_x)\frac{dp_{00}}{dx}\right], \tag{2.17}$$

$$h_0^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_{pp_0}(x_1, x) = 3h_0^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[K_{\varepsilon p_0}(x, x_1)\frac{dp_{00}}{dx}\right], \tag{2.18}$$

$$p_{00}(-a) = p_{00}(a) = 0, \qquad p_{02}(-a) = p_{02}(a) = 0,$$
$$K_{\varepsilon p_0}(x_1, a) = K_{\varepsilon p_0}(x_1, -a) = 0,\ K_{pp_0}(x_1, -a) = K_{pp_0}(x_1, a) = 0. \tag{2.19}$$

Решение системы уравнений (2.15)—(2.18) при условиях (2.19) имеет вид

$$p_{00} = -\frac{6\mu}{h_0^3}\frac{dh_0}{dt}(a^2 - x^2), \tag{2.20}$$

$$p_{02} = -\frac{36\mu}{h_0^3}\frac{dh_0}{dt}(a^2 - x^2) - \frac{54\mu}{h_0^3 a\sigma^2}\frac{dh_0}{dt}\left[\int_{-a}^{x} d\eta \int_{-a}^{a} \tau K(\eta - \tau)\, d\tau - \right.$$
$$\left. - \frac{x+a}{2a}\int_{-a}^{a} d\eta \int_{-a}^{a} \tau K(\eta - \tau)\, d\tau\right], \tag{2.21}$$

$$K_{pp_0}(x_1, x) = \frac{36\mu}{h_0^4}\frac{dh_0}{dt}\left[\int_{-a}^{x} \tau K_{\varepsilon p_0}(\tau, x_1)\, d\tau - \frac{x+a}{2a}\int_{-a}^{a} \tau K_{\varepsilon p_0}(\tau, x_1)\, d\tau\right], \tag{2.22}$$

$$K_{\varepsilon p_0}(x_1, x) = \frac{36\mu}{h_0^4}\frac{dh_0}{dt}\left[\int_{-a}^{x} \tau K(x_1 - \tau)\, d\tau - \frac{x+a}{2a}\int_{-a}^{a} \tau K(x_1 - \tau)\, d\tau\right]. \tag{2.23}$$

Пусть $K(x) = \sigma^2 \exp(-\beta^2 x^2)$, причем $\beta a \geqslant 1$, т. е. на полосе $-a \leqslant x \leqslant a$ располагается большое число микронеровностей. Тогда из (2.21)—(2.23) следует

$$p(x) = p_{00} + \alpha^2 p_{02} = p_{00}\left[1 + (\sigma/h_0)^2(6 - 9\sqrt{\pi}/2N)\right], \tag{2.24}$$

$$K_{pp_0}(x, x) = (6\sqrt{\pi}/N)(\sigma/h_0)^2 (p_{00,m})^2 \left[(x/a)^2 - 2(x/a)^4 + 1\right], \tag{2.25}$$

где $N = \beta a$; $p_{00,m} = -(6\mu a^2/h_0^3)(dh_0/dt)$.

Из (2.25) следует, что среднеквадратическое отклонение давления пропорционально $1/N$. Это означает, что при больших N значение давления $p(x)$ с вероятностью, близкой к единице, равно значению, определяемому из (2.24), откуда следует, что $p(x)$ растет с ростом N и с ростом σ.

2. *Сближение плоских поверхностей. Продольная шероховатость.*

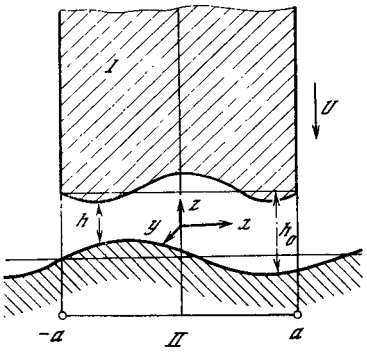


Рис. 5

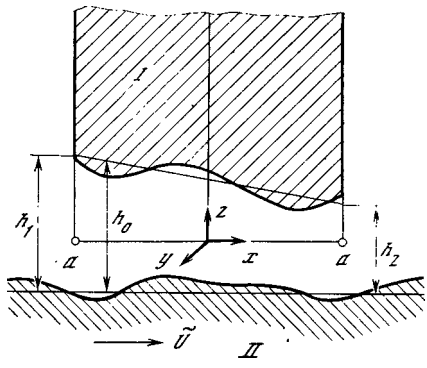


Рис. 6

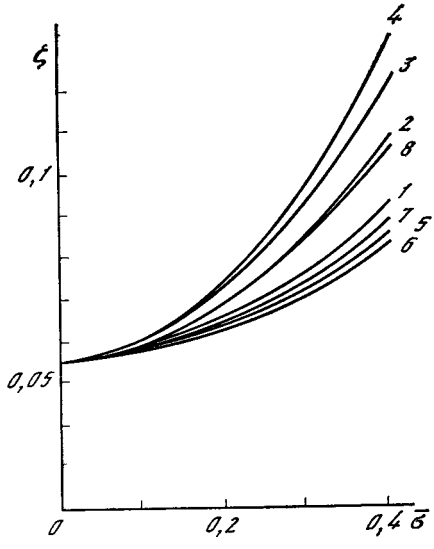


Рис. 7. Зависимость ζ от $\bar{\sigma}$ при различных значениях m_1, m_2 и N

1—4: $m_1 = 1$, $m_2 = 0$ (*1* — $N = 5$, *2* — $N = 10$, *3* — $N = 30$, *4* — $N = 200$);
5, *6*: $m_1 = 0$, $m_2 = 1$ (*5* — $N = 5$, *6* — $N = 200$);
7, *8*: $m_1 = m_2 = 0{,}5$ (*7* — $N = 5$, *8* — $N = 200$)

Пусть $\varepsilon = \varepsilon(y)$, $h_0 = h_0(t)$. Уравнения и граничные условия для p_{02} и $K_{\varepsilon_{10}}$ принимают вид

$$h_0^3 \frac{d^2 p_{02}}{dx^2} + 3h_0^3 \frac{d^2 p_{00}}{dx^2} - \frac{3h_0^4}{2} \frac{d^2}{dx^2} K_{\varepsilon_{10}}(x, \tau_y)\Big|_{\tau_y = 0} = 0, \tag{2.26}$$

$$h_0^3 \left(\frac{\partial^2 K_{\varepsilon_{10}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_{\varepsilon_{10}}}{\partial \tau_y^2} \right) = 3h_0^2 K(\tau_y) \frac{d^2 p_{00}}{dx^2}, \tag{2.27}$$

$$p_{02}(-a) = p_{02}(a) = 0;\ K_{\varepsilon_{10}}(-a, \tau_y) = K_{\varepsilon_{10}}(a, \tau_y) = 0,$$
$$-\infty < \tau_y < \infty. \tag{2.28}$$

Решая (2.26)—(2.28), находим

$$p_{02} = -3p_{00} + \frac{54}{\sqrt{\pi}} \frac{\mu}{h_0^3} \frac{dh_0}{dt} \frac{a^2}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{t^2}{4N^2}} \left[\frac{\operatorname{ch}(tx/a)}{\operatorname{ch} t} - 1 \right] dt. \tag{2.29}$$

Из (2.29) следует, что $p \simeq p_{00}\,[1-3\,(\sigma/h_0)^2]$ при больших N. Таким образом, при наличии продольной шероховатости с ростом σ несущая способность смазочного слоя падает. Это объясняется тем, что продольная шероховатость способствует вытеканию смазки из зазора через торцы.

3. *Скольжение наклонной пластины по полупространству* (рис. 6). Рассмотрим случай поперечной шероховатости, когда $\varepsilon = \varepsilon(x)$. Основные уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dx}\left(h_0^3\frac{dp_{00}}{dx}\right)=6\mu U\frac{dh_0}{dx}, \tag{2.30}$$

$$\frac{d}{dx}\left(h_0^3\frac{dp_{02}}{dx}\right)+3\Delta^2\frac{d}{dx}\left(h_0\frac{dp_{00}}{dx}\right)-\frac{3\Delta^2}{\sigma^2}\frac{d}{dx}\left\{h_0^2\left[\frac{\partial}{\partial x}K_{\varepsilon p_0}(x_1,x)\right]_{x_1=x}\right\}=0, \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[h_0^3\frac{\partial}{\partial x}K_{\varepsilon p_0}(x_1,x)\right]-3\frac{\partial}{\partial x}\left[h_0^2K(\tau_x)\frac{dp_{00}}{dx}\right]=$$
$$=6\mu U\left[m_2\frac{\partial K_2(\tau_x)}{\partial x}-m_1\frac{\partial K_1(\tau_x)}{\partial x}\right] \tag{2.32}$$

плюс уравнения для K_{rp_0}, которые не потребуются. Отметим только, что при большом числе волн микронеровностей на ширине пластины (число N) $K_{pp_0}\sim\sigma^2/N$. В уравнениях (2.31), (2.32) $m_i=\sigma_i^2/(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$, $m_i=0$, если i-я поверхность гладкая, в качестве Δ взято $(h_1+h_2)/2$, где h_1 и h_2 — толщины смазочного слоя соответственно на входе и выходе, а $h_0=h_1+(x+a)(h_2-h_1)/L$, $L=2a$ — ширина полосы. Интегрируя (2.30)—(2.32) и переходя к безразмерным переменным, определяемым по формулам $\bar p_0=p_0\Delta^2/(2\mu UL)$, $\bar h_0=h_0/\Delta$, $\bar\sigma_i=\sigma_i/\Delta$, $\bar x=(x+a)/l$, получаем при $K_i=\sigma_i\exp(-\beta^2x^2)$

$$\bar p_{00}={}^3/_4(k^2-1)\bar x\,(1-\bar x)/[k-(k-1)\,\bar x]^2,\quad k=h_1/h_2,$$

$$\bar F_{02}=9\left\{(m_1+3m_2)\left[I_4(\bar x)-\frac{I_3(\bar x)}{I_3(1)}I_4(1)\right]-\right.$$
$$-2(m_1+m_2)\frac{I_2(1)}{I_3(1)}\left[I_5(\bar x)-\frac{I_3(\bar x)}{I_3(1)}I_5(1)\right]-$$
$$\left.-\frac{1}{I_3(1)}\int_0^{\bar x}\frac{G(\eta)}{\bar h_0^4(\eta)}\,d\eta+\frac{I_3(\bar x)}{I_3^2(1)}\int_0^1\frac{G(\eta)}{\bar h_0^4(\eta)}\,d\eta\right\}, \tag{2.33}$$

где

$$G(\tau)=\int_0^1\frac{\exp[-N^2(\eta-\tau)^2]}{\bar h_0^2(\eta)}\left[2m_2+(m_1+m_2)\left(2-\frac{3}{\bar h_0(\eta)}\frac{I_2(1)}{I_3(1)}\right)\right]d\eta,$$

$$I_k(\bar x)=\int_0^{\bar x}\frac{d\eta}{\bar h_0^k(\eta)},\quad N=\beta L,\quad \bar h_0(\bar x)=\frac{2}{k+1}[k-(k-1)\bar x].$$

Среднее значение силы трения

$$F_{i0}=(\mu U/2\Delta)\,\bar F_{i0},$$

где

$$-\bar{F}_{i0} = 4iI_1 - \frac{6I_2^2}{I_3} + \bar{\sigma}^2\left[4iI_3 + 12m_2\left(2I_3 - \frac{3I_2I_4}{I_3}\right) - \right.$$

$$\left. - 36(m_1 + m_2)\frac{I_2}{I_3}\left(I_4 - \frac{I_2}{I_3}I_5\right) - \frac{6}{I_3}\int_0^1 \frac{G(\tau)}{\bar{h}_0^3(\tau)}\left(2 - 3\frac{I_2}{I_3}\frac{1}{\bar{h}_0(\tau)}\right)d\tau\right], \tag{2.34}$$

$i = 1, 2$, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2$, а $I_k \equiv I_k$ (1).

На рис. 7 показана зависимость коэффициента нагруженности $\zeta = \int_0^1 \bar{p}(\bar{x})\,d\bar{x}$ от параметра $\bar{\sigma}$ при $k = 1{,}25$ и различных значениях m_i и N. Видно, что с ростом $\bar{\sigma}$ несущая способность смазочного слоя растет, однако скорость роста ζ зависит от отношения высот микронеровностей на разных поверхностях. Из двух возможных вариантов, когда шероховатой является только одна поверхность, несущая способность смазочного слоя больше, если шероховатая поверхность неподвижна. Это объясняется следующим образом. Если $\sigma_1 \neq 0$, а $\sigma_2 = 0$, то $\partial h/\partial t = 0$, т. е. эффекты сдавливания пленки отсутствуют. Если же $\sigma_2 \neq 0$, а $\sigma_1 = 0$, то $\partial h/\partial t \neq 0$, причем пленка растягивается по вертикали, где шероховатость увеличивает «клиновидность» зазора, и сжимается там, где «клиновидность» уменьшает-

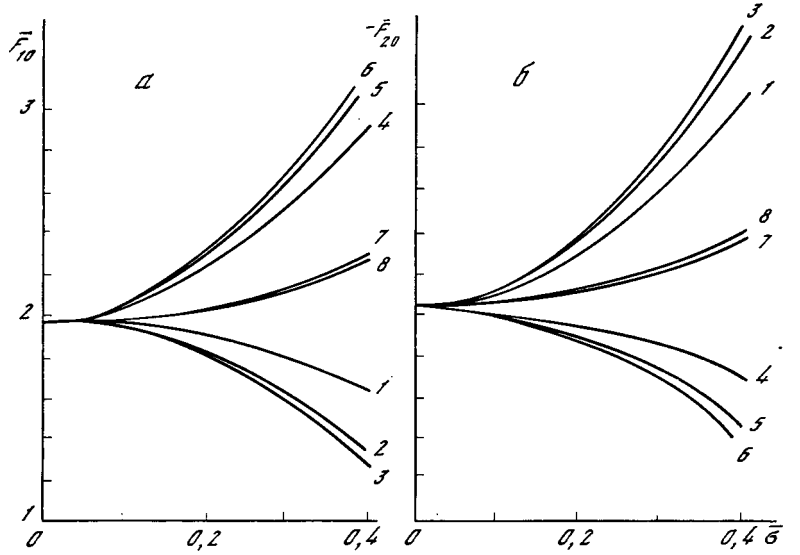


Рис. 8. Зависимость сил трения $\bar{F}_{10}$ и $\bar{F}_{20}$ от $\bar{\sigma}$ при различных значениях m_1, m_2 и N

1—3: $m_1 = 1$, $m_2 = 0$ (*1* — $N = 5$, *2* — $N = 30$, *3* — $N = 200$); *4—6*: $m_1 = 0$, $m_2 = 1$ (*4* — $N = 5$, *5* — $N = 30$, *6* — $N = 200$); *7*, *8*: $m_1 = m_2 = 0{,}5$ (*7* — $N = 5$, *8* — $N = 200$)

ся. В результате получаем, что дополнительное давление, возникающее из-за сдавливания или растяжения пленки, частично компенсирует дополнительное давление, возникающее из-за изменения формы зазора, обусловленного шероховатостью. Это и приводит к тому, что в первом случае давление p растет быстрее с ростом σ, чем во втором.

На рис. 8 приведены зависимости $\bar{F}_{i0}$ от $\bar{\sigma}$ при $k = 1{,}25$ и разных значениях m_i и N. Видно, что если пластина шероховатая, а полупространство гладкое, то $\bar{F}_{10}$ с ростом $\bar{\sigma}$ падает, а $|\bar{F}_{20}|$ растет. Если же шероховатой является поверхность полупространства, а пластина гладкая, то с ростом $\bar{\sigma}$ $\bar{F}_{10}$ растет, а $|\bar{F}_{20}|$ падает. Это поведение $\bar{F}_{i0}$ с ростом $\bar{\sigma}$ объясняется так. В первом случае $\partial h/\partial t = 0$, с ростом ε h падает, а dp/dx растет таким образом, что $E\,[hdp/dx]$ также растет. Так как член hdp/dx уменьшает F_{10} и увеличивает $|\bar{F}_{20}|$, то $\bar{F}_{10}$ с ростом $\bar{\sigma}$ падает, а $|\bar{F}_{20}|$ растет. Во втором случае из-за эффектов сдавливания пленки dp/dx с ростом ε растет не так быстро, как в первом случае, в результате чего $E\,[hdp/dx]$ с ростом $\bar{\sigma}$ падает, а это и приводит к тому, что $|\bar{F}_{20}|$ уменьшается, а $\bar{F}_{10}$ увеличивается.

2.2. Газовая смазка шероховатых поверхностей

Используя изложенный подход в случае газовой смазки при $\varkappa = 1$, можно получить следующую систему уравнений относительно ранее определенных неизвестных:

$$\operatorname{div}\,[h_0^3 p_{00}\operatorname{grad} p_{00} - 12\,\mu p_{00} h_0 \mathbf{V}] = 12\,\mu\,\partial(p_{00}h_0)/\partial t, \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 \operatorname{div}[h_0^3 \operatorname{grad}(p_{00}p_{02})] + \operatorname{div}\{h_0^3[\operatorname{grad} K_{\varepsilon_1 p_0}(x, y; x_1, y_1)]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}}\} - \\
&\quad - 3\operatorname{div}[h_0^2 K_{\varepsilon_1 p_0}(x, y; x, y)\operatorname{grad} p_{00}] - \\
&\quad - 3\operatorname{div}\{h_0^2 p_{00}[\operatorname{grad} K_{\varepsilon_1 p_0}(x_1, y_1; x, y)]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}}\} + 3\sigma^2 \operatorname{div}(h_0 p_{00}\operatorname{grad} p_{00}) = \\
&\quad = 12\mu\{-\operatorname{div}[K_{\varepsilon_1 p_0}(x, y; x, y)\,\mathbf{V}] - \partial K_{\varepsilon_1 p_0}(x, y; x, y)/\partial t + \\
&\quad + \mathbf{U}_1[\operatorname{grad} K_{\varepsilon_{11} p_0}(x, y; x_1, y_1)]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}} + \mathbf{U}_2[\operatorname{grad} K_{\varepsilon_{21} p_0}(x, y; x_1, y_1)]_{\substack{x_1=x\\y_1=y}}\},
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\{h_0^3 \operatorname{grad}[p_{00}K_{\varepsilon_1 0}(x_1, y_1; x, y)]\} - 3\operatorname{div}[h_0^2 p_{00} K(\tau_x, \tau_y)\operatorname{grad} p_{00}] = \\
&\quad = 12\mu\{\operatorname{div}[h_0 \mathbf{V} K_{\varepsilon_1 0}(x_1, y_1; x, y) - p_{00}\mathbf{V}K(x_1, y_1; x, y)] + \\
&\quad + \partial[h_0 K_{\varepsilon_1 p_0}(x_1, y_1; x, y)]/\partial t - K(x_1, y_1; x, y)\,\partial p_{00}/\partial t + \\
&\quad + p_{00}\mathbf{U}_1 \operatorname{grad} K_1(x_1, y_1; x, y) + p_{00}\mathbf{U}_2 \operatorname{grad} K_2(x_1 y_1; x, y)\},
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\{h_0^3 \operatorname{grad}[p_{00}K_{\varepsilon_1 0}(x_1, y_1; x, y)] - \\
&\quad - 3\operatorname{div}[h_0^2 p_{00} K_{\varepsilon_1 0}(x, y; x_1, y_1)\operatorname{grad} p_{00}]\} = \\
&\quad = 12\mu\{\operatorname{div}[h_0 \mathbf{V}\, K_{\varepsilon_1 p_0}(x_1, y_1; x, y) - p_{00}\mathbf{V}K_{\varepsilon_1 p_0}(x, y; x_1, y_1)] + \\
&\quad + \partial[h_0 K_{\varepsilon_1 p_0}(x_1, y_1; x, y)]/\partial t - K_{\varepsilon_1 p_0}(x, y; x_1, y_1)\,\partial p_{00}/\partial t + \\
&\quad + p_{00}\mathbf{U}_1 \operatorname{grad} K_{\varepsilon_{11} 0}(x, y; x_1, y_1) + p_{00}\mathbf{U}_2 \operatorname{grad} K_{\varepsilon_{21} p_0}(x, y; x_1, y_1)\},
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\operatorname{div}\{h_0^3 \operatorname{grad}[p_{00}K_{\varepsilon_1 p_0}(x_1, y_1; x, y)]\} - 3\operatorname{div}[h_0^2 p_{00} K_1(\tau_x, \tau_y)\operatorname{grad} p_{00}] =$$
$$= 12\mu\{\operatorname{div}[h_0 \mathbf{V} K_{\varepsilon_1 p_0}(x_1, y_1; x, y) - p_{00}\mathbf{V}K_1(\tau_x, \tau_y)] +$$
$$+ \partial[h_0 K_{\varepsilon_1 p_0}(x_1, y_1; x, y)]/\partial t - K_1(\tau_x, \tau_y)\,\partial p_{00}/\partial t +$$
$$+ p_{00}\mathbf{U}_1 \operatorname{grad} K_1(\tau_x, \tau_y)\}, \qquad (2.39)$$

$$K_{\varepsilon_1 0} = K_{\varepsilon_1 p_0} + K_{\varepsilon_2 1_0}, \qquad (2.40)$$

где операции div и grad проводятся по переменным x и y.

Для нахождения p_{02} из системы уравнений (2.35)—(2.40) необходимо после определения p_{00} из уравнения (2.35) найти $K_{\varepsilon_1 1_0}$ из уравнения (2.39), решить уравнения (2.37) и (2.40) относительно $K_{\varepsilon_2 1_0}$ и $K_{\varepsilon 1_0}$, затем найти K_{pp_0} из (2.38), после чего определить p_{02}, решая уравнение (2.36).

3. Математические модели теории износа

При трении происходит изнашивание тел. Вследствие износа меняются размеры тел, что ведет к потере точности, надежности и выходу узла из строя. В связи с этим возникает необходимость учета влияния износа на характеристики узла. Износостойкость тел характеризует интенсивность изнашивания I, которая равна величине линейного износа на единице пути скольжения, т. е. $I = \partial i/\partial s$, где i — линейный износ, s — путь скольжения. Величина I безразмерна и зависит от большого количества факторов, в особенности от контактного давления.

При работе пары трения износ приводит к перераспределению контактного давления, а это, в свою очередь, изменяет интенсивности изнашивания тел. Если трущиеся поверхности разделены слоем жидкости, то I очень мало́. Однако в гидродинамических подшипниках скольжения износ тел в периоды пуска, остановки или реверса подшипника может достигать значительных величин, и поэтому учет влияния износа на характеристики подшипника необходим также и для гидродинамических подшипников. В подшипниках скольжения и других узлах сухого трения износ является основным фактором. определяющим долговечность узла.

Широкий класс контактных задач с учетом износа при фиксированной границе решен Л. А. Галиным [6]. В радиальном подшипнике скольжения при наличии износа область контакта меняется со временем, поэтому возникает задача с неизвестной подвижной границей. Применение методов [6] к таким задачам не приводит к успеху. В данном разделе приведены уравнения контактных задач с учетом износа для подшипника скольжения, а также основные полученные результаты.

Индексами 1 и 2 обозначим величины, относящиеся к валу и втулке. Зависимость интенсивности изнашивания от контактного давления, как правило, определяют экспериментально [38]. Наиболее часто она имеет степенной вид:

$$\partial i_1/\partial s_1 = f(p/\sigma_1)^{m_1}, \quad \partial i_2/\partial s_2 = f(p/\sigma_2)^{m_2}, \qquad (3.1)$$

где σ_1, σ_2, m_1, m_2 — константы, которые предполагаются известными; f — коэффициент трения. Константы σ_1 и σ_2 имеют размерность давления и характеризуют прочностные свойства поверхностных слоев тел. При заданных геометрии тел и их относительном движении s_1 и s_2 однозначно зависят от времени. Рассмотрим отдельно цилиндрический и сферический подшипники.

3.1. Расчет на износ цилиндрических подшипников скольжения

Рассматривая вращательное движение вала, на который действует нагрузка Q, в общем случае зависящая от времени, но не изменяющаяся по направлению, получим [39]

$$\omega\, \partial i_1(\varphi, t)/\partial\varphi + \partial i_1/\partial t = f\omega\, [R_1 - i_1(\varphi, t)]\, (p/\sigma_1)^{m_1}, \tag{3.2}$$

$$\partial i_2/\partial t = f\omega\, [R_1 - i_1(\varphi, t)]\, (p/\sigma_2)^{m_2}, \tag{3.3}$$

где ω — угловая скорость вращения вала; R_1 — начальный радиус вала; φ — угловая координата, отсчитываемая от линии действия нагрузки.

Условие контакта запишем в виде

$$\Delta + i_1 + i_2 + v_1 + v_2 = \delta(t)\cos\varphi, \tag{3.4}$$

где v — упругое радиальное перемещение, δ — сближение тел, а условие равновесия вала имеет вид (1.22). Выражая в (3.4) v_1 и v_2 через контактное давление [8, 40], получаем

$$\left(\frac{\varkappa_1 - 1}{4G_1} - \frac{\varkappa_2 - 1}{4G_2}\right) p(\varphi, t) - \left(\frac{\varkappa_1 + 1}{8\pi G_1} + \frac{\varkappa_2 + 1}{8\pi G_2}\right) \times$$

$$\times \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} p_\vartheta \operatorname{ctg}\frac{\varphi - \vartheta}{2}\, d\vartheta + \frac{\varkappa_2 + 1}{8\pi G_2} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} p(\varphi, t)\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi R_1}\left(\frac{1}{G_1} + \frac{\varkappa_2}{G_2}\right) q(t)\cos\varphi + \frac{\Delta}{R_1} =$$

$$= \frac{1}{R_1}\left(i_1 + \frac{\partial^2 i_1}{\partial\varphi^2} + i_2 + \frac{\partial^2 i_2}{\partial\varphi^2}\right), \tag{3.5}$$

если втулку вместе с корпусом, в котором она закреплена, моделировать пространством с цилиндрической полостью. При выводе (3.5) предполагается, что внешняя нагрузка приложена в центре цилиндра. При внешней нагрузке, распределенной по свободной части поверхности цилиндра, уравнение, близкое к (3.5), получено в [41]. Для неметаллического подшипника скольжения, в котором тонкий неметаллический вкладыш с малым модулем упругости и толщиной ε посажен на вал или закреплен в корпус, вместо (3.5) имеем (см. [39])

$$\Delta + i_1 + i_2 + \frac{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}{(1 - \nu_k) E_k}(\varepsilon_k - i_k)\, p = \delta\cos\varphi, \tag{3.6}$$

где $k = 1$, если вкладыш закреплен на валу, и $k = 2$, если вкладыш закреплен в корпусе.

В уравнениях (3.5) и (3.6) не учитывается влияние сил трения в области контакта на деформации тел.

Функции i_k и p должны удовлетворять условиям

$$p(-\varphi_1, t) = p(\varphi_2, t) = 0, \quad i_k(\varphi, 0) = 0,$$
$$i_2[(-1)^k \varphi_k(t), t] = 0, \text{ если } d\varphi_k(t)/dt \geqslant 0 \text{ при } t \geqslant 0, \tag{3.7}$$
$$\partial i_2(\varphi_k, t)/\partial t = 0, \text{ если } d\varphi_k(t)/dt < 0, \quad k = 1,2.$$

Уравнения (1.22), (3.2), (3.3), (3.5) (или (3.6)) совместно с условиями (3.7) представляют собой изотермическую контактную задачу с учетом износа для указанных подшипников при вращательном движении вала, т. е. когда ω зависит от t. При возвратно-поступательном движении вала уравнения (3.2) и (3.3) заменяются на уравнения

$$\partial i_k/\partial t = f V (p/\sigma_k)^{m_k},$$

где V — скорость скольжения.

Рассмотрим случай, когда износом вала можно пренебрегать по сравнению с износом вкладыша. Введем безразмерные переменные по формулам

$$I = i_2/\Delta, \quad \bar{p} = pR_1/q(0), \quad \bar{t} = (\omega R_1/\Delta)\, t\, [q(0)/R_1\sigma_2]^{m_2},$$
$$\chi = \delta/\Delta, \quad \bar{q}(\bar{t}) = q(t)/q(0).$$

Рассмотрим следующие варианты.

1. *Тела абсолютно жесткие.* Система уравнений имеет вид

$$1 + I = \chi \cos\varphi, \quad \partial I/\partial \bar{t} = \bar{p}^m, \quad \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \bar{p} \cos\varphi\, d\varphi = \bar{q}(\bar{t}), \tag{3.8}$$

где $m = m_2$. Решение системы уравнений (3.8) при условиях $\bar{p}(-\varphi_0) = \bar{p}(\varphi_0) = 0$, $I(-\varphi_0) = I(\varphi_0) = 0$ имеет вид

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{\sin\tau}{\cos^2\tau} J^m(\tau)\, d\tau = \int_0^{\bar{t}} \bar{q}(\tau)\, d\tau, \quad J(x) = \int_{-x}^{x} \cos^{\frac{m+1}{m}} \varphi\, d\varphi, \tag{3.9}$$

$$\bar{p}(\varphi, \bar{t}) = q(\bar{t}) \cos^{1/m}\varphi / J(\varphi_0), \qquad I = \cos\varphi/\cos\varphi_0 - 1. \tag{3.10}$$

Выражение (3.9) связывает φ_0 и $\bar{t}$. После нахождения $\varphi_0(\bar{t})$ из (3.9) функции $p(\varphi, \bar{t})$ и $I(\varphi, \bar{t})$ вычисляются по формулам (3.10). Из (3.9) следует, что если $\lim\limits_{\bar{t}\to\infty} \int_0^{\bar{t}} \bar{q}(\tau)\, d\tau = \infty$, то $\lim\limits_{\bar{t}\to\infty} \varphi_0(\bar{t}) = \pi/2$ и

$$\lim_{\bar{t}\to\infty} \bar{p}(\varphi, \bar{t}) = \bar{q}(\infty) \cos^{1/m}\varphi / J(\pi/2).$$

2. *Подшипник с тонким вкладышем, закрепленным в подушке.* Система уравнений имеет вид

$$1 + \beta(1 - \beta_1 I)\bar{p} + I = \chi \cos\varphi, \quad \frac{\partial I}{\partial \bar{t}} = \bar{p}^m, \quad \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \bar{p} \cos\varphi\, d\varphi = \bar{q}(\bar{t}), \tag{3.11}$$

где

$$\beta = \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{(1-\nu_2)} \frac{\varepsilon_2 q(0)}{(R_1 E_2 \Delta)}; \qquad \beta_1 = \frac{\Delta}{\varepsilon_2}.$$

При $\beta_1 = 0$, $m = 1$ и $q = 1$ решение системы уравнений (3.11) имеет вид (см. [39])

$$[\varphi_0(\bar{t}) - \sin\varphi_0(\bar{t})\cos\varphi_0(\bar{t})]/\cos\varphi_0(\bar{t}) = \beta + \bar{t}, \tag{3.12}$$

$$I(\varphi, \bar{t}) = \exp\left(-\frac{\bar{t}}{\beta}\right) - 1 + \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0(\bar{t})} - \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0(0)}\exp\left(-\frac{\bar{t}}{\beta}\right) -$$

$$- \cos\varphi \exp\left(-\frac{\bar{t}}{\beta}\right)\int_0^{\bar{t}} \frac{\exp(\tau/\beta)}{\varphi_0(\tau) + \sin\varphi_0(\tau)\cos\varphi_0(\tau)}\, d\tau$$

при $|\varphi| \leqslant \varphi_0(0)$, (3.13)

$$I(\varphi, \bar{t}) = \exp\left[-\frac{\bar{t} - \bar{t}_0(\varphi)}{\beta}\right] - 1 + \frac{\cos\varphi}{\beta}\int_{\bar{t}_0(\varphi)}^{\bar{t}} \frac{\exp[(\tau - \bar{t})/\beta]}{\cos\varphi_0(\tau)}\, d\tau$$

при $|\varphi| > \varphi_0(0)$. (3.14)

В (3.14) $\bar{t}_0(\varphi)$ — значение $\bar{t}$, при котором $\varphi_0 = \varphi$,

$$p = (\cos\varphi/\cos\varphi_0 - 1 - I)/\beta. \tag{3.15}$$

Решение (3.12)—(3.15) при $\bar{t} \to \infty$ асимптотически приближается к решению (3.9), (3.10) при $m = q = 1$. Проведенное численное исследование показало, что решение системы уравнений (3.11) при $\bar{t} \to \infty$ асимптотически приближается к решению (3.9), (3.10) при любых m и $q(\bar{t})$, если только

$$\lim_{\bar{t}\to\infty}\int_0^{\bar{t}} q(\tau)\, d\tau = \infty.$$

3. *Металлический подшипник скольжения, моделируемый контактом упругого цилиндра и упругого пространства с цилиндрической полостью.* Система уравнений имеет вид

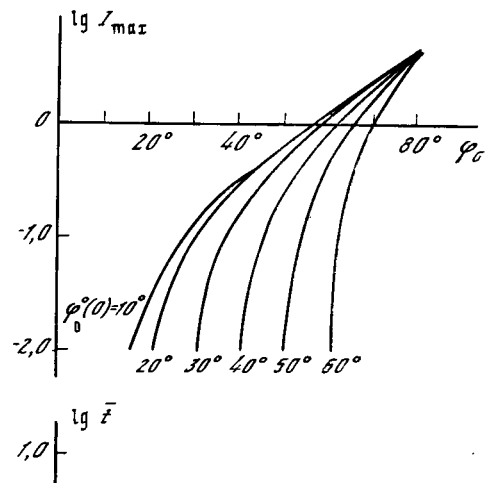
$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \bar{p}'_\xi(\xi, \bar{t})\operatorname{ctg}\frac{\varphi - \xi}{2} d\xi - 2\pi\gamma_1 \bar{p}(\varphi, \bar{t}) - \gamma_3 \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \bar{p}(\varphi, \bar{t})\, d\varphi -$$

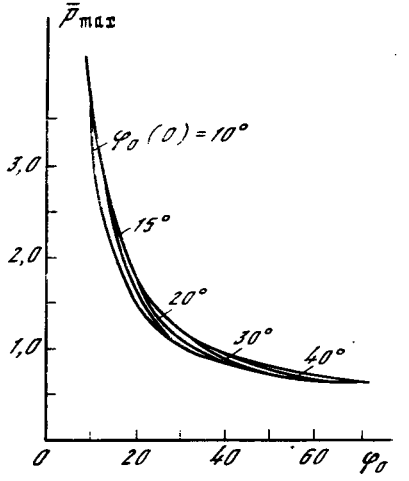
$$- 4\gamma_2 \gamma(\bar{t})\cos\varphi = \frac{1}{\beta}\left[1 + I + \frac{\partial^2 I}{\partial\varphi^2}\right], \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{t}} = \bar{p}^m, \qquad \int_{-\varphi_0(\bar{t})}^{\varphi_0(\bar{t})} \bar{p}(\varphi, \bar{t})\cos\varphi\, d\varphi = \bar{q}(\bar{t}), \tag{3.17}$$

где

$$\beta = \frac{\bar{q}(0)}{8\pi\Delta}\left[\frac{\varkappa_1 + 1}{G_1} + \frac{\varkappa_2 + 1}{G_2}\right].$$





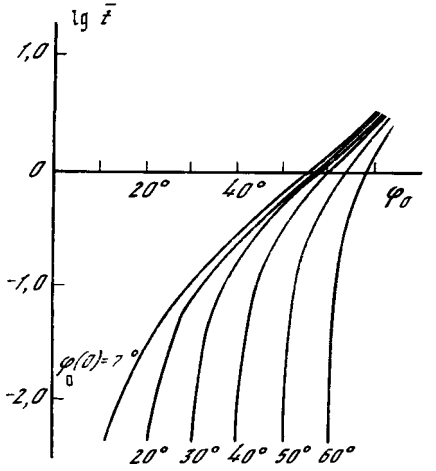


Рис. 9. Зависимость максимального износа I_{max}, параметра $\bar{t}$ и максимального контактного давления $\bar{p}_{max}$ от угла контакта φ_0 при различных значениях начального угла контакта $\varphi_0(0)$

Эта система решалась численно. Так как $\varphi_0(t)$ растет с ростом t, то функции можно выражать не через $\bar{t}$, а через φ_0. На рис. 9 приведены зависимости $I_{max}(\varphi_0) = I(0, t(\varphi_0))$, $t(\varphi_0)$ и $p_{max}(\varphi_0) = p(0, \bar{t}(\varphi_0))$ при различных значениях $\varphi_0(0)$, полученные путем численного решения системы уравнений (3.16), (3.17) при $\bar{q}(\bar{t}) = 1$, $m = 1$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0{,}5$. Анализ численного решения системы уравнений (3.16), (3.17) показал, что при $\bar{t} \to \infty$ оно асимптотически приближается к решению (3.9), (3.10), если только $\lim\limits_{\bar{t}\to\infty} \int\limits_0^{\bar{t}} q(\tau)\,d\tau = \infty$.

Из рис. 9 видно, что при малых начальных углах контакта максимальное контактное давление быстро падает по мере износа. Так, например, при $\varphi_0(0) = 10°$ и возрастании φ_0 до 20° давление p_{max} падает более чем в 2 раза, в то время как максимальный износ за это время, как это видно из рис. 9, не превышает 0,025 Δ. Отсюда следует, что при наличии износа контактирующих поверхностей решение контактной задачи может существенно меняться за время выработки незначительного износа, если область контакта из-за износа растет.

3.2. Расчет на износ сферических подшипников скольжения

В технических устройствах широко используются сферические подшипники скольжения, которые несут как радиальную, так и осевую нагрузку. Схема такого подшипника приведена на рис. 10. Сформулируем контактную задачу с учетом износа для такого подшипника. При этом будем считать, что износом внутренней сферы можно пренебречь по сравнению с износом вкладыша, а в упругие перемещения основной вклад вносит тонкий вкладыш с малым модулем упругости. Принимаем, что интенсивность изнашивания тонкого вкладыша зависит от контактного давления по степенному закону. Из уравнений теории упругости следует, что в первом приближении по ε_0/R_1 (ε_0 — толщина вкладыша) упругое перемещение точек внутренней поверхности тонкого сферического вкладыша, внешняя поверхность которого не деформируется, $v = (1 + \nu)(1 - 2\nu)\varepsilon_0 p/(1 - \nu)E$.

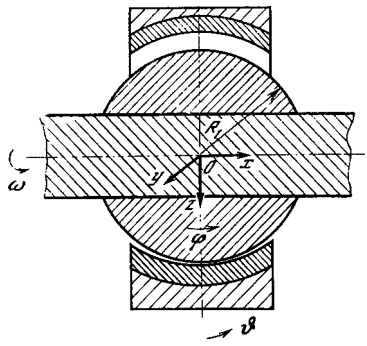


Рис. 10. Схема сферического подшипника скольжения

Условие контакта тел, а также уравнение для износа и уравнение равновесия в сферической системе координат $Or\vartheta\varphi$ имеют вид

$$\Delta + i + [(1 + \nu)(1 - 2\nu)/(1 - \nu)E](\varepsilon_0 - i)p = \delta\cos\vartheta,$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0, \tag{3.18}$$

$$\partial i/\partial t = \omega(R_1 - i_1)f(p/\sigma)^m(\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta)^{1/2}, \tag{3.19}$$

$$R_1^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\vartheta_0} p(\vartheta, \varphi, t)\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta = q(t), \tag{3.20}$$

где ϑ_0 — угловая координата границы области контакта. Переходя в (3.18)—(3.20) к безразмерным переменным по формулам $\bar{p} = pR_1^2/q(0)$, $\bar{q}(t) = q(t)/q(0)$, $I = i/\Delta$, $\bar{t} = (\omega R_1/\Delta)ft[q(0)/R_1^2\sigma]^m$, получаем

$$1 + \beta(1 - \beta_1 I)\bar{p} + I = \chi\cos\vartheta, \tag{3.21}$$

$$\partial I/\partial\bar{t} = (\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta)^{1/2}\bar{p}^m, \tag{3.22}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\vartheta_0}\bar{p}(\vartheta, \varphi, \bar{t})\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta = \bar{q}(\bar{t}), \tag{3.23}$$

где

$$\beta = \frac{\varepsilon_0}{\Delta}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}\frac{q(0)}{ER_1^2};\quad \beta_1 = \frac{\Delta}{\varepsilon_0}.$$

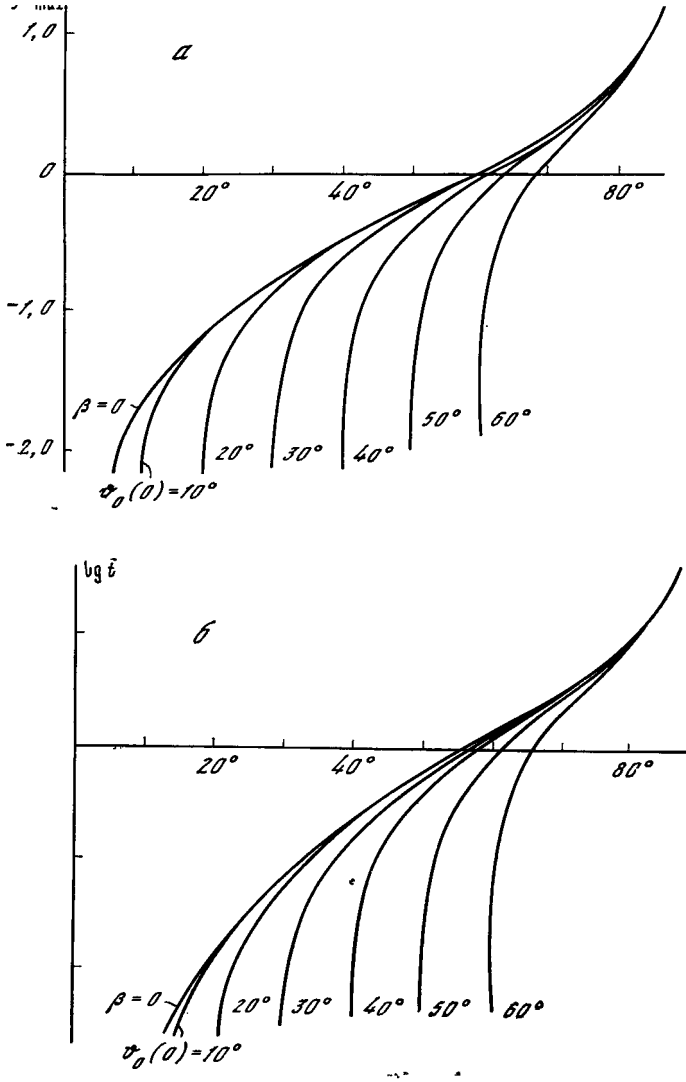


Рис. 11.7 Зависимость максимального износа I_{max}, параметра $\bar{t}$ и максимального контактного давления $\bar{p}_{max}$ от угла контакта ϑ_0 при различных значениях ϑ_0 (0)

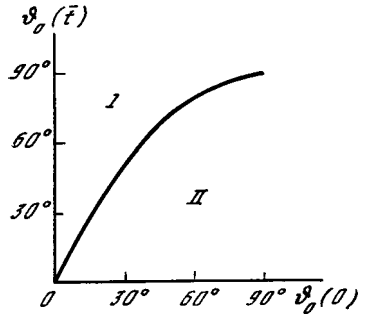


Рис. 12. Разделение плоскости переменных ($\vartheta_0(0)$, $\vartheta_0(\bar{t})$) на две части

В области I для определения максимального износа $I_{\max}$ формула (3.27) дает высокую точность

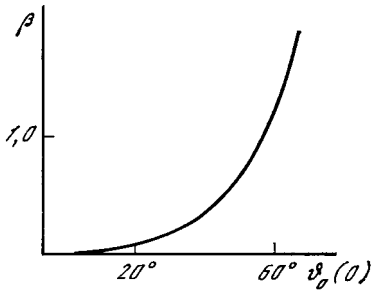


Рис. 13. Зависимость коэффициента нагруженности β от $\vartheta_0(0)$

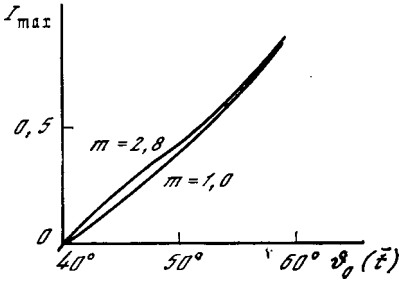


Рис. 14. Зависимость максимального износа $I_{\max}$ от $\vartheta_0(\bar{t})$ при различных значениях $\vartheta_0(0)$

Задача (3.21) — (3.23) должна решаться при условиях

$$I(\vartheta, \varphi, 0) = 0,\ \bar{p}(\vartheta_0, \varphi, \bar{t}) = 0,\ I(\vartheta_0, \varphi, \bar{t}) = 0 \text{ при } \bar{t} > 0. \quad (3.24)$$

При $\beta = 0$ (контакт жестких тел) решение системы уравнений (3.21)—(3.24) имеет вид

$$\int_0^{\vartheta_0} \frac{\sin\tau}{\cos^3\tau} [J(\tau)]^m d\tau = \int_0^{\bar{t}} [\bar{q}(\tau)]^m d\tau, \quad (3.25)$$

$$\bar{p}(\vartheta, \varphi, \bar{t}) = \frac{\cos^{1/m}\vartheta}{(\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta)^{1/2m}} \frac{\bar{q}(\bar{t})}{J[\vartheta_0(\bar{t})]}, \quad (3.26)$$

$$I = \cos\vartheta/\cos\vartheta_0 - 1, \quad (3.27)$$

где

$$J(x) = \int_0^x \left[\int_0^{2\pi} \frac{\cos^{\frac{m+1}{m}}\vartheta \sin\vartheta}{(\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta)^{1/2m}} d\varphi \right] d\vartheta.$$

При $\beta \neq 0$ задача (3.21)—(3.24) решалась численно. На рис. 11 приведены зависимости $I_{\max}(\vartheta_0) = I(0, 0, \bar{t}(\vartheta_0))$, $\bar{t}(\vartheta_0)$ и $\bar{p}_{\max}(\vartheta_0)$, полученные при $m = 1$, $\bar{q} = 1$, $\beta_1 = 0$. При $\bar{t} \to \infty$ решение задачи (3.21)—(3.24) при $\beta > 0$ асимптотически приближается к решению (3.25)—(3.27), если только $\lim\limits_{\bar{t}\to\infty} \int\limits_0^{\bar{t}} \bar{q}(\tau)\, d\tau = \infty$.

Из рис. 11 видно, что максимальное контактное давление по мере износа может падать в несколько раз.

На рис. 12 на плоскости ($\vartheta_0(0)$, $\vartheta_0(\bar{t})$) проведена кривая, делящая область $0 \leqslant \vartheta_0(0) \leqslant \pi/2$, $\vartheta_0(0) \leqslant \vartheta_0(\bar{t}) < \pi/2$ на две части. При значениях $\vartheta_0(0)$ и $\vartheta_0(\bar{t})$, которым соответствуют точки, лежащие выше этой кривой, для расчета максимального износа тонкого упругого вкладыша можно использовать формулу (3.27), и при этом погрешность вычисления $I_{\max}$ не будет превышать 5%. Из (3.23) и (3.26) следует

$$\beta = (\pi/3)\,[2/\cos\vartheta_0(0) - \sin^2\vartheta_0(0) - 2]. \qquad (3.28)$$

Отношение (3.28) связывает коэффициент нагруженности β и начальный угол контакта $\vartheta_0(0)$.

Зависимостей, приведенных на рис. 11, а также графика на рис. 13, построенного по формуле (3.28), достаточно, чтобы производить расчет сферического подшипника скольжения на износ или на долговечность при $m = 1$ и $\bar{q} = 1$. Так, например, для расчета $\bar{t}$ по заданным $I_{\max}$ и β необходимо по рис. 13 определить $\vartheta_0(0)$, затем по зависимости $I_{\max}$ от $\vartheta_0(\bar{t})$ (см. рис. 11) определить $\vartheta_0(\bar{t})$, после чего по кривой $\bar{t}(\vartheta_0)$ на рис. 11 определить $\bar{t}$.

В заключение отметим, что зависимость $I_{\max}(\vartheta_0(\bar{t}))$ слабо изменяется с изменением m. Это следует из рис. 14, на котором приведены зависимости $I_{\max}(\vartheta_0(\bar{t}))$ при $\bar{q} = 1$, $\vartheta_0(0) = 40^\circ$ и двух значениях m: $m = 1$ и $m = 2{,}8$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А.* Шероховатость поверхности. Теоретико-вероятностный подход. М.: Наука, 1975. 344 с.
2. *Рудзит Я. А.* Микрогеометрия и контактное взаимодействие поверхностей. Рига: Зинатне, 1975. 210 с.
3. *Лукьянов В. С., Рудзит Я. А.* Параметры шероховатости поверхности. М.: Изд-во стандартов, 1979. 162 с.
4. *Рудзит Я. А., Кризберг Ю. Я.* Расчет вероятностных характеристик микротопографических параметров шероховатых поверхностей, используемых в задачах трения и износа.— Трение и износ, 1982, т. 3, № 6, с. 1048—1057.
5. *Одитис И. А., Рудзит Я. А.* О выборе типа корреляционной функции при исследовании перегулярной шероховатости.— В кн.: Микрогеометрия в инженерных задачах. Рига: Зинатне, 1973, с. 5—12.
6. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
7. *Галахов М. А., Гусятников П. Б.* Математические методы контактной гидродинамики: [Учеб. пособие]. М.: МФТИ, 1981. 95 с.
8. *Коровчинский М. В.* О некоторых задачах эластореологии, имеющих приложение в теории трения.— В кн.: Трение и износ в машинах. М., 1962, № 15, с. 121—164.
9. *Dowson D. A.* Generalized Reynolds equation for fluid film lubrication.— Intern. J. Mech. Sci., 1962. vol. 4, p. 159—170.
10. *Коровчинский М. В.* Теоретические основы работы подшипников скольжения. М.: Машгиз, 1959. 401 с.
11. *Эртель М. А.* Гидродинамический расчет смазки контакта кривых поверхностей (зубчатые зацепления, подшипники качения, особотяжелонагруженные подшипники скольжения и т. д.). М.: Изд-во ЦНИИТМАШ, 1945. 64 с.

12. *Грубин А. Н.* Основы гидродинамической теории смазки тяжелонагруженных цилиндрических поверхностей.— Тр. ЦНИИТМАШ, 1949, вып. 30, с. 126—184.
13. *Петрусевич А. И.* Основные выводы из контактно-гидродинамической теории смазки.— Изв. АН СССР. ОТН, 1951, № 2, с. 175—191.
14. *Dowson D., Higginson G. R.* Elastohydrodynamic lubrication. N. Y.; L.: Pergamon press, 1965. 235 p.
15. *Ченг Х. С.* Численное определение толщины упругогидродинамической пленки при эллиптическом контакте.— Проблемы трения и смазки, 1970, т. 92, № 1, с. 178—183.
16. *Галахов М. А.* Физико-математические основы упругогидродинамической теории смазки: Препр. Ин-та проблем механики АН СССР № 94. М., 1977. 64 с.
17. *Галахов М. А., Ковалев В. П.* Определение толщины пленки в тяжелонагруженном упругогидродинамическом контакте цилиндров.— В кн.: Тр. 22-й научной конференции МФТИ. М., 1976, с. 213—217.
18. *Галахов М. А., Заппаров К. И., Терентьев Е. Д.* Распределение давления и форма зазора в одномерном упругогидродинамическом контакте.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 5, с. 144—151.
19. *Галахов М. А., Ковалев В. П., Лапин Ю. А., Терентьев Е. Д.* Прикладные задачи теории смазки и механики контакта: Препр. Вычисл. центра АН СССР. М., 1982. 66 с.
20. *Галахов М. А., Терентьев Е. Д., Патраков А. Г.* Упругогидродинамический контакт и толщина пленки при недостаточной смазке.— Машиноведение, 1977, № 4, с. 116—121.
21. *Галахов М. А., Заппаров К. И.* Распределение давления в упругогидродинамическом контакте цилиндров.— Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 1, с. 54—57.
22. *Широбоков В. В., Усов П. П.* Толщина масляной пленки в упругогидродинамическом контакте цилиндров с учетом тепловых явлений.— Машиноведение, 1978, № 4, с. 92—96.
23. *Широбоков В. В., Дроздов Ю. Н.* Толщина смазочного слоя при качении со скольжением тел с учетом тепловых процессов.— Машиноведение, 1979, № 4, с. 90—93.
24. *Коровчинский М. В., Усов П. П.* Плоская задача гидродинамической теории смазки при деформируемости поверхностей, ограничивающих смазочный слой.— Трение и износ, 1981, № 3, с. 393—404.
25. *Усов П. П., Тодер И. А., Кренделев Е. С.* Плоская неизотермическая задача гидродинамической теории смазки подшипников скольжения при деформируемости поверхностей, ограничивающих смазочный слой.— Трение и износ, 1982, № 1, с. 64—75.
26. *Галахов М. А., Терентьев Е. Д., Усов П. П.* Методы расчета подшипников скольжения: Препр. Вычисл. центра АН СССР. М., 1984. 56 с.
27. *Галахов М. А., Карпов В. Я.* Математические модели теории смазки упругих цилиндров: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 176. М., 1979. 30 с.
28. *Усов П. П., Тодер И. А., Кренделев Е. С.* Математическое моделирование опор жидкостного трения.— Машиноведение, № 5, 1980, с. 81—88.
29. *Усов П. П., Тодер И. А., Кренделев Е. С., Тарабаев Г. И.* Математическое моделирование гидростатодинамической опоры скольжения.— В сб.: Теория и практика расчетов деталей машин на износ. М.: Наука, 1983. 180 с.
30. *Болибрух А. А., Галахов М. А., Ковалев В. П.* Математические основы трибоники: [Учеб. пособие]. М.; МФТИ, 1983. 88 с.
31. *Болдырев Ю. Я., Григорьев Б. С.* Численное решение уравнения Рейнольдса газовой смазки с помощью метода конечных элементов.— Машиноведение, 1982, № 5, с. 78—84.
32. *Элрод Х.* Общая теория ламинарной смазки при наличии рейнольдсовой шероховатости.— Пробл. трения и смазки, 1979, т. 101, № 1, с. 8—16.
33. *Тондер К.* Смазка поверхностей с двухмерной изотропной шероховатостью.— Пробл. трения и смазки, 1977, т. 99, № 3, с. 12—22.
34. *Кристенсен Х., Тондер К.* Гидродинамическая смазка подшипника конечной

ширины с шероховатыми поверхностями.— Пробл. трения и смазки, 1971, т. 93, № 3, с. 9—16.
35. *Патир Р., Чжен Г.* Модель усредненного течения для определения влияния трехмерной шероховатости на частичную гидродинамическую смазку.— Пробл. трения и смазки, 1978, т. 100, № 1, с. 10—15.
36. *Усов П. П.* Гидродинамическая смазка подшипника при наличии шероховатости.— Трение и износ, 1983, т. 4, № 6, с. 1025—1037.
37. *Усов П. П.* Теоретическое исследование влияния шероховатости поверхности на несущую способность слоя смазки.— Машиноведение, 1984, № 1, с. 92—100.
38. *Крагельский И. В.* Трение и износ. М.: Машиностроение, 1968. 480 с.
39. *Галахов М. А., Усов П. П.* О расчете износа и толщины смазочного слоя в подшипниках скольжения с тонким вкладышем.— Трение и износ, 1984, № 2, с. 239—250.
40. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости.— М.: Наука, 1973. 304 с.
41. *Усов П. П., Дроздов Ю. Н., Николашев Ю. Н.* Теоретическое исследование напряженного состояния пары вал—втулка с учетом износа.— Машиноведение, 1979, № 2, с. 80—87.

УДК 532.59

НЕЛИНЕЙНАЯ БИОФИЗИКА

А. С. Давыдов

1. Введение

Широкое внедрение физических и математических методов исследований в биологию позволило изучать биологические явления на молекулярном уровне. Каждый живой организм является сложной гетерогенной системой, состоящей из молекул, находящихся в неравновесном состоянии. Жизнедеятельность неразрывно связана с расходованием энергии и непрерывным обменом веществ.

Хотя живые организмы, так же как и объекты неживой природы, состоят из молекул, они обладают рядом своеобразных особенностей, одной из которых является необычная сложность молекул, входящих в состав живых организмов. Помимо главных химических связей, определяющих основную структуру биологических молекул, жизненные явления обусловлены слабыми короткодействующими и дальнодействующими силами: вандерваальсовыми силами, водородными связями, гидрофобными, гидрофильными и резонансными взаимодействиями.

Основная задача теоретического описания биологических явлений состоит в установлении связи между их строением и биологическими функциями. Молекулярные массы биологических молекул, входящих в состав клеток, варьируют от нескольких десятков тысяч до нескольких десятков миллионов. Их громадное многообразие определяется многочисленными комбинациями одних и тех же соединений и атомных групп. Все белки строятся из 20 различных аминокислот, а нуклеиновые кислоты, входящие в состав наследственного аппарата,— из четырех нуклеотидов.

Известно, что по мере усложнения атомных систем появляются новые качества. Понятия температуры, энтропии, звуковых волн и других элементарных коллективных возбуждений применимы к системе атомов, но неприменимы к одному атому. Таким же образом и макромолекулы живых организмов обладают рядом свойств, присущих всей молекуле в целом и обеспечивающих их функционирование. Ряд этих свойств относится к кооперативным явлениям, при которых некоторое изменение, возникшее в одном месте сложной молекулярной структуры, передается другому месту, удаленному от первого на значительное расстояние по сравнению с атомными размерами, и вызывает в нем конфигурационные изменения, химические реакции и т. д. Вопрос о механизме таких кооперативных явлений тесно связан с вопросом о миграции электронов, протонов и вибрационных энергетических возбуждений в сложных молекулярных си-

стемах. В предлагаемой статье рассматриваются некоторые проблемы биоэнергетики на молекулярном уровне.

В разд. 2 дается общее описание возбуждений в нелинейных и квазиодномерных системах, описываемых уединенными волнами — солитонами. Перенос энергии внутрипептидного возбуждения по белковым спиральным молекулам исследуется в разд. 3. Показано, что солитоны являются идеальными носителями энергии и информации. В разд. 4 дается в континуальном приближении математическое обоснование наличия солитонных возбуждений в спиральных молекулах. Вычислена энергия и эффективная масса солитонов. В разд. 5 излагаются результаты численных исследований на ЭВМ солитонов в дискретных моделях с учетом условий возбуждения и концевых эффектов. В разд. 6 на основе представления о солитонах обсуждается новая модель мышечного сокращения на молекулярном уровне. В разд. 7 обсуждаются возможные проявления солитонов в различных метаболических процессах, происходящих в клетках: поглощение электромагнитных волн миллиметрового диапазона при преобразовании солитонов в экситоны; особенности рассеяния лазерного излучения метаболически активными клетками. В разд. 8 исследуется перенос электронов через спиральные белковые молекулы в виде солитонов. В разд. 9 выясняется вопрос о возможности спаривания электросолитонов в мягких полипептидах. В разд. 10 на основе периодических решений нелинейных уравнений предлагается новый механизм квазисверхпроводимости в одномерных молекулярных цепочках, способных удерживать лишние электроны. Наконец, в разд. 11 обсуждается вопрос о возможной роли солитонов в переносе энергии и информации внутри клетки (внутриклеточная динамика) и между внешней и внутренней областями клетки.

2. Элементарные возбуждения и уединенные волны

В течение многих лет для математического описания большинства явлений в физике, химии и биологии использовались линейные дифференциальные уравнения. Такие уравнения характеризуют лишь линейный отклик системы на внешнее возмущение. В этом случае при возрастании интенсивности воздействия в N раз, во столько же раз возрастает и эффект воздействия.

В основе классических дифференциальных уравнений механики (уравнения Ньютона), электродинамики (уравнения Максвелла), квантовой теории (уравнения Шредингера) лежал принцип суперпозиции, который позволял любое возбужденное состояние рассматривать в виде суммы элементарных возбуждений. Например, белый свет можно рассматривать как совокупность монохроматических составляющих (красный, желтый, синий, фиолетовый и т. д.).

На основе линейных дифференциальных уравнений удалось объяснить многие свойства систем, состоящих из большого числа взаимодействующих молекул и атомов. Особенно плодотворным оказалось введение понятия коллективных элементарных возбуждений, харак-

теризующих когерентное движение многих частиц в системе. К таким элементарным когерентным возбуждениям относится звуковая волна в газе и жидкости, характеризуемая определенными частотой и длиной волны.

В твердых телах широко используются понятия элементарных возбуждений разного типа: *фононы* — кванты коллективных колебаний атомов относительно их равновесных положений; *экситоны* — кванты коллективных электронных возбуждений; *магноны* — кванты магнитных (спиновых) возбуждений.

Все элементарные возбуждения описываются монохроматическими волнами, характеризующимися определенными частотой и длиной волны. Строго монохроматическая волна имеет бесконечную протяженность, поэтому она не может переносить энергию и информацию. Только перемещающиеся локализованные возбуждения переносят энергию. Такие локализованные возбуждения в линейных средах образуются в результате наложения (суперпозиции) многих монохроматических волн разной частоты и длины волны. Эти суммарные образования называют *волновыми пакетами*.

Во многих средах скорость монохроматических волн (перемещение постоянного значения фазы) зависит от длины волны. Такие среды называются *диспергирующими*. При перемещении волнового пакета в этой среде его пространственная протяженность увеличивается, так как составляющие волнового пакета — монохроматические волны — перемещаются с разной скоростью. Говорят, что с течением времени волновой пакет «расползается». Это одна из причин, затрудняющих перенос энергии и информации на большие расстояния волновыми пакетами. Второе важное затруднение связано с быстрым торможением волновых пакетов, обусловленным преобразованием их энергии в энергию теплового движения (диссипация).

В последние годы было установлено, что идеальным способом переноса энергии и информации через протяженные нелинейные системы является использование возбуждений в виде уединенных волн — *солитонов*. В отличие от обычных волн, характеризуемых периодичным пространственным повторением возвышений и углублений на поверхности воды, или уплотнений и разряжений, или отклонений от среднего значения некоторых физических величин, уединенные волны (солитоны) представляют собой локализованные (колоколообразной формы) возбуждения, перемещающиеся с постоянной скоростью без изменения формы.

Первое качественное описание уединенных волн на поверхности неглубокого канала было дано в 1844 г. морским инженером Джоном Скоттом-Расселом. Наблюдая за движением баржи, которую с большой скоростью тянула по каналу Эдинбург—Глазго (Шотландия) пара лошадей, он обратил внимание на то, что при резкой остановке баржи от нее отделилась некоторая часть воды. «Неистово бурля, она начала собираться около носовой части баржи, а затем внезапно оторвалась от нее и с большой скоростью побежала вперед, образовав форму уединенного гладкого возвышения, которое продолжало передвижение вдоль канала без изменения формы и ско-

рости»,— так описал это явление Скотт-Рассел. Весьма важно, что Скотт-Рессел сразу же отметил особенность такой волны — ее самоорганизацию и перемещение без заметного изменения формы и скорости.

Долгое время это явление не привлекало внимания ученых. Только через 50 лет, в 1885 г., Кортевегом и де Фрисом было дано математическое описание уединенных волн на мелкой воде с помощью нелинейного дифференциального уравнения, которое теперь носит краткое название «уравнение КдФ» [1]. Это уравнение для одномерной системы в континуальном приближении записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u = u(x, t). \tag{2.1}$$

Простейшее решение этого уравнения имеет вид колоколообразного возбуждения

$$u(x, t) = 3v \operatorname{sech}^2 [\sqrt{v}(x - vt)/2], \tag{2.2}$$

перемещающегося со скоростью v.

Сохраняющаяся форма перемещающегося возбуждения (2.2) определяется взаимной компенсацией эффекта нелинейности, обусловленного вторым слагаемым уравнения (2.1), и эффекта дисперсии, обусловленного третьим слагаемым. В самом деле, при отсутствии нелинейности уравнение

$$\partial u/\partial t + \partial^3 u/\partial x^3 = 0 \tag{2.3}$$

имеет решение в виде плоской волны

$$u(x, t) = A \exp [i(kx - \omega t)], \quad \omega = k^3, \tag{2.4}$$

распространяющейся с фазовой скоростью

$$v_\Phi = \omega/k = k^2, \quad k = 2\pi/\lambda. \tag{2.5}$$

Поскольку фазовая скорость обратно пропорциональна квадрату длины волны λ, то волновой пакет, составленный из плоских волн (2.4), будет «расползаться».

Если в уравнении (2.1) сохранить только нелинейное слагаемое, т. е. положить

$$\partial u/\partial t + u\,\partial u/\partial x = 0,$$

то его решение будет изображаться произвольной гладкой функцией f от аргумента $(x - ut)$, т. е.

$$u(x, t) = f(x - ut). \tag{2.6}$$

Следовательно, первоначальное возбуждение $u(x, 0) = u_0(x)$ с течением времени меняет свою форму так, что участки, соответствующие большим смещениям $u_0(x)$ (вершина волны), опережают участки с меньшими смещениями — происходит опрокидывание волны.

Взаимная компенсация эффекта нелинейности и дисперсии в уравнении (2.1) приводит к устойчивой *уединенной волне* (2.2). Стро-

гое доказательство возможности образований уединенных волн на поверхности жидкости конечной глубины было дано советским ученым М. А. Лаврентьевым.

Долгое время ученые не проявляли большого интереса к уединенным волнам. Интерес к ним возобновился к концу 50-х годов нашего столетия в связи со значительными успехами исследований физических процессов в плазме, направленных на решение проблемы термоядерного синтеза. В 1958 г. советский физик Р. З. Сагдеев показал, что в плазме могут распространяться уединенные волны, аналогичные волнам на поверхности жидкости.

Учет нелинейных эффектов в реальных системах связан с большими математическими трудностями. Влияние малой нелинейности обычно исследовалось методами теории возмущений. Так, например, в линейной (гармонической) теории колебаний атомов относительно равновесных положений в решетке твердого тела возбужденные состояния описывались системой невзаимодействующих фононов (плоские волны). При учете малой нелинейности (ангармонизм) между фононами возникало взаимодействие, приводящее к обмену энергией между ними и установлению термодинамического равновесия (термолизация), переносу тепла и т. д.

Однако в сильно нелинейных системах — сегнетоэлектрики, подверженные фазовым переходам, сопровождаемым смещениями равновесных положений атомов; ударные волны и турбулентность в жидких средах; взаимодействие мощного лазерного излучения с веществом; процессы теплопередачи с изменением состояния объекта и др.— учет нелинейности методами теории возмущений недопустим.

Хотя математическое изучение нелинейных сред началось еще в опубликованной в 1860 г. классической работе Римана о распространении нелинейных волн, значительный прогресс в исследовании нелинейных систем наметился только через столетие. Этот прогресс был обусловлен проведением исследований методами численных расчетов на основе использований мощных электронно-вычислительных машин (ЭВМ).

Создание ЭВМ с производительностью миллионов и десятков миллионов операций с действительными числами в секунду позволило колоссально расширить возможность практического использования методов описания различных нелинейных явлений на основе математических моделей, отражающих основные их закономерности.

Сочетание аналитических и численных методов исследования привело к созданию *синергетического приближения* [2] к решению математических и физических проблем, при котором традиционные аналитические методы сочетаются с использованием численных расчетов на ЭВМ.

Всякое научное исследование связано с идеализацией, упрощением изучаемого явления. В результате такой идеализации создается математическая модель. Численное исследование таких моделей позволяет весьма глубоко понять особенности соответствующих явлений. Этот новый метод получил, по предложению А. А. Самарского, название «*вычислительный эксперимент*» [3]. Использование мощных

ЭВМ позволяет все более усложнять модель и получать методом вычислительного эксперимента результаты, значительно полнее отражающие свойства объекта, и в некоторых случаях предсказывать новые явления.

Роль вычислительного эксперимента особенно велика при исследовании нелинейных явлений. Большая эффективность использования ЭВМ для анализа нелинейных явлений, по-видимому, впервые была продемонстрирована в работе Энрико Ферми, Джона Паста и Станислава Улама [4], выполненной в 1955 г. с помощью машин ЭВМ Лос-Аламосской научной лабораторией (США).

Они решили получить количественное описание процесса термолизации первоначального длинноволнового возбуждения небольшого числа степеней свободы в одномерной цепочке одинаковых частиц, связанных нелинейными пружинами. Согласно общепринятому мнению, высказанному еще Дебаем в 1914 г., ожидалось, что вследствие нелинейного взаимодействия между частицами сообщенная системе энергия равномерно распределится по всем, в частности и коротковолновым, степеням свободы такой цепочки, т. е. установится тепловое равновесие. К удивлению авторов, оказалось, что термолизация не происходит. Цепочка через некоторое время возвращается в начальное состояние возбуждения. Так возникла «проблема Ферми—Паста—Улама», изменившая традиционные представления ученых.

Исключительно интересные свойства уединенных волн, описываемых уравнением КдФ (2.1), были найдены также при численных расчетах на ЭВМ, выполненных М. Д. Крускалом и Н. Дж. Забуски в 1965 г. [5]. Согласно выражению (2.2) скорость уединенной волны, описываемой уравнением КдФ, пропорциональна амплитуде волны. Уединенные волны с большей амплитудой обгоняют волны, имеющие меньшую амплитуду. Исследуя такое столкновение, приводящее к прохождению одной волны через другую, Крускал и Забуски обнаружили, что после «столкновения» их скорость и форма не изменяются, т. е. они ведут себя как частицы, сохраняя свою индивидуальность. Учитывая такое частицеподобное поведение, Крускал и Забуски предложили называть такие возбуждения *солитонами*. Исключительная стабильность солитонов обусловлена взаимной компенсацией эффектов дисперсии и нелинейности.

Решения нелинейных уравнений в виде уединенных волн — солитонов возникают во многих задачах физики плазмы, квантовой теории поля, физики твердого тела, гидродинамики. Первый пример локализованного самозахваченного состояния электрона в ионном кристалле был указан Л. Д. Ландау в 1933 г. [6]. Это состояние подробно изучалось С. И. Пекаром [7, 8] и другими учеными и было названо *поляроном*. Оно обусловливалось дальнодействующим взаимодействием электрона с инерционной поляризацией кристалла. В этих работах по теории возмущений рассмотрено только медленное движение полярона.

Возбуждения в виде уединенных волн наряду с обычными протяженными волнами присущи многим нелинейным и диспергирующим

динамическим системам. Однако аналитическое и численное описание на ЭВМ хорошо разработано только для одномерных и квазиодномерных систем.

Кроме уравнения КдФ, известно много других уравнений, решения которых вследствие взаимной компенсации эффектов нелинейности и дисперсии имеют вид устойчивых уединенных волн — солитонов. Так, например, для описания магнитозвуковых и ионно-звуковых уединенных волн в плазме используется нелинейное уравнение Шредингера

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+G|\psi(x,t)|^2\right)\psi(x,t)=0, \tag{2.7}$$

в котором G — параметр нелинейности; $\hbar^2/2m$ — параметр, характеризующий дисперсию; значение m соответствует эффективной массе квазичастицы. При постоянном значении G уравнение (2.7) описывает безынерционное комплексное поле с самовоздействием. Значение $|\psi(x,t)|^2$ характеризует плотность вероятности найти частицу массы m в точке x в момент t. При наличии одной частицы в системе поле $\psi(x,t)$ нормируется условием

$$\int|\psi(x,t)|^2\,dx=1. \tag{2.8}$$

Некоторые задачи теории сверхпроводимости, ферромагнетизма, движения дислокаций в твердом теле, прохождение электронов через диэлектрический слой, разделяющий два сверхпроводника (эффект Джозефсона и др.), описываются синусоидальным уравнением Гордона

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(x,t)=\sin\varphi(x,t), \tag{2.9}$$

где $\varphi(x,t)$ — вещественная разность фаз волновых функций электрона в двух соприкасающихся через тонкий диэлектрический слой сверхпроводниках или относительное смещение атомов решетки при движении дислокации в твердом теле, угол поворота магнитного момента и т. д.

Кроме упомянутых выше нелинейных уравнений (2.1), (2.7), (2.9), известно много других нелинейных уравнений, содержащих дисперсию, решения которых вследствие уравновешивания эффектов нелинейности и дисперсии имеют вид устойчивых уединенных волн. Образование уединенной волны в непрерывной или дискретной периодической системе связано со спонтанным нарушением локальной симметрии, т. е. автолокализацией энергии возбуждения, плотности электрического заряда, магнитного момента или других физических величин.

Как уже указывалось выше, исследования нелинейных уравнений нельзя проводить, прибегая к процедуре линеаризации с последующим учетом даже малой нелинейности по теории возмущений, основанной на разложении по нормальным линейным модам, ибо эти уравнения могут приводить к существенно нелинейным возбуждениям, которые нельзя получить ни в каком конечном порядке теории

возмущений. Такие нелинейные образования столь же фундаментальны, как квазичастицы линейных теорий. Они дают важную информацию о свойствах соответствующих сред и играют большую роль в переносе энергии, заряда, магнитного момента, структурных переходах и т. д.

В одномерном случае нелинейные уравнения (2.1), (2.7) и (2.9) обладают бесконечным числом законов сохранения и допускают точные решения с помощью так называемого метода обратной задачи рассеяния для вспомогательного линейного оператора. Этот метод впервые разработали М. Миура, Ц. Гарднер, М. Крускал [9]. Систематическому изложению метода обратной задачи рассеяния посвящена монография В. Е. Захарова и др. [10].

В математической литературе принято называть солитонами только локализованные решения точно интегрируемых одномерных систем. Локализованные решения, описываемые не вполне интегрируемыми нелинейными уравнениями, принято называть уединенными волнами. При описании реальных систем нельзя ограничиться исследованием только полностью интегрируемых уравнений. Последние описывают лишь весьма идеализированные системы. Они не учитывают явлений, связанных с наличием границ и других степеней свободы, диссипации и малых возмущений со стороны окружающих систем. Решение таких усложненных задач неизбежно связано с использованием численных методов на основе ЭВМ. Особенно успешно такие исследования проводятся в том случае, когда они сочетаются с аналитическими методами.

Большинство решений нелинейных уравнений солитонного типа, полученных в настоящее время, относятся к одномерным и квазиодномерным системам. В реальных системах одномерность может проявляться (локально) в полимерах и макромолекулах типа белков, входящих в состав живых организмов. Поэтому можно думать, что именно в биологических объектах роль нелинейных процессов будет велика даже при малых интенсивностях возбуждения. Их исследование возможно только при использовании методологии вычислительного эксперимента с учетом аналитических результатов, полученных в теории твердого тела при исследовании свойств систем взаимодействующих частиц, и созданных на этой базе математических моделей. По-видимому, проведение таких исследований составит основное содержание работ в современной теоретической биофизике. Как отметил Г. М. Франк [11], «биофизика как область познания призвана решать биологические задачи при помощи имеющихся физических методов, физического анализа явлений и математических приемов».

В следующих разделах этой статьи мы рассмотрим примеры аналитических и численных методов исследования некоторых вопросов биоэнергетики, являющейся составной частью биофизики. Будут рассмотрены нелинейные возбуждения, возникающие в полимерах и макромолекулах, переносящие энергию и электроны.

3. Перенос энергии вдоль спиральных белковых молекул

Начиная с 1973 г. в Институте теоретической физики АН УССР проводились исследования, которые показали, что процессы эффективного переноса электронов и вибрационных возбуждений вдоль белковых молекул осуществляются солитонами. Аналитические исследования ученых ИТФ АН УССР были значительно дополнены численными расчетами на ЭВМ, выполненными в Лос-Аламосской научно-исследовательской лаборатории и Эдинбургском университете (Шотландия). В этом и последующих разделах излагаются основные результаты этих исследований.

Все основные проявления жизни связаны с громадными полимерными молекулами — белками. При их участии осуществляются химические процессы в клетке. Они ответственны за клеточные и внутриклеточные движения. В комплексе с липидами клеточных и внутриклеточных мембран они осуществляют активный транспорт веществ в клетку и из нее. Практически вся биоэнергетика клетки (генерация, перенос и использование энергии) осуществляется белковыми молекулами.

Теперь установлено, что универсальной единицей энергии, используемой белковыми молекулами, является энергия гидролиза специальных молекул аденозинтрифосфата, синтезируемых в особых органеллах клетки (митохондриях) при окислении пищевых продуктов. Эти молекулы кратко обозначаются буквами АТФ. Молекула АТФ прикрепляется к некоторым местам белковой молекулы и, реагируя с водой (гидролиз) в присутствии катализаторов (ферментов), выделяет в нормальных физиологических условиях внутрь клетки около 0,5 эВ свободной энергии. Такая энергия только в 20 раз превышает среднюю энергию теплового движения.

Основная задача биоэнергетики сводится к установлению механизма эффективного использования энергии гидролиза молекул АТФ и ее транспорта вдоль белковых молекул, имеющих длину, равную десяткам и тысячам ангстрем (10^{-7}—10^{-5} см). Этот вопрос активно обсуждался участниками совещания Нью-Йоркской академии наук в 1973 г. Энергия гидролиза молекул АТФ недостаточна для возбуждения электронных состояний белковой молекулы (3—5 эВ). Поэтому в перемещении энергии гидролиза молекул АТФ должны играть основную роль вибрационные возбуждения некоторых групп атомов в белковой молекуле.

Для облегчения понимания дальнейшего отметим некоторые особенности строения белковой молекулы. Все белки, входящие в состав клеток живых организмов, образуются при затрате энергии (гидролиз молекул АТФ) и участии ферментов при полимеризации 20 различных *аминокислот*. Каждая аминокислота состоит из аминогруппы (NH_2) и карбоксильной группы (COOH), присоединенных к центральному атому углерода. К этому атому также присоединены атом водорода и группа атомов R, которыми одна аминокислота отличается от другой.

При полимеризации двух аминокислот выделяется молекула воды и между атомами N и H образуется химическая *пептидная связь*. Образовавшаяся группа атомов HNCO лежит в одной плоскости и называется пептидной группой (ПГ). При встрече димера с новыми аминокислотами процесс полимеризации продолжается — образуются длинные полимерные цепи, которые и называются белками. Специфичность белков определяется составом и последовательностью радикалов, присоединенных к атомам углерода, расположенных между периодически повторяющимися ПГ.

В результате вторичных взаимодействий (водородные, дисульфидные и вандерваальсовы связи) между атомами, входящими в состав первичной структуры белковой молекулы, и взаимодействий с окружающей цитоплазмой (гидрофильные и гидрофобные взаимодействия) белковая молекула в клетке приобретает пространственную конфигурацию, соответствующую данному белку. Наиболее существенны конфигурации в виде альфа-спирали, бета-слоев и глобулярные структуры, составленные из участков альфа-спиралей и бета-слоев.

Л. Полинг и Р. Б. Кори показали в 1953 г., что сворачивание пептидной цепи в спираль обусловлено тремя параллельными цепочками водородных связей между пептидными группами. Атомы водорода и радикалы, присоединенные к центральным атомам углерода, располагаются с наружной стороны спирали.

Многократно высказывалось предположение, что наибольшую роль в переносе энергии гидролиза молекул АТФ по альфа-спиральным белкам играют вибрационные колебания атомов C и O в ПГ. Эти колебания называются «Амид-I». Они имеют энергию около 0,21 эВ и сравнительно большой электрический дипольный момент перехода (около 0,3 дебая), направленный примерно вдоль оси спирали и обеспечивающий большое резонансное взаимодействие между ПГ, приводящее к коллективизации возбуждения. Колебания Амид-I являются наиболее сильными характеристическими колебаниями, обнаруживаемыми в спектрах поглощения белками инфракрасного излучения (1650—1660 $см^{-1}$).

Изолированные колебания Амид-I в конденсированных средах обладают малым временем жизни — около 10^{-12} с. Это время слишком мало, чтобы колебания Амид-I могли играть существенную роль в процессах запасания и переноса энергии. Поэтому многие биологи высказывали сомнение в возможности участия этих колебаний в переносе энергии вдоль белковых молекул. Так, например, в 1973 г. при обсуждении вопроса о переносе энергии в биологических системах на совещании Нью-Йоркской академии наук (см. [12]) некоторые участники говорили о «кризисе» в биоэнергетике, о необходимости установления априорным методом особых законов биоэнергетики.

В рамках линейного формализма эффективный энерготранспорт такого рода объяснить невозможно из-за существенной роли процессов диссипации и распределения возбуждения по большой области молекулы в течение малого времени.

В работах автора [13—17] показано, что кризис в биоэнергетике снимается, если учесть, что передача энергии гидролиза молекул

АТФ вдоль альфа-спиральных белковых молекул осуществляется нелинейными образованиями типа солитонов, движущимися без изменения формы и без потери энергии на излучение фононов.

В нелинейном подходе колебания Амид-I самосогласованным образом связаны со смещениями равновесных положений ПГ (локальное нарушение трансляционной симметрии). Возникающая локальная деформация играет роль потенциальной ямы, препятствующей расплыванию возбуждения. Такое самосогласованное сложное возбуждение движется как единое целое. Энергия солитона меньше суммы энергий деформации решетки и внутрипептидного колебания Амид-I. Простейшая математическая модель таких возбуждений излагается в следующем разделе.

Аналитические расчеты и идея переноса солитонами энергии Амид-I вдоль альфа-спиральных белковых молекул была подтверждена численными расчетами на ЭВМ Эльвином Скоттом, руководителем Центра нелинейных исследований Лос-Аламосской научно-исследовательской лаборатории США, и его сотрудниками. Он же ввел термин «давыдовские солитоны» [18—21]. Численные расчеты позволили исследовать возбуждения в дискретных конечных цепочках. Результаты этих исследований излагаются в разд. 5.

4. Возбужденные состояния цепочки пептидных групп в непрерывной модели

Как отмечалось во введении, математический анализ любых явлений следует начинать с простейших математических моделей, отражающих достаточно хорошо основные свойства явления. Последующее усложнение модели позволит объяснить дополнительные факты.

При исследовании переноса энергии гидролиза молекул АТФ вдоль альфа-спиральной молекулы в простейшей модели учитывается периодическое расположение ПГ вдоль одной цепи слабых водородных связей. Такая модель впервые исследовалась в работах Кислухи и автора [23—25] (см. также [16, 26]).

Возбужденные состояния бесконечной цепи ПГ, расположенных друг от друга на расстоянии a, соответствующие колебаниям Амид-I, описывались системой конечно-разностных дифференциальных уравнений

$$i\hbar \frac{da_n}{dt} = \left[\mathscr{E}_0 + W - \frac{1}{2}\chi(\beta_{n+1} - \beta_{n-1})\right]\varphi_n - J(\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}), \quad (4.1)$$

$$M\frac{d^2\beta_n}{dt^2} + \varkappa[2\beta_n - \beta_{n+1} - \beta_{n-1}] = \frac{1}{2}\chi\{|\varphi_{n+1}|^2 - |\varphi_{n-1}|^2\}, \quad (4.1')$$

где $J = 2d^2a^{-3}$ — энергия резонансного взаимодействия колебаний Амид-I; n — номер пептидной группы в цепи; $\varphi_n(t)$ — нормированная на единицу условием

$$\sum_n |\varphi_n(t)|^2 = 1 \quad (4.2)$$

функция, квадрат модуля которой определяет вероятность наличия колебания Амид-I в ПГ номера n; M — эффективная масса ПГ; β_n — смещение ее равновесного положения; параметр χ характеризует связь между колебаниями Амид-I и смещениями $\beta_n(t)$. Необходимо отметить, что в выражении (4.1) и в монографии автора [26] используется значение χ, которое отличается от значения χ_1, использованного в более ранних работах автора, в последующих работах Э.Скотта и других работах, простым соотношением

$$\chi = 2\chi_1. \tag{4.3}$$

Энергия деформации цепочки ПГ массы M при смещениях равновесных положений β_n определяется в гармоническом приближении (при коэффициенте упругости $\varkappa$) выражением

$$W = \frac{1}{2}\sum_n \left[\frac{1}{M}\left(\frac{\partial\beta_n}{\partial t}\right)^2 + \varkappa(\beta_n - \beta_{n-1})^2\right]. \tag{4.4}$$

Если возбуждение охватывает несколько ПГ, то можно перейти к длинноволновому приближению, положив

$$\varphi_n(t) \to \Phi(x, t)\exp[i(kx - Et/\hbar)],\quad ka \ll 1,$$

$$\beta_n(t) \to \beta(x, t),\quad na \to x. \tag{4.5}$$

Тогда гладкие вещественные функции $\Phi(x, t)$ и $\beta(x, t)$ будут удовлетворять системе уравнений в частных производных

$$\left[a^2 J\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \chi\rho(x, t) - \Lambda\right]\Phi(x, t) = 0,\quad \frac{1}{a}\int \Phi^2\, dx = 1, \tag{4.6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^2} - V_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\rho(x, t) + \frac{\chi}{\varkappa}V_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi^2 = 0. \tag{4.6'}$$

Здесь $V_0 = a\sqrt{\varkappa/M}$ — скорость продольного звука в цепочке. Полная энергия возбуждения E определяется через спектральный параметр Λ уравнения (4.6) и энергию деформации цепочки

$$W = \frac{1}{2a}\int\left[M\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2 + \varkappa\rho^2\right]dx, \tag{4.7}$$

выражением

$$E = \mathscr{E}_0 - 2J - \Lambda + W, \tag{4.8}$$

где $\rho(x, t)$ — функция, характеризующая уменьшение расстояния между соседними ПГ,

$$\rho(x, t) = -a\frac{\partial}{\partial x}\beta(x, t). \tag{4.9}$$

Вследствие трансляционной инвариантности бесконечной цепочки интегралом движения возбуждений будет скорость V. Исследуя возбуждения, распространяющиеся с постоянной скоростью V, можно перейти в движущуюся систему координат

$$\xi = x - x_0 - Vt. \tag{4.10}$$

Тогда, учитывая равенства

$$\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} = -V\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi},$$
$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -V\frac{d\rho(\xi)}{d\xi}, \quad \frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} = -V\frac{d\beta(\xi)}{d\xi} \tag{4.11}$$

при условии

$$\hbar V < 2aJ, \tag{4.12}$$

преобразуем систему уравнений (4.6)—(4.8) к виду

$$\left[a^2 J\frac{d^2}{d\xi^2} + \chi\rho(\xi)\right]\Phi(\xi) = \Lambda\Phi(\xi), \tag{4.13}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left[(1-s^2)\rho(\xi) - \frac{\chi}{\varkappa}\Phi^2(\xi)\right] = 0, \tag{4.14}$$

$$W = MV_0^2\,(2a^3)^{-1}\,(1+s^2)\int \rho^2(\xi)\,d\xi. \tag{4.15}$$

Значение $s < 1$ определяет отношение скорости распространения V возбуждения к скорости звука. Значение k, входящее в волновую функцию (4.5), связано со скоростью V соотношением

$$k = \hbar V/2a^2 J. \tag{4.16}$$

При выполнении неравенства (4.12) одновременно выполняется условие длинноволнового приближения

$$ka < 1. \tag{4.16'}$$

Из уравнения (4.14) при условии $\rho(\xi) = 0$, если $\Phi(\xi) = 0$, следует

$$\rho(\xi) = \chi\Phi^2(\xi)/\varkappa\,(1-s^2). \tag{4.17}$$

Поскольку $\rho(\xi)$ не может превышать расстояния a между ПГ, то значение s^2 должно быть меньше единицы. При $s^2 \to 1$ нарушается применимость гармонического приближения, использованного при написании выражения (4.4). В работе [26] теория распространена на случай учета ангармонизма. Там же приведены ссылки на оригинальные работы.

Подставив значение (4.17) в уравнение (4.13), получим нелинейное уравнение Шредингера для стационарных возбуждений, распространяющихся с постоянной скоростью V и энергией E, определяемой после вычисления Λ выражением (4.8):

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\xi^2} + G\Phi^2(\xi)\right]\Phi(\xi) = \Lambda\Phi(\xi), \tag{4.18}$$

где

$$m = \hbar^2/2a^2 J;\ G = \chi^2/\varkappa\,(1-s^2). \tag{4.19}$$

Уравнение (4.18) позволяет вычислить огибающую волновой функции (4.5) и спектральный параметр Λ. Оно описывает возбуждение, образованное взаимодействием внутрипептидных колебаний Амид-I

с инерционным полем смещения $\rho(\xi)$, поэтому параметр нелинейности G зависит от скорости перемещения возбуждения V. Этим оно существенно отличается от нелинейного уравнения Шредингера (2.7) с постоянным значением G, описывающим безынерционное поле с самовоздействием. При возрастании упругости цепочки ($\varkappa \to \infty$) параметр нелинейности $G \to 0$. В белковых молекулах малость $\varkappa$ обусловлена слабыми водородными связями между ПГ.

Если скорость коллективного возбуждения превышает скорость продольного звука ($s^2 > 1$), то деформация цепочки не успевает следовать за внутрипептидными возбуждениями. В этом случае параметр нелинейности G отрицателен и уравнение (4.18) не имеет стационарных решений, нормированных условием (4.6). В цепочке достаточно большой длины, когда можно не учитывать влияние концов, нормированные решения (4.18) не зависят от ξ:

$$\Phi(\xi) = N^{-1/2}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant aN \gg a. \tag{4.20}$$

Им соответствуют функции (4.5) в виде плоских волн

$$\varphi(x, t) = (1/\sqrt{N}) \exp [i(kx - Et/\hbar)]. \tag{4.21}$$

Каждая функция (4.21) зависит от волнового числа k, определяемого скоростью V с помощью равенства (4.16). В этом случае все межпептидные расстояния a изменяются на одинаковую величину $p(\xi) = \chi/N\varkappa\,(s^2 - 1) \ll a$, которая стремится к нулю при $N \to \infty$. Спектральный параметр Λ и энергия деформации цепочки в этом случае имеют значения

$$\Lambda = -\frac{G}{N}, \quad W = \frac{MV_0^2(1 + s^2)\chi^2}{2Na^3\varkappa^2(s^2 - 1)^2},$$

которые стремятся к нулю при $N \to \infty$.

Возбуждения, описываемые плоскими волнами (4.21), называются *экситонами*. При $N \gg 1$ полная энергия экситона определяется выражением

$$E_{ex}(V) = E_{ex}(0) + {}^1/_2\, mV^2, \tag{4.22}$$

где

$$E_{ex}(0) = \mathscr{E}_0 - \hbar^2/ma^2. \tag{4.23}$$

Уровни энергии, соответствующие различным значениям $k = mV/\hbar$, образуют экситонную зону; $m = \hbar^2/2a^2J$ — эффективная масса экситона в зоне.

При $s^2 < 1$ плоские волны (4.21) также являются решениями уравнения (4.18). Однако описываемые ими экситоны метастабильны, так как в этом случае имеются более устойчивые состояния с меньшей энергией.

Экситоны в белковой молекуле могут возбуждаться инфракрасным светом частоты ω при выполнении законов сохранения энергии $\mathscr{E}(k) = \hbar\omega$ и квазиимпульса $|k| = \omega/c$, если проекция напряженности электрического поля на вектор перехода $\mathbf{d}$ не равна нулю.

Экситонные состояния с определенным значением энергии распределены равномерно по всей длине цепочки. Поэтому они не переносят информацию и энергию. Возбуждения, охватывающие небольшую часть цепочки, описываются суперпозицией плоских волн — волновым пакетом. Однако область, охваченная возбуждением, с течением времени расширяется. Расплывание волнового пакета — один из признаков нестационарности таких состояний.

При значениях $s^2 < 1$ параметр нелинейности G положителен и уравнение (4.18) имеет нормированное частное решение вида

$$\Phi(\xi) = \sqrt{aQ/2}\,\mathrm{sech}\,(Q\xi) \tag{4.24}$$

при значениях

$$Q = \frac{maG}{2\hbar^2} = \frac{ma\chi^2}{2\varkappa\hbar^2(1-s^2)}, \quad \Lambda = \frac{\hbar^2Q^2}{2m}. \tag{4.25}$$

Уменьшение расстояний между ПГ определяется функцией

$$\rho(\xi) = aQ\chi/2\varkappa\,(1-s^2)\,\mathrm{ch}^2\,(Q\xi). \tag{4.26}$$

При этом смещения ПГ из их равновесных положений (согласно (4.11))

$$\beta(\xi) = \frac{\gamma}{\varkappa(1-s^2)}\,[1 - \mathrm{th}\,(Q\xi)]. \tag{4.27}$$

Возбуждение, описываемое амплитудной функцией (4.24), называют *солитоном*. Оно распределено в основном на отрезке $\Delta\xi = 2\pi/Q$ в системе координат ξ, движущейся вместе с возбуждением со скоростью $V = sV_0 < V_0$. В этой же области уменьшены и расстояния между ПГ. Солитоны описываются волной, профиль которой $\Phi(\xi)$ в процессе распространения не меняется.

Подставив значение (4.26) в (4.15), находим энергию деформации цепочки

$$W = ma^2\chi^4\,(1 - 4s^2)/(12\varkappa^2\hbar^2), \quad s^2 \ll 1. \tag{4.28}$$

При учете (4.25) и (4.27) полная энергия солитона, движущегося со скоростью V, определяется выражением

$$E_{\mathrm{sol}}(V) = E_{\mathrm{sol}}(0) - {}^1\!/_2\, M_{\mathrm{sol}}V^2, \tag{4.29}$$

где $E_{\mathrm{sol}}(0)$ — нулевая энергия солитона,

$$E_{\mathrm{sol}}(0) = E_{ex}(0) - ma^2\chi^4/(24\varkappa^2\hbar^2); \tag{4.30}$$

M_{sol} — эффективная масса солитона,

$$M_{\mathrm{sol}} = m\,[1 + a^2\chi^4/(6\varkappa^2\hbar^2)]. \tag{4.31}$$

Таким образом, энергия покоящегося солитона меньше энергии покоящегося экситона на величину

$$\Delta E = E_{\mathrm{ex}}(0) - E_{\mathrm{sol}}(0) = ma^2\chi^4/(24\varkappa^2\hbar^2). \tag{4.32}$$

Эффективная масса солитона (4.31) в мягких цепочках значительно превышает эффективную массу экситона m, так как движение солитона сопровождается локальной деформацией цепочки. Вследствие

большой массы солитона он может переносить значительную кинетическую энергию и при малых скоростях.

Наличие щели (4.32) в спектре возбужденных состояний молекулярной цепочки является одной из причин очень высокой стабильности солитонов. Для разрушения солитона, расщепления его на свободный экситон и однородную деформацию, требуется затратить значительную энергию (см. разд. 7.1).

Поскольку солитоны всегда движутся со скоростью, меньшей скорости продольного звука в цепи, они не излучают фононы. Другими словами, их кинетическая энергия не преобразуется в энергию теплового движения. Это — вторая важная особенность, обеспечивающая большую стабильность солитонов в мягких молекулярных цепях.

Наконец, третьей причиной большой стабильности рассматриваемых солитонов является их топологическая устойчивость. Смещения равновесных положений ПГ в цепочке определяются функцией (4.27). Следовательно, справа от солитона ($\xi > 0$) все ПГ находятся в несмещенных положениях na, а слева ($\xi < 0$) от него они все смещены на одинаковые расстояния $\beta_0 = 2\chi/\varkappa\ (1 - s^2)$. Чтобы уничтожить солитон, надо все ПГ левой части цепочки вернуть в их первоначальные положения na.

Как известно, поглощение света молекулярными системами не сопровождается изменением координат тяжелых частиц в момент квантового перехода (принцип Франка—Кондона). Поскольку образование солитона связано со смещением равновесных положений ПГ, то вероятность возбуждения солитонов светом очень мала. По той же причине весьма мала вероятность излучения света солитоном. Теория этого вопроса развивалась в работе А. А. Еремко и автора [27].

Солитоны могут возбуждаться локальными внешними воздействиями, например, при химических реакциях. Вероятность возбуждения солитонов наибольшая, когда такое локальное воздействие осуществляется на конце молекулярной цепи. Это утверждение основано на учете топологической устойчивости солитонов.

Для более полного исследования возбужденных состояний белковых молекул следует рассматривать не одну цепочку ПГ, а все три. При этом число уравнений типа (4.1), (4.1′) утраивается. Приходится учитывать не только резонансное взаимодействие J ПГ вдоль отдельных цепей, но и взаимодействие L между цепями. Кроме изменения шага спирали, надо учитывать изменение диаметра спирали. Такие усложнения математической модели были проведены в работах А. С. Давыдова, А. А. Еремко и А. И. Сергиенко [28, 29] и Эльвина Скотта [21, 30] при учете резонансного взаимодействия J между соседними ПГ, входящими в состав одной цепи, и взаимодействия L между разными цепями. Из данных о спектрах поглощения инфракрасного излучения белками Ю. Н. Чиргадзе и Н. А. Невская [31] получили значения

$$J = 7{,}8\ \text{см}^{-1} = 1{,}55 \cdot 10^{-22}\ \text{Дж}, \tag{4.33}$$

$$L = 12{,}4\ \text{см}^{-1} = 2{,}46 \cdot 10^{-22}\ \text{Дж}. \tag{4.34}$$

Решения уравнений, учитывающих оба эти взаимодействия, изменения шага и диаметра альфа-спиральной молекулы, характеризуют перемещение возбуждения одновременно по трем цепям. При этом внутрипептидному возбуждению Амид-I соответствуют три типа стационарных солитонов. Симметричные солитоны описывают перемещение возбуждений по трем цепям в фазе. В этом случае в области возбуждения расстояния между ПГ (шаг спирали) уменьшаются, а диаметр спирали увеличивается. Два других типа солитонов были названы несимметричными солитонами. В этих случаях движение солитонов сопровождается небольшим относительным смещением возбуждений в соседних цепочках и локальным изгибом молекулы.

Несимметричные солитоны имеют меньшую энергию, чем симметричные. Согласно численным расчетам Э. Скотта [21], эта разность (выраженная в $см^{-1}$) равна

$$\Delta E_1 = 15{,}4\ см^{-1}. \tag{4.35}$$

Если в молекуле возбуждается нестационарное состояние, соответствующее линейной комбинации симметричных и несимметричных солитонов, то возникают биения, соответствующие энергии ΔE_1. Эти биения отвечают перескоку возбуждения с одной цепи ПГ на соседнюю цепь.

Перескок возбуждения между пептидными цепочками обусловлен резонансным взаимодействием L между ПГ соседних цепочек. Поэтому грубая оценка частоты перескока может быть получена из равенства $\nu = L(2\pi\hbar)^{-1} = 3{,}7 \cdot 10^{11}\ с^{-1}$, что соответствует периоду около 2,7 пс.

5. Солитоны в дискретных моделях. Численные расчеты

Для получения аналитических результатов обычно используют модели бесконечных цепочек в континуальном приближении. Исследования ограниченных дискретных цепочек можно проводить только на основе современных ЭВМ. Использование в расчетах мощных цифровых вычислительных машин позволило поставить и решить новые задачи в области нелинейных явлений, решение которых ранее казалось практически невыполнимым. Численные расчеты солитонных возбуждений в цепях ПГ значительно улучшили понимание этих состояний.

Первое численное интегрирование системы дискретных дифференциальных уравнений, предложенных в 1978 г. в работе А. А. Еремко, А. И. Сергиенко и автора [28] для описания возбужденных состояний трех цепей ПГ, удерживаемых водородными связями, было выполнено Дж. Гайманом, Д. Мак-Лафлином и Э. Скоттом с помощью ЭВМ Лос-Аламосской научной лаборатории в 1979 г. [18]. Они исследовали симметричные возбужденные состояния в трех цепях спиральной белковой молекулы. Каждая цепь содержала 200 ПГ. Молекула белка характеризовалась величинами: $\mathscr{E}_0 = 0{,}205$ эВ, $M \approx \approx 100$ масс протона, $V_0 = 10^5$ см/с, $J = 1{,}55 \cdot 10^{-22}$ Дж, $L = 2{,}46 \cdot 10^{-22}$ Дж, расстояние между соседними ПГ $a = 4{,}5$ Å. В качестве

начальных условий использовались значения

$$\beta_{n\alpha}=0, \quad \Phi_{n\alpha}=\begin{cases}1 & \text{для } n=1,\\ 0 & \text{для } n\neq 1;\end{cases} \quad n=1,2,\ldots,200, \tag{5.1}$$

где индекс $\alpha = 1, 2, 3$ указывает номер цепочки, а индекс $n = 1, 2, \ldots$ и указывает номер ПГ в цепочке.

Вычисления проводились для разных значений параметра связи χ внутрипептидных возбуждений со смещениями их равновесных положений. Выяснилось, что при начальных условиях (5.1) в молекуле образуются и перемещаются хорошо выделенные солитоны, если параметр связи $\chi = 2\chi_1 \geqslant 0{,}6\cdot 10^{10}$ Н. Солитоны с близким к критическому значению χ перемещаются со скоростью $V \simeq 1{,}26\cdot 10^3$ м/с. Следовательно, расстояние 17 000 Å, соответствующее длине альфа-спиральной миозиновой молекулы, входящей в состав мышечных волокон, солитоны могли бы проходить (без учета сил трения и производимой работы) приблизительно за 100 пс [21].

В Институте теоретической физики АН УССР В. А. Куприевич и Г. Кудрицкая [32] провели теоретическую оценку значения χ. Для этой цели они выполнили квантовохимические расчеты электронной структуры димера формамида, состоящей из двух пептидных групп, соединенных водородной связью. Значение χ определялось при учете изменения упругой постоянной карбонильной группы C=O, обусловленного изменением длины водородной связи. Из данных о двух значениях длин водородных связей они установили что $\chi = 2\chi_1$ находится в пределах от $6\cdot 10^{-11}$ до 10^{-10} Н. Карери путем сравнения энергии колебания Амид-I со значениями длин водородных связей в различных полипептидных кристаллах нашел, что $\chi = 1{,}24\cdot 10^{-10}$ Н. Таким образом, вычисленные значения χ превышают пороговое значение $\chi_{\text{пор}}$.

Учитывая эти вычисления и другие оценки параметра χ, авторы работы [18] подтвердили справедливость нашего предсказания об образовании солитонов. Этот вывод исключительно важен потому, что авторы использовали значения параметров модели, соответствующие реальным белковым молекулам. Работа [18] интересна также тем, что в ней проведено исследование формирования солитонов из определенного начального состояния и выяснена роль дискретности цепочки.

В 1979 г. Дж. С. Эйлбек в Резерфордовской лаборатории Эдинбургского университета при консультации с Э. Скоттом сделал 16-миллиметровый компьютерный фильм [33], демонстрирующий распространение вдоль цепи ПГ внутреннего вибрационного возбуждения Амид-I краевой группы. Этот фильм наглядно показывает, что при сверхпороговом значении параметра связи χ вдоль молекулы распространяется возбуждение в виде солитона, т. е. ярко выраженного локального импульса с шириной, охватывающей несколько ПГ. Форма импульса и его ширина остаются неизменными при его движении.

Фильм Эйлбека и численные расчеты на ЭВМ [15] показывают, что солитон формируется в самом начале пептидной цепи. Следова-

тельно, солитоны могут возникать в сравнительно коротких участках альфа-спиральной белковой молекулы.

Как показано Л. С. Брижик и автором [34], обнаруженная при численных расчетах необходимость превышения некоторого порогового значения параметра связи χ для возбуждения солитона обусловлена условиями возбуждения солитона. Согласно теории, использующей континуальное приближение, в цепочке бесконечной длины медленные солитоны могут существовать при любых значениях χ. По мере уменьшения χ свойства солитонов непрерывно приближаются к свойствам экситонов. Если же мы исследуем процесс образования солитона из начального импульса, то условия его образования зависят от формы начального импульса. В частности, когда форма начального импульса задана в виде прямоугольной ступеньки, то возникают пороговые условия возбуждения.

Дискретность реальной белковой молекулы приводит к небольшой модуляции движения солитона. Период модуляции равен времени прохождения солитоном расстояния между ближайшими ПГ. По расчетам Э. Скотта [18], этому периоду соответствует энергия

$$\Delta E_2 = 12{,}57 \text{ см}^{-1}. \qquad (5.2)$$

Численные вычисления, выполненные П. С. Ломдал, С. П. Лейном и И. Дж. Бигсом [35], позволили подтвердить частицеподобные свойства солитонов. При возбуждении двух ПГ на концах полипептидной цепи возникали два солитона, движущиеся со скоростью, составляющей 3/8 от скорости продольного звука навстречу друг другу. Оказалось, что при столкновении они проходят друг через друга, сохраняя свою скорость и форму.

6. Солитоны и молекулярный механизм мышечного сокращения

Одной из наиболее интересных проблем биоэнергетики является выяснение молекулярных основ превращения химической энергии гидролиза молекул АТФ в механическую энергию различных внутриклеточных и межклеточных движений в живых организмах. Наиболее хорошо изучены поперечно-полосатые мышцы животных.

В основе многочисленных феноменологических теорий мышечного сокращения [36—39] лежит представление, что экспериментально наблюдаемое скольжение тонких белковых нитей относительно толстых в сокращающейся мышце обусловлено активным движением «голов» миозиновых молекул, входящих в состав толстых белковых волокон. Предполагается, что при гидролизе молекулы АТФ, прикрепленной к голове миозиновой молекулы, последняя удлиняется, образует связь (мостик) с молекулой актина тонкого волокна, затем поворачивается, передвигая к центру саркомера (повторяющиеся участки мышечного волокна) тонкое волокно относительно толстого, и, наконец, отсоединяется от тонкого волокна, возвращаясь к прежнему размеру и положению в толстой нити. Присоединив новую молекулу АТФ, она может повторить этот цикл.

Представление о мостиках между толстыми и тонкими нитями, которые замыкаются, тянут тонкие волокна, вызывая их смещение относительно толстых, а затем разрываются, не объясняет молекулярную природу явления. Остаются нерешенными вопросы: как энергия гидролиза АТФ расходуется на удлинение голов, образование мостиков, тянущее усилие и разрыв мостиков; каков молекулярный механизм изменений в голове миозиновой молекулы, приводящий к этим явлениям, и, наконец, почему только голова огромной миозиновой молекулы (молекулярная масса 500 000), имеющей кроме головы, большой хвост, образованный альфа-спиральным белком, принимает активное участие в сокращении. Г. М. Франк [11] писал: «Перенос основного кинетического механизма только на мостики, составляющие 7% мышечного субстрата, казался мне малоубедительным».

Базируясь на теоретических исследованиях солитонов в спиральных белковых молекулах, автор предложил [40—44] новую гипотезу для объяснения механизма сокращения длины саркомеров. Согласно этой гипотезе ионы кальция, достигая при диффузии первого ряда голов миозиновых молекул на концах толстых нитей, вызывают гидролиз присоединенных к ним молекул АТФ. Выделившаяся энергия порождает в длинных спиральных участках миозиновых молекул солитоны, которые перемещаются от голов миозиновых молекул к их концам, расположенным в области центра саркомера. Движение солитона сопровождается локальным изгибом и расширением диаметра молекулы. Поэтому в области перемещения солитонов толстая нить, образованная пучком миозиновых молекул, распухает. Головы других миозиновых молекул, находящиеся над пробегающими под ними распухшими участками миозиновых молекул, прижимаются к тонким нитям, вызывая при перемещении солитонов небольшое смещение тонких нитей в направлении движения солитонов — к центру саркомера.

Согласно этой модели головы миозиновых молекул прижимаются к тонким нитям и отходят от них (как в модели образования и разрыва мостиков). Однако это движение обусловлено не удлинением, поворотом и сокращением длин самих голов, а продвижением внутри толстой нити распухших областей миозиновых молекул, которые сопровождают движение солитонов. При этом кинетическая энергия солитонов преобразуется в энергию сокращения или приводит к натяжению, если мышца находится под нагрузкой. В такой модели активными элементами сокращения являются все участки миозиновой молекулы, а не только ее голова.

Затрачивая свою кинетическую энергию на работу, необходимую для сокращения мышц, солитоны тормозятся, остановившись вблизи центра толстых нитей (Н-зона), гибнут, передавая энергию покоя тепловому движению. Таким образом, при сокращении мышечных волокон используется только кинетическая энергия солитонов.

Хорошей иллюстрацией механизма перемещения тонких нитей вследствие движения распухших областей толстых нитей, в которых перемещаются солитоны, могут служить вибромоторы Рагульскиса

и его сотрудников [45]. В этих моторах возбуждаемые в пьезоэлектрических пленках упругие колебания в виде импульсов перемещаются вдоль поверхности пленки и вызывают под влиянием трения скольжения вращение или поступательное перемещение соприкасающихся с ними тел.

7. Возможное проявление солитонов в метаболических процессах клетки

7.1. Фотодиссоциация солитонов

В ряде экспериментов [46—49] обнаружено, что электромагнитное излучение малой мощности (не более единиц милливатт на 1 $см^2$) в области миллиметрового диапазона длин волн оказывает нетепловое влияние на живые организмы. Характерной особенностью этого воздействия является его резонансный характер. Воздействие наблюдается лишь в узких полосах частот — от 0,05% до нескольких процентов от средней частоты. До настоящего времени недостаточно развиты убедительные представления о природе такого воздействия. Н. Девятков [46] отмечает: «С научной точки зрения объяснение механизма резонансного действия облучения, как и других особенностей действия облучения, представляет огромный интерес. Пока еще мы не имеем строгих научных объяснений действия электромагнитного поля миллиметрового диапазона длин волн».

В ряде исследований Г. Фрелиха [50] высказывалось предположение о том, что излучение может восприниматься участками клеточных мембран с включенными в них белковыми молекулами. Согласно Г. Фрелиху, при толщине мембраны порядка 0,01 мкм в мембране могут возникать колебания с частотой около $0{,}5 \cdot 10^{11}$ Гц. Поскольку в живом организме мембраны поляризованы, то такие колебания могут возбуждаться электромагнитным излучением. Остается неясным, как такие колебания окажут воздействие на жизнедеятельность клетки.

Один из возможных механизмов резонансного воздействия электромагнитного излучения на живые организмы был предложен А. А. Еремко [51] на основе представления об активном участии солитонов в жизнедеятельности клетки. Солитоны являются идеальными переносчиками энергии гидролиза молекул АТФ вдоль белковых молекул. Под влиянием электромагнитного излучения солитоны могут распадаться на быстро релаксирующие экситоны и локальную деформацию белковой молекулы. Вследствие этого процесса нарушается эффективность переноса энергии и, следовательно, процессы жизненной активности.

Вследствие принципа Франка—Кондона во время оптического перехода, сопровождающегося распадом солитона на экситоны и локальную деформацию молекулы, положение тяжелых ПГ не изменяется. Происходит вертикальный переход в экситонное состояние с волновым вектором $k \approx 0$ при неизменном положении ПГ в начальном состоянии, характеризуемом функцией $\rho(\xi)$ (4.26). При этом за-

трачивается энергия, превышающая энергию связи (4.30) солитона с деформацией

$$\Delta \equiv E_{ex}(0) - E_{sol}(0) = \chi^4/24\varkappa^2 a^4 J$$

на величину деформационной энергии $W = 2\Delta$. Таким образом, энергия фотодиссоциации определяется величиной

$$\hbar\omega = 3\Delta \equiv \chi^4/16\varkappa^2 a^4 J.$$

Используя параметры $J = 7{,}8$ см$^{-1}$, $\varkappa = 19$ Н/м и $\chi/a = \chi_1 = (6{,}4 \div 8)\cdot 10^{-11}$ Н, находим, что резонансная частота соответствует длине волны излучения $\lambda = 4{,}6 \div 8{,}8$ мм. Это значение качественно совпадает с областью длин волн электромагнитного излучения, активно взаимодействующего с живыми организмами. В связи с тем что перенос энергии гидролиза АТФ может осуществляться тремя типами солитонов (симметричным и двумя несимметричными), в спектре поглощения могут наблюдаться три резонансные частоты. Две из них (соответствующие несимметричным солитонам) мало отличаются по энергии друг от друга.

Таким образом, солитонная гипотеза может дать качественное объяснение «загадочному» характеру влияния резонансного излучения в области миллиметровых длин волн на живые организмы разной сложности.

Кроме поглощения электроманитного излучения, процесс фоторасщепления может проявиться при смещении частот рассеянного рамановского спектра. Фотоны, отдавая свою энергию на фоторасщепление солитона, смещают свою частоту в красную область (стоксово рассеяние). Возможно, что этот процесс проявился в работе С. Дж. Вебба и М. Е. Стонегама [52], изучавших рамановское рассеяние лазерного излучения живыми бактериями. Авторы наблюдали дискретные смещения линий лишь в том случае, когда бактерии находились в активном метаболическом состоянии. Эти линии исчезали, когда бактерии находились в неактивном состоянии. В спектре бактерий B. megaterium обнаружены три резонансные частоты: $5{,}7\cdot 10^{11}$, $3{,}75\cdot 10^{12}$ и $4{,}3\cdot 10^{12}$ Гц. В спектрах бактерий E. coli в интервале частот $6\cdot 10^{11}$ — $6{,}6\cdot 10^{12}$ Гц авторы работы [52] наблюдали даже пять частот.

Дифференциальное сечение стоксовой компоненты рамановского рассеяния, соответствующее энергии фотодиссоциации солитона, рассчитывалось на простой модели одномерной молекулярной цепи в работе А. А. Вахненко, Ю. Б. Гайдидея и А. А. Еремко [53].

7.2. Рамановское рассеяние лазерного излучения метаболически активными клетками

В начале 80-х годов была предпринята попытка исследования рамановского рассеяния лазерного излучения метаболически активными бактериальными клетками [54—56]. В работах С. Дж. Вебба [54] в антистоксовой области частот рассеянного лазерного излуче-

ния метаболически активными бактериями было найдено девять дискретных резонансных частот, которые отсутствовали в спектрах неактивных бактерий. Наличие антистоксовых частот указывало на то, что в метаболически активных бактериях происходят вибрационные движения, отражающие происходящие в бактерии жизненные процессы. При рассеянии излучения энергия этих колебаний уносилась фотонами.

Независимо от экспериментальных работ Э. Скотт провел расчеты вибрационной структуры солитонов [20, 21]. При сравнении своих расчетов с экспериментальными данными С. Дж. Вебба [54] он обнаружил [19], что наблюдаемые в эксперименте частоты антистоксовых линий хорошо совпадают с суммами и разностями рассчитанных им фундаментальных частот: частотой перескока возбуждения между тремя цепями ПГ $\Delta E_1 = 15{,}4$ см$^{-1}$ (4.35) и частотой $\Delta E_2 = 12{,}6$ см$^{-1}$ (5.2), обусловленной дискретностью альфа-спиральной молекулы.

В совместной работе теоретиков и экспериментаторов [57] на основе анализа теоретических и экспериментальных данных отмечается, что «согласие между вычисленными и измеренными частотами колебаний подтверждает идею о том, что солитоны определяют возможные механизмы транспорта и запасания биологической энергии в белковых молекулах... и должны играть исключительно важную роль в понимании биоэнергетических процессов». Авторы [57] специально отмечают, что экспериментальные и теоретические исследования были выполнены независимо и сравнены только после их опубликования.

В работе итальянских ученых [58] использовались представления о солитонах для объяснения изменений в некотором температурном интервале рамановского спектра зеленых водорослей Chlorella Pyrenoidoza.

7.3. Возможный механизм анестезии

В обширном классе внутривенных анестезирующих препаратов их молекулы образуют водородные связи с белковыми молекулами, расположенными внутри цитоплазматической мембраны или вне ее. Такое присоединение анестезирующих молекул к белковым молекулам препятствует нормальному функционированию клетки.

Ответ на вопрос о механизме тормозящего воздействия на нервную систему при присоединении таких молекул к белковой молекуле был предложен С. Н. Лейном на основе солитонной модели [59].

Молекулы таких препаратов содержат в своем составе группы атомов H—N—C=O, очень похожие на пептидные группы, входящие в состав белков. Так, например, молекула барбитурата содержит в кольце четыре группы H—N—C=O, молекула гайдонтонина — три, молекулы глютимида и сукценимида — по две.

При присоединении молекулы барбитурата к белковой молекуле водородная связь между соседними ПГ ослабляется или даже разрывается, так как образуются новые водородные связи атомов O и H

с атомами H—N—C—O молекулы барбитурата. При разрыве (или ослаблении) водородной связи увеличивается расстояние между соседними ПГ в белковой молекуле, что приводит к остановке движущегося по цепи ПГ солитона и, следовательно, к нарушению процесса передачи информации и энергии вдоль белковой молекулы.

Для проведения на ЭВМ численных расчетов эффекта увеличения расстояния между соседними ПГ в белковой молекуле при присоединении молекулы барбитурата С. Н. Лейн предположил [59], что при таком присоединении расстояние между ПГ в области присоединения увеличивается на 0,8 Å, что соответствует снижению энергии водородной связи на 55%. Энергия резонансного взаимодействия J между соседними ПГ уменьшается примерно на 40%. Далее предполагалось, что коэффициент упругости и параметр связи χ уменьшаются пропорционально уменьшению энергии водородной связи. При расчетах принималось, что молекула анестезирующего агента вызывает возмущение цепи ПГ в области трех ПГ. Численные расчеты показали, что солитон имеет хорошую форму перед входом в область возмущения. Однако, пройдя зону возмущения, он значительно деградирует, испуская фононы. Эти фононы движутся со скоростью звука в спирали, превышающей скорость солитона. Таким образом, численные расчеты С. Н. Лейна указывают, что присоединение анестезирующих молекул к белковым молекулам резко снижает их способность к передаче энергии и информации.

С. Н. Лейн считает, что снижение эффективности переноса информации и энергии солитонами при присоединении молекул барбитуратов может играть существенную роль в двух клеточных структурах: а) в спиральных участках белков внутренних митохондриальных мембран, которые участвуют в синтезе молекул АТФ и переносе электронов (см. разд. 8) и б) в белках оболочки нейронов, которые отвечают за восприимчивость и преобразование сигналов. Именно эти части белковых молекул обладают в значительной области альфа-спиральными структурами и в состоянии связывать барбитураты, которые нарушают их нормальную функцию в переносе информации, энергии и электронов солитонами.

Барбитураты проявляют свою активность при концентрации между 200 и 100 мкМ. При этом они связываются примерно с 1% типичных белков мембраны.

8. Перенос электронов солитонами вдоль белковых молекул

Многие биологические явления (фотосинтез, клеточное дыхание, ферментативная активность и др.) связаны с переносом электронов от донорных молекул к акцепторным через молекулярные структуры, которые обычно называют цепями электронного транспорта. В 1967 г. Д. Волт, Дж. Паркас и Б. Чанс [60] высказали предположение, что процесс переноса электронов обусловлен квантовомеханическим туннелированием. Однако в ряде случаев центры, между которыми переносится электрон, разделены многими атомами и атом-

ными группами, соединенными ковалентными, водородными и вандерваальсовыми силами. Маловероятно, что наблюдаемый перенос электронов на расстояние 30—70 Å осуществляется простым туннельным механизмом.

Одно из возможных объяснений переноса электрона на такие расстояния связано с предположением, что процесс переноса облегчается участием в нем белковых молекул, находящихся между донорами и акцепторами. Такая донорно-акцепторная модель переноса электронов через белковые молекулы при условии фиксированного расположения атомов развивалась в работах Э. Г. Петрова, И. И. Украинского и В. Н. Харкянена [61] и автора [62]. В этом случае взаимодействие электрона со смещениями атомов из фиксированных равновесных положений учитывается методом теории возмущений. Оно приводит к торможению электронов. При сильной связи электрона со смещениями молекул, которая реализуется в задачах о движении электронов вдоль сравнительно мягких цепей ПГ белковых молекул, нельзя применять теорию возмущений.

Проведенные в ИТФ АН УССР исследования показали [63], что процессы эффективного переноса электрона вдоль альфа-спиральных белковых молекул обусловлены особыми их свойствами. ПГ вследствие несимметричного распределения электрических зарядов имеют сравнительно большой постоянный электрический дипольный момент (3,5 дебая) (см. [26, § 26]). Поэтому они образуют потенциальные ямы, способные удерживать внешние электроны, поступающие в молекулу от доноров. Обозначим основной энергетический уровень электрона в такой изолированной потенциальной яме буквой $\mathscr{E}_0$. Перекрывание волновых функций этих состояний, относящихся к ПГ из разных цепей, практически отсутствует, учет перекрывания волновых функций между соседними потенциальными ямами ПГ, расположенными вдоль каждой цепи, приводит к коллективизации этих состояний. Без учета смещений равновесных положений ПГ такие коллективные состояния образуют энергетическую зону для квазичастицы, соответствующей избыточному электрону.

Эта квазичастица характеризуется эффективной массой m, определяемой величиной D обменного взаимодействия между соседними ПГ с помощью выражения

$$m = \hbar^2/2a^2D. \tag{8.1}$$

Состояние квазичастицы в энергетической зоне, называемой зоной проводимости, описывается плоской волной с определенным значением волнового числа $k = 2\pi/\lambda$. В длинноволновом приближении ($ka \ll 1$) этому состоянию соответствует энергия

$$E_e(k) = E_e(0) + \hbar^2k^2/2m. \tag{8.2}$$

Энергия дна зоны $E_e(0)$ меньше энергии $\mathscr{E}_0$ из-за обменного взаимодействия между соседними ПГ:

$$E_e(0) = \mathscr{E}_0 - \hbar^2/ma^2. \tag{8.2'}$$

Квазичастица в энергетической зоне (8.2) имеет заряд электрона, однако ее эффективная масса может существенно отличаться от массы свободного электрона. Несмотря на это, за ней обычно сохраняют название *электрон*.

Представление о жестком закреплении ПГ в альфа-спиральной молекуле оказывается несостоятельным из-за слабой водородной связи между ПГ. Вследствие деформационного взаимодействия квазичастицы с цепочкой ПГ изменяются межпептидные расстояния в области распределения квазичастицы. Поэтому энергетические состояния квазичастицы в цепочке имеют сложный характер, обусловленный взаимодействием квазичастицы с вызываемой ею же локальной деформацией. Это взаимодействие нельзя описать с помощью теории возмущений. Отказ от использования теории возмущений, проведенный автором в работе [63], приводит к описанию движения электрона с помощью системы нелинейных уравнений.

Будем характеризовать вероятность нахождения электрона на ПГ номера n квадратом модуля волновой функции $\varphi_n(t)$, смещения равновесных положений — функцией $\beta_n(t)$, а относительное уменьшение расстояния между соседними ПГ — функцией $\rho_n(t) = \beta_n(t) - \beta_{n+1}(t)$. Тогда возбужденные состояния цепочки будут описываться системой уравнений, аналогичной рассмотренной ранее системе уравнений (4.1)—(4.4), если в последней заменить резонансное взаимодействие J на обменное взаимодействие D и параметр χ на параметр деформационного потенциала σ.

Переходя к континуальному приближению, мы убедимся, что движение электрона в цепочке ПГ в системе координат $\xi = x - x_0 - Vt$, перемещающейся с постоянной скоростью V, характеризуется относительным уменьшением расстояния между ПГ

$$\rho(\xi) = \sigma\Phi^2(\xi)/MV_0^2(1 - s^2), \tag{8.3}$$

пропорциональным квадрату огибающей $\Phi(\xi)$ волновой функции (4.5), удовлетворяющей нелинейному уравнению Шредингера

$$D\frac{d^2\Phi(\xi)}{d\xi^2} + G\Phi^3(\xi) = \Lambda\Phi(\xi) \tag{8.4}$$

с коэффициентом нелинейности

$$G = \sigma^2/\varkappa a^2(1 - s^2), \quad s = V/V_0. \tag{8.5}$$

При $s > 1$ коэффициент нелинейности G отрицательный и уравнение (8.4) имеет только решения типа $\Phi(\xi) = \text{const}$. Эти решения нормируются к единице лишь в цепочках конечной длины L, тогда $\Phi(\xi) = 1/\sqrt{L}$ и волновая функция (4.5) изображает плоскую волну со значением волнового числа

$$k = mV/\hbar \tag{8.6}$$

и энергией

$$E(V) = E(0) + {}^1/_2 mV^2. \tag{8.7}$$

Решения уравнения (8.4), соответствующие плоским волнам с энергией (8.7), имеются и при скоростях $V < V_0$. Однако в этом случае они характеризуют метастабильные состояния, поскольку при заданном значении $V < V_0$ имеются пространственно-локализованные состояния с меньшей энергией — *автолокализованные электроны* или *электросолитоны*.

Электросолитоны характеризуют движение электрона совместно с локальной деформацией цепочки ПГ, описываемое функциями

$$\Phi_{\text{sol}}(\xi) = \sqrt{Q/2}\ \text{sech}\ (Q\xi), \tag{8.8}$$

$$\rho_{\text{sol}}(\xi) = \sigma\Phi^2(\xi)/\varkappa a^2(1 - s^2) \tag{8.9}$$

при значении

$$Q = m\sigma^2/2\varkappa\hbar^2(1 - s^2). \tag{8.10}$$

Следует иметь в виду, что полученные выражения справедливы только при $s^2 \ll 1$, когда выполняется гармоническое приближение, использованное для описания смещений равновесных положений ПГ. Теория, не использующая гармоническое приближение, излагается в монографии [26] и работе [70].

При $V \ll V_0$ электросолитон переносит энергию

$$E_{\text{sol}}(V) = E_e(0) - \Delta + {}^1/_2 M_{\text{sol}} V^2, \tag{8.11}$$

где $E_e(0)$ — энергия дна зоны проводимости;

$$\Delta = \chi^4/48\varkappa^2 a^4 D; \tag{8.12}$$

Δ характеризует энергию, выделяемую при связи квазичастицы с локальной деформацией цепи ПГ; M_{sol} — эффективная масса электросолитона:

$$M_{\text{sol}} = m\,[1 + M\chi^4/6\varkappa^2\hbar^2(1 - s^2)]. \tag{8.13}$$

Стабильность электросолитонов, так же как стабильность солитонов, соответствующих внутрипептидным вибрациям Амид-I, обусловлена взаимной компенсацией эффектов нелинейности и дисперсии. Исключительная стабильность электросолитонов делает альфа-спиральные участки белковых молекул идеальными путепроводами для переноса электронов от донорных к акцепторным молекулам, между которыми они находятся.

9. Спаривание электросолитонов в мягких молекулярных цепях

Если пара избыточных электронов попадает в цепочку ПГ, тогда, как было показано Л. С. Брижик и автором [64], они спариваются в области локальной деформации, образованной этими электронами. Вследствие эффекта нелинейности потенциальная яма, образованная одним электроном, притягивает второй электрон с противоположным спином, который, в свою очередь, углубляет яму.

Если безразмерная величина $g = ma^2G/\hbar$ характеризует автолокализацию одного электрона так, что вероятность его пространствен-

ного распределения в системе координат ξ определяется квадратом амплитудной функции

$$\Phi_{\uparrow}(\xi) = {}^1/_2\sqrt{g}\,\mathrm{sech}\,({}^1/_2 g\xi), \tag{9.1}$$

то без учета кулоновского отталкивания электронов амплитудная функция, характеризующая вероятность пространственного распределения каждого электрона в паре, определяется выражением

$$\Phi_{\uparrow\downarrow}(\xi) = \sqrt{g/2}\,\mathrm{sech}\,(g\xi). \tag{9.2}$$

Сравнивая (9.1) и (9.2), видим, что при спаривании удваивается эффективный параметр нелинейности и область локализации пары $(2\pi/g)$ уменьшается в 2 раза.

Выигрыш энергии при спаривании определяется выражением

$$E_{\mathrm{bond}}(s) = m\chi^4(1 - 5s^2)/4\varkappa^2\hbar^3a^2(1 - s^2), \tag{9.3}$$

из которого следует, что спаривание энергетически выгодно только при малых скоростях. Связанные электросолитоны, движущиеся с постоянной скоростью $V \ll V_0$, имеют энергию

$$E_{\uparrow\downarrow}(V) = m[V^2 - \chi^4/3\varkappa^2a^2\hbar^2] + {}^1/_2M_{\mathrm{bond}}V^2. \tag{9.4}$$

Их эффективная масса

$$M_{\mathrm{bond}} = 2m(1 + 2M\chi^4/3\varkappa^3\hbar^2a^2). \tag{9.5}$$

Она превышает массу изолированного электросолитона (8.13) более чем в 2 раза. Следовательно, при возрастании скорости кинетическая энергия пары возрастает быстрее, чем сумма энергий каждого солитона, движущегося с той же скоростью. Этим объясняется нарушение условия спаривания при больших скоростях.

Итак, спаривание электросолитонов обусловлено нелинейной связью электронов с инерционной локальной деформацией цепи. Решение нелинейного уравнения Шредингера, описывающего безынерционное поле с самовоздействием (2.7), не содержит энергетически связанных состояний.

Эффект спаривания электронов в синглетном спиновом состоянии проявляется в некоторых биологических явлениях, связанных с перемещением электронов. Так, в редокс-реакциях пары электронов переносятся от одной молекулы к другой. В сопряженных (внутренних) мембранах митохондрий и хлоропластов при синтезе молекул АТФ электроны переносятся парами, а не по одному [65].

10. Возможная квазисверхпроводимость в одномерных молекулярных цепочках, способных удерживать избыточные электроны

Система дифференциальных уравнений

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sigma\rho(x,t)\right]\psi(x,t) = 0, \tag{10.1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\beta(x,t) - \frac{a\mathfrak{z}}{M}\frac{\partial}{\partial x}(|\psi(x,t)|^2) = 0, \tag{10.2}$$

где

$$\rho(x, t) = -a\partial\beta(x, t)/\partial x, \tag{10.3}$$

описывает взаимодействие комплексного поля $\psi(x, t)$, соответствующего квазичастицам эффективной массы m, с инерционным полем $\beta(x, t)$ тяжелых частиц массы M.

Используя инвариантность этой системы по отношению к выбору начала пространственной системы отсчета, решение системы уравнений (10.1), (10.2) можно искать в виде

$$\psi(x, t) = a^{-1/2}\Phi(\xi)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[mxV - \left(\mathscr{E} + \frac{mV^2}{2}\right)t + \eta_0\right]\right\}, \tag{10.4}$$

$$\beta(x, t) = \beta(\xi), \quad \rho(x, t) = \rho(\xi), \quad \xi = (x - x_0 - Vt)/a, \tag{10.5}$$

где η_0 и x_0 — произвольная фаза и координата. Входящая в выражение (10.5) величина $\mathscr{E}$ определяет энергию квазичастицы в поле деформационных ям $\sigma\rho(\xi)$, перемещающихся со скоростью V.

Подставив (10.4) в уравнение (10.1), получим уравнение для огибающей

$$\left[\frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{d^2}{d\xi^2} + \mathscr{E} + \sigma\rho(\xi)\right]\Phi(\xi) = 0. \tag{10.6}$$

Проинтегрировав (10.2) при условии $\partial\beta/\partial x = 0$ на всех участках, где $|\psi(x, t)|^2 = 0$, получим

$$\rho(\xi) = \sigma\Phi^2(\xi)/MV_0^2(1 - s^2), \quad s = V/V_0. \tag{10.7}$$

После подстановки (10.7) в уравнение (10.6) оно преобразуется в нелинейное уравнение Шредингера для вещественной огибающей функции $\Phi(\xi)$

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \varepsilon + 2g\Phi^2(\xi)\right]\Phi(\xi) = 0 \tag{10.8}$$

при значениях безразмерных величин

$$\varepsilon \equiv 2ma^2\mathscr{E}\hbar^{-2}, \quad g \equiv ma^2G\hbar^{-2}, \quad G = \sigma^2/[mV_0^2(1 - s^2)]. \tag{10.9}$$

При нормировке $\Phi(\xi)$ на одну частицу полная энергия возбуждения $E(V)$ и импульс $P(V)$, включающие энергию и импульс деформации цепочки (в лабораторной системе), определяются выражениями

$$E(V) = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{\hbar^2}{2ma^2}\left[\varepsilon + (1 + s^2)g\int\Phi^4(\xi)\,d\xi\right], \tag{10.10}$$

$$P(V) = V\left[m + \frac{g\hbar^2}{ma^2V_0^2}\int\Phi^4(\xi)\,d\xi\right]. \tag{10.11}$$

В работе Г. М. Пестрякова и автора [66] (см. также [26, § 29]) показано, что система уравнений (10.1), (10.2) имеет периодические решения с периодом aL:

$$\psi(x, t) = \psi(x + aL, t), \qquad \rho(x, t) = \rho(x + aL, t).$$

В этом случае из (10.4) следует условие периодичности для вещественной огибающей

$$\Phi(\xi + L) = \Phi(\xi) \tag{10.12}$$

и дискретность значений скорости перемещения квазичастицы

$$V = V_n = 2\pi\hbar n/maL, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{10.13}$$

При периодическом условии (10.12) удобно нормировать функцию $\Phi(\xi)$ так, чтобы в каждом периоде L содержалась одна частица, т. е.

$$\int_0^L \Phi^2(\xi)\, d\xi = 1. \tag{10.14}$$

При указанных выше условиях решения уравнения (10.8) выражаются через две эллиптические функции Якоби $\mathrm{dn}\,(u, k)$ и $\mathrm{cn}\,(u, k)$ от вещественной переменной u, зависящей от ξ, и называются *кноидальными волнами*:

$$\Phi_d(\xi, k) = A\ \mathrm{dn}\,(\alpha\xi, k), \tag{10.15}$$

$$\Phi_c(\xi, k) = B\ \mathrm{cn}\,(\beta\xi, k). \tag{10.16}$$

Каждая такая функция характеризуется модулем k, принимающим непрерывные значения в интервале (0, 1). Входящие в эти функции значения A, B, α, β и модули k эллиптических функций определяются величиной периода L относительно безразмерной пространственной переменной ξ и условиями нормировки функции. Поскольку мы нормируем функцию $\Phi(\xi)$ условием (10.14), то период L определяется плотностью квазичастиц в цепочке. В этом случае функция (10.15) имеет явный вид

$$\Phi_d(\xi, k) = \frac{\sqrt{g}}{2E(k)}\,\mathrm{dn}\left(\frac{g\xi}{2E(k)}, k\right), \tag{10.17}$$

где g — безразмерный параметр нелинейности, определяемый (10.9). Модуль k при заданных g и L определяется равенством

$$gL = 4E(k)\mathcal{K}(k). \tag{10.18}$$

Входящие в (10.17) и (10.18) функции $\mathcal{K}(k)$ и $E(k)$ являются соответственно полными эллиптическими интегралами первого и второго рода. Их значения определяются таблицами.

Малым плотностям квазичастиц в цепочке соответствуют большие периоды L, в этом случае $k \approx 1$ и функции $\mathcal{K}(k)$ и $E(k)$ имеют асимптотические значения

$$\mathcal{K}(k) = \Lambda + {}^1/_4\,(\Lambda - 1)\,k_1^2 + \ldots, \quad k_1^2 \equiv 1 - k^2 \ll 1,$$

$$E(k) = 1 + {}^1/_2\,(\Lambda - {}^1/_2)\,k_1^2 + \ldots, \quad \Lambda \equiv \ln(4/k_1^2), \tag{10.19}$$

а сами функции (10.17) выражаются через гиперболические функции

$$\Phi_d(\xi, k) \approx {}^1/_2\sqrt{g}\,\{1 + (k_1^2/4)\,(u + \mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u)\,\mathrm{th}\,u\}\,\mathrm{sech}\,u, \tag{10.20}$$

где

$$u \equiv g\xi/2;\ k_1^2 \ll 1.$$

Предельно большому периоду ($L \to \infty$), т. е. случаю одной квазичастицы в цепочке, соответствует функция

$$\Phi_d(\xi, 1) = \Phi_s(\xi) = {}^1/_2\sqrt{g}\,\mathrm{sech}\,(g\xi/2),$$

характеризующая движение одиночного солитона.

В другом предельном случае больших плотностей квазичастиц (малые значения gL) модуль k мал, $E(k) \approx \mathcal{K}(k) \approx \pi/2$ и функция (10.17) принимает значение

$$\Phi_d(\xi, k) \approx {}^1/_2\sqrt{g}\,[1 - {}^1/_2 k^2 \sin^2(g\xi/\pi)],\quad k^2 \ll 1. \qquad (10.21)$$

Полная энергия, переносимая каждой квазичастицей вместе с сопровождающей ее локальной деформацией цепочки, определяется выражением

$$\mathcal{E}_{d,k}(V) = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{\hbar^2 g^2}{8ma^3 E(k)}\left[\frac{2-k^2}{E(k)} - (1+s^2)\,Q_d(k)\right],$$

где

$$Q_d(k) \equiv {}^1/_3\,[2(2-k^2)\,E(k) - (1-k^2)\,\mathcal{K}(k)].$$

Явный вид кноидальных волн второго типа (10.16) приведен в [66, 26].

Чтобы энергии рассмотренных выше энергетических состояний, описываемых периодическими кноидальными волнами, были ниже дна одночастичной зоны проводимости, необходимо, чтобы пространственный период превышал некоторое критическое значение. Другими словами, энергетически выгодные пространственно-периодические конфигурации автолокализованных состояний могут реализоваться в цепочке при сравнительно малых плотностях частиц, т. е. когда выполняется неравенство $gL \gg 1$. В этом случае $k_1^2 \ll 1$ и состояния, характеризуемые кноидальными волнами второго типа $\Phi_c(\xi, k)$, обладают бо́льшими значениями энергии, чем состояния, описываемые функциями $\Phi_d(\xi, k)$.

Итак, в мягких молекулярных цепочках, способных удерживать небольшое число избыточных электронов, при больших параметрах нелинейности состояние движения электронов описывается кноидальными функциями (10.17). Эти функции характеризуют перемещение электронов вдоль цепочки с единой скоростью V. Максимумы вероятностей их распределения по цепочке находятся на равных расстояниях aL. В движущейся системе координат ξ ширины вероятностей распределения и областей локальных деформаций цепочки определяются величиной $2\pi/g$. Она тем меньше, чем больше параметр нелинейности g.

При учете рассмотренного в разд. 9 эффекта спаривания электроны будут перемещаться по цепочке парами с противоположными спинами в каждой паре. При спаривании электронов эффективное значение параметра нелинейности g удваивается и ширина области

распределения каждой пары сокращается вдвое. Каждая пара электронов связана с единой локальной деформацией, обусловленной их автолокализацией (нелинейность).

В работе Л. С. Брижик и автора [67] была сделана попытка использовать рассмотренные выше периодические решения уравнений для качественного объяснения механизма сверхпроводимости некоторых молекулярных кристаллов.

В 1981 г. во Франции было обнаружено, что молекулярные кристаллы $(TMTSF)_2—ClO_4$ при атмосферном давлении и температуре 1,2 К переходят в сверхпроводящее состояние. Эти кристаллы состоят из стопок параллельно уложенных плоских молекул тетраметилтетраселенфульвалена (TMTSF). Между стопками расположены цепи молекул перхлората ClO_4. В кристалле часть электронов молекул TMTSF переходит на молекулы перхлората. В результате в стопке периодически расположенных молекул некоторые молекулы теряют электроны. При потере электрона в электронной оболочке молекулы образуется «пустое место», которое называют «дыркой». Образующиеся дырки в стопке молекул играют роль положительно заряженных квазичастиц. Вследствие обменных эффектов они могут перемещаться вдоль стопок, образуя зону проводимости. Именно эти квазичастицы ответственны за высокую анизотропию проводимости кристалла и переход его в сверхпроводящее состояние при температуре ниже 1,2 К.

Природа сверхпроводимости в такой квазиодномерной структуре до сих пор не выяснена. Весьма существенно, что в стопках между плоскими молекулами TMTSF действуют слабые вандерваальсовы силы, поэтому межмолекулярные расстояния легко изменяются (мягкая структура). Вследствие этого возникает сильное деформационное взаимодействие между смещениями равновесных положений молекул и квазичастицами, которое приводит к нелинейным эффектам. Потому теория движения квазичастиц вдоль стопок плоских молекул должна строиться на основе нелинейных уравнений.

Если стопки плоских молекул можно рассматривать как мягкую полимерную цепочку с большим взаимодействием между квазичастицами и вызываемыми ими локальными деформациями, то к такой цепочке можно применить результаты, полученные в этом и предыдущем разделах. Число квазичастиц на плоских молекулах цепочки меньше числа молекул. Если учесть эффект спаривания, то число пар квазичастиц тем более меньше числа молекул. Таким образом, осуществляется случай малой плотности пар квазичастиц. Это обстоятельство обычно не учитывается в других попытках объяснить сверхпроводимость молекулярных кристаллов. Авторы этих попыток обычно исходят из одномерной модели металла без должного учета процессов нелинейности, приводящей к автолокализации пар квазичастиц.

Согласно нелинейной теории, приводящей к автолокализации спаренных электронов, движение таких электронов в цепочке сопровождается спариванием. Образующиеся автолокализованные пары распределяются равномерно по цепочке и двигаются с постоянной

скоростью как единое целое без потери энергии. Такое согласованное движение пар электронов вместе с соответствующими локальными деформациями, по-видимому, отражает экспериментально наблюдаемый эффект сверхпроводимости при низких температурах.

При повышении температуры нарушается когерентность обменных взаимодействий между молекулами. Это вызывает сокращение ширины зоны проводимости квазичастиц и увеличение их эффективной массы, т. е. снижает роль дисперсии в цепочке, которая должна компенсировать эффект нелинейности, чтобы образовать автолокализованные состояния солитонного типа.

11. Внутриклеточная динамика и солитоны

Представление о живой клетке как о некотором количестве бесструктурной жидкости (цитоплазмы), заполняющей клеточную оболочку, сравнительно долго разделялось многими учеными. Однако исследование клеток с помощью электронных микроскопов показало, что клетка содержит многие включения — органеллы, окруженные, в свою очередь, мембранами. Такими органеллами являются: митохондрии, синтезирующие молекулы АТФ; рибосомы и их комплексы — полисомы, участвующие в синтезе нужных клетке белков; лизосомы — образования, содержащие ферменты, переваривающие чужеродные молекулы, и др.

Существенный шаг в понимании внутриклеточной структуры был сделан в 60-х годах при использовании высоковольтных электронных микроскопов с энергией электронного пучка 10^6 эВ, в десять раз превышающей энергию стандартных электронных микроскопов [68]. Это, с одной стороны, резко увеличило разрешающую способность микроскопов и, с другой стороны, позволило изучать объемную структуру клеток в слоях толщиной до нескольких микрометров, а не в тончайших срезах клеток.

Уже первые исследования пространственной структуры клеток с помощью высоковольтных электронных микроскопов показали, что все внутреннее пространство клетки пронизано системой белковых микронитей и трубочек, которые и удерживают органеллы клетки в определенных местах, определяют форму клетки, ее изменение и все внутренние движения в клетке. Такая система микропитей и микротрубочек была названа *цитоскелетом* (клеточным скелетом). Первое сообщение о наличии цитоскелета в каждой клетке было встречено с недоверием, которое подкреплялось тем, что структура цитоскелета оказалась не постоянной, а зависела от внешних условий и стадии функционирования и развития клетки.

Микронити и трубочки цитоскелета образованы пучками белковых молекул, имеющих длину порядка 300—1500 Å. Эти молекулы имеют тенденцию образовывать еще более длинные агрегаты путем полимеризации: голова—хвост, хвост—голова. Белковые молекулы, входящие в состав цитоскелета, определяют все внутренние движения в клетке, перенос энергии и внутреннюю связь. Выполнение всех таких действий осуществляется за счет энергии гидролиза молекул

АТФ. Процесс гидролиза, по-видимому, регулируется так же, как в мышечных волокнах, изменением концентрации ионов Ca^{++}.

В настоящее время все более и более укрепляется мнение [69], что все типы движения мышечных волокон, так же как и все межклеточные и внутриклеточные движения немышечных клеток, определяются небольшим количеством сократительных белков, образованных актиновыми, миозиновыми, тропомиозиновыми и тропониновыми белковыми молекулами. В мышечных волокнах эти белки плотно заполняют периодически повторяющиеся участки (саркомеры) в виде параллельно уложенных тонких и толстых нитей.

Актиновые волокна были выделены из немышечных клеток только в 1966 г. Было показано, что эти волокна имеют физические, химические и биологические свойства, тождественные с мышечными волокнами. Детальная картина расположения актиновых молекул в клетке была получена только при использовании иммунофлуоресценции.

В методе иммунофлуоресценции к специально приготовленным антителам, избирательно присоединяющимся только к определенному типу белковой молекулы, прикрепляется молекула флуоресцирующего красителя. В клетке антитело с флуоресцирующей молекулой присоединяется к соответствующему белку. При освещении клетки ультрафиолетовым светом краситель излучает свет, который и позволяет определить месторасположение белка.

Было установлено, что молекулы актина образуют длинные (с размером, близким поперечнику клетки) волокна со средней толщиной порядка 60 Å. Один конец такого волокна прикреплен непосредственно к наружной (цитоплазматической) мембране.

Значительно сложнее обстояло дело с обнаружением миозиновых нитей в немышечных клетках. Молекулы миозина в мышечных волокнах образуют толстые нити диаметром 150 Å. Нити миозина в немышечных клетках короче и тоньше. Располагаются в такой нити длинные молекулы (около 2000 Å) миозина хвостами друг к другу (как и в мышечном волокне) так, что их головы в основном находятся на концах нити. Миозиновые нити имеют средний диаметр, близкий к диаметру актиновых нитей, поэтому в электронных микроскопах нельзя было отличить их от актиновых нитей. В связи с малой концентрацией миозиновых молекул их не удавалось выделить из клеток. Укрепилось мнение, что миозиновых молекул в немышечной клетке нет. Только использование иммунофлуоресценции позволило надежно установить наличие молекул миозина и тропомиозина в немышечных волокнах.

Наличие сократительных актиновых и миозиновых молекул в немышечных клетках подтверждает гипотезу об общем способе преобразования химической энергии гидролиза молекул АТФ в механическое движение.

Такой процесс будет осуществляться по механизму скольжения. Если миозиновая нить попадает между двумя актиновыми, то возникающие при гидролизе молекул АТФ солитоны, перемещаясь к середине миозинового волокна, будут укорачивать актиновые нити

путем образования петель. Если же вблизи миозиновой нити окажутся противоположно направленные концы двух актиновых нитей, прикрепленных другими концами к внешней мембране, то движение солитонов в миозиновом волокне приведет к деформации формы клетки.

Как отмечают авторы работы [35], «в связи с тем что альфа-спиральные участки составляют значительную часть белковых структур цитоскелета клетки, они могут выполнять также функцию передачи энергии и информации в клетке».

Существенное значение в жизнедеятельности клетки играют трансмембранные гликопротеины. Гликопротеины представляют собой ковалентно-связанную комбинацию белковой молекулы с разветвленной цепью углеводных остатков — полисахаридов [44, § 11.1]. Длинная белковая часть имеет в основном альфа-спиральную структуру. Она пронизывает всю толщу внешней мембраны клетки. Разветвленная полисахаридная часть выступает во внешнюю сторону клетки. Гликопротеины в значительной степени определяют специфичность клеток и их способность узнавать друг друга, слипаться друг с другом и передавать через мембрану внутрь клетки внешние сигналы, используя гормоны, нейроны, иммуноглобулины и т. д.

Информация об изменениях во внешнем окружении клетки передается через всю толщу двойного липидного слоя по альфа-спиральной части белковой молекулы в виде солитонов.

Таким образом, представление о переносе информации с помощью солитонов может дать понимание механизмов переноса информации из внешней области внутрь клетки [35].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Korteweg D. J., Vries G. de.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves.— Philos. Mag., 1895, vol. 39, p. 422—443.
2. *Zabusky N. J.* Synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction.— In: Nonlinear partial differential equations. N. Y.: Acad. press, 1967, N 4, p. 222—258.
3. *Самарский А. А.* Современная прикладная математика и вычислительный эксперимент.— Коммунист, 1983, т. 18, с. 31—42.
4. *Fermi E., Pasta J. R., Ulam S. M.* Studies of nonlinear problem. 1955 (Los Alamos Rep.; NLA-1940).
5. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states.— Phys. Rev. Lett., 1965, vol. 15, p. 240—243.
6. *Landau L.* Über die Bewegung der Elektronen in Kristallgitter.— Phys. Ztschr. Sowjetunion, 1933, Bd. 3, S. 664—666.
7. *Пекар С. И.* Автолокализация электрона в диэлектрической инерционно-поляризующейся среде.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1946, т. 16, вып. 4, с. 335—340.
8. *Пекар С. И.* Исследования по электронной теории кристаллов. М.: Гостехиздат, 1951. 256 с.
9. *Miura P. M., Gardner C. S., Kruskal M. D.* Korteweg—de Vries equation and generalizations.— J. Math. Phys., 1968, vol. 9, p. 1204—1209.
10. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питневский Л. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния. М.: Наука, 1980. 320 с.
11. *Франк Г. М.* Биофизика живой клетки.— Избр. тр. М.: Наука, 1982, с. 48—59.

12. *Green D. E.* Mechanism of energy transduction in biological systems.— Science, 1978, vol. 131, p. 583—584.
13. *Давыдов А. С.* Элементарные возбуждения типа солитонов в биологии.— В кн.: Методологические и теоретические проблемы в биофизике. М.: Наука, 1979, с. 243—254.
14. *Davydov A. S.* Solitons as energy carriers in biological systems.— Stud. Biophys., 1977, vol. 62, N 1, p. 1—8.
15. *Davydov A. S.* Solitons and energy transfer along protein moleculs.— J. Theor. Biol., 1977, vol. 66, p. 379—387.
16. *Давыдов А. С.* Солитоны в квазиодномерных молекулярных структурах.— Успехи физ. наук, 1982, т. 138, вып. 4, с. 603—643.
17. *Davydov A. S.* Energy transfer along alpha-helical proteins.— In: New horizons of quantum chemistry. Dordrecht: Reidel, 1983, p. 65—75.
18. *Hyman Y. M., McLaughlin D. W., Scott A. S.* On Davydov's alfa-helix solitons.— Physica D, 1981, vol. 3D, N 1/2, p. 23—45.
19. *Scott A. C.* The laser-Raman spectrum of Davydov's solitons.— Phys. Lett. A, 1981, vol. 86, N 1, p. 60—62.
20. *Scott A. C.* Dynamics of Davydoy's solitons.— Phys. Rev. A — Gen. Phys., 1982, vol. 26, N 1, p. 578—595.
21. *Scott A. S.* The vibrational structure of Davydov solitons.— Phys. scr., 1982, vol. 25, p. 651—658.
22. *Scott A. C.* Solitons on the alpha-helix protein.— In: Structure and dynamics nucleic acid and proteins. N. Y.: Adenine press, 1983, p. 389—404.
23. *Davydov A. S., Kislukha N. I.* Solitons in one-dimensional molecular chains.— Phys. status solidi (b), 1976, vol. 75, p. 735—742.
24. *Давыдов А. С., Кислуха Н. И.* Солитоны в одномерных молекулярных цепях.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1976, т. 71, вып. 9, с. 1090—1098.
25. *Davydov A. S., Kislukha N. I.* Solitary excitation in one-dimensional molecular chains.— Phus. status solidi (b), 1973, vol. 59, p. 465—470.
26. *Давыдов А. С.* Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наук. думка, 1984. 288 с.
27. *Давыдов А. С., Еремко А. А.* Радиационное время жизни солитонов в молекулярных кристаллах.— Укр. физ. журн., 1977, т. 22, № 6, с. 881—892.
28. *Давыдов А. С., Еремко А. А., Сергеенко А. И.* Солитоны в α-спиральных белковых молекулах.— Укр. физ. журн., 1978, т. 23, № 6, с. 883—892.
29. *Еремко А. А., Сергеенко А. И.* К теории солитонов в молекулярных цепях.— ФТТ, 1982, т. 24, № 12, с. 3720—3722.
30. *Скотт Э.* Давыдовские солитоны в альфа-спиральных белковых молекулах.— В кн.: Современные проблемы физики твердого тела и биофизики. Киев: Наук. думка, 1982, с. 176—179.
31. *Chirgadze Yu. N., Nevskaya N. A.* Infrared spectra and resonance interaction of Amide-I and II vibration of α-helix.— Biopolymers, 1976, vol. 15, p. 607—608.
32. *Куприевич В. А., Кудрицкая З. Г.* Давыдовские солитоны и определение параметров экситон-фононного взаимодействия.— В кн.: Современные проблемы физики твердого тела и биофизики. Киев: Наук. думка, 1982, с. 96—105.
33. *Eilbeck J. C.* «Davydov solitons on the alpha-helix»: A 16 mm mute film aviable from Swift Film Productions. L., 1979.
34. *Brizhik L. S., Davydov A. S.* Soliton excitation in one-dimensional molecular systems.— Phys. status solidi (b), 1983, vol. 115, N 2, p. 615—630.
35. *Lomdahl P. S., Layne S. P., Bigio I. J.* Solitons in biology.— Los Alamos Sci., 1984, N 10, p. 2—22.
36. *Huxly A. F.* Theory of muscular contraction.— Progr. Biophys. and Biophys. Chem., 1957, vol. 7, p. 255—286.
37. *Дещеревский В. И.* Две модели мышечного сокращения.— Биофизика, 1970, т. 13, с. 53—59.
38. *Волькенштейн М. В.* Физика мышечного сокращения.— Успехи физ. наук, 1970, т. 100, вып. 4, с. 681—717.
39. *Murray J. M., Weber A.* The cooperative action of muscle proteins.— Sci. Amer., 1974, vol. 230, N 2, p. 59—61.

40. *Давыдов А. С.* Квантовая теория сокращения мышц.— Биофизика, 1974, т. 19, № 4, с. 670—676.
41. *Davydov A. S.* Molecular mechanism of contraction of striated muscles.— Stud. Biophys., 1974, vol. 47, p. 221—228.
42. *Давыдов А. С.* Молекулярный механизм сокращения поперечнополосатых мышц.— Укр. физ. журн., 1975, т. 20, № 2, с. 179—184.
43. *Давыдов А. С.* Молекулярный механизм сокращения поперечнополосатых мышц.— В кн.: Биофизика и биохимия мышечного сокращения. М.: Наука, 1976, с. 254—257.
44. *Давыдов А. С.* Биология и квантовая механика. Киев: Наук. думка, 1979. 296 с. См. также *Davydov A. S.* Biology and quantum mechanics. N. Y.: Pergamon press, 1982.
45. *Pagulskis K. M.* et al. Oblique impacts and their transformation into the continuous motion: Theory of machines and mechanismus. Moscow: Nauka, 1976. 205 p.
46. *Девятков Н. Д.* Влияние электромагнитного диапазона длин волн на биологические объекты.— Успехи физ. наук, 1973, т. 110, вып. 3, с. 452—454.
47. *Банников В. С., Рожков С. Б.* Резонансное поглощение миллиметровых волн бактериальными клетками.— Докл. АН СССР, 1980, т. 255, № 3, с. 746—748.
48. *Девятков Н. Д., Бецкий О. Б., Гелавич Э. А.* Воздействие электромагнитных колебаний миллиметрового диапазона длин волн на биологические системы.— Радиобиология, 1981, т. 21, № 2, с. 163—171.
49. *Девятков Н. Д., Галант М.* Особенности частотно-зависимых биологических эффектов при воздействии электромагнитных излучений.— Электроника СВЧ, 1982, вып. 1(348), с. 46—50.
50. *Fröhlich H.* The biological effects of microwaves and related questions.— Adv. Electron. and Electron Phys., 1980, vol. 53, p. 85—110, 143—152.
51. *Eremko A. A.* Photodissociation of Davydov solitons: Prepr. Inst. Theor. Phys. AN Ukr. SSR, ITP-83-109E. Kiev, 1983. 8 p.
52. *Webb S. J., Stoneham M. E.* Resonances between 10^{11} and 10^{12} Hz in active bactereal cells as seen by laser Raman spectroscopy.— Phys. Lett. A, 1977, vol. 60, N 3, p. 267—268.
53. *Vakhnenko A. A., Gaididei Yu. B., Eremko A. A.* Raman scattering by Davydov solitions: Prepr. Inst. Theor. Phys. AN Ukr. SSR ITP-84-13E. Kiev, 1984. 19 p.
54. *Webb S. J.* Laser-Raman spectroscopy of living cells.— Phys. Rep., 1980, vol. 60, N 4, p. 201—224.
55. *Банников В. С., Безручко С. М., Грищанкова Е. В.* и др. Исследование бактериальных клеток B. megaterium методом комбинационного рассеяния света.— Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 2, с. 478—480.
56. *Drissler F., Santo L.* Coherent excitations and Raman effect.— In: Coherent excitations in biological systems. Berlin; Heidelberg: Springer, 1983. p. 6—9.
57. *Lomdahl P. S., MacNeil L., Scott A. C.* An assignment to internal soliton vibrations of laser-Raman lines from living cell.— Phys. Lett. A, 1982, vol. 92, N 4, p. 207—210.
58. *Del Gindice E., Dolgia S., Milani M.* Solitons in biological systems at low temperature.— Phys. Scr., 1981, vol. 23, p. 307—310.
59. *Layne S. P.* A possible mechanism for general anesthesia.— Los Alamos Sci., 1984, vol. 10, p. 23—26.
60. *Vault D., Parkas J. H., Chance B.* Electron tunneling in sytochromes.— Nature, 1967, vol. 215, p. 642—646.
61. *Petrov E. G., Ukrainskii I. I., Kharkyanen V. N.* Donor-acceptor model of electron transfer through proteins.— J. Theor. Biol., 1978, vol. 73, p. 29—50.
62. *Davydov A. S.* The role of proteins in electron transport at large distances.— Phys. status solidi (b), 1978, vol. 90, p. 457—464.
63. *Давыдов А. С.* Влияние электрон-фононного взаимодействия на движение электрона в одномерной молекулярной цепи.— Теорет. и мат. физика, 1979, т. 40, № 3, с. 408—421.
64. *Брижик Л. С., Давыдов А. С.* Спаривание электронов в мягких молекулярных цепях.— Физика низких температур, 1984, т. 10, № 7, с. 748—753.

65. *Hinkle P. C., McCarty R. E.* How cell make ATP.— Sci. Amer., 1978, vol. 238, p. 104—123.
66. *Давыдов А. С., Пестряков Г. М.* Пространственно-периодические возбуждения в молекулярных цепочках с сильным электроколебательным взаимодействием: Препр. ИТФ АН УССР ИТФ-81-127Р. Киев, 1981, с. 1—23.
67. *Брижик Л. С., Давыдов А. С.* Периодические решения и нелинейная теория высокой проводимости квазиодномерных молекулярных кристаллов.— Физика низких температур, 1984, т. 10, № 4, с. 358—366.
68. *Porter K. R., Tuker J. B.* The ground substance of the living cell.— Sci. Amer., 1981, vol. 244, N 3, p. 40—51.
69. *Lazarides E., Revel J. P.* The molecular basis of cell movement.— Sci. Amer., 1979, vol. 240, N 5, p. 88—101.
70. *Davydov A. S., Zolotariuk A. V.* Electrons and excitons in nonlinear molecula chains.— Phys. scr., 1983, vol. 28, p. 249—256.

УДК 519.6:533.6.01

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Т. Г. Елизарова, Б. Н. Четверушкин

1. Кинетическая модель

В подавляющем большинстве случаев алгоритмы для расчета газодинамических течений конструируются на основе непосредственного использования уравнений Эйлера или Навье—Стокса. При таком построении алгоритмов как бы в тени остается тот факт, что сами уравнения газовой динамики получаются при соответствующих предположениях относительно вида функции распределения непосредственно из уравнения Больцмана или других кинетических уравнений, например Бхатнагара—Гросса—Крука БГК [1].

Однако в последнее время появилась целая серия работ, в которых кинетические уравнения, описывающие поведение функции распределения, используются непосредственно для нахождения газодинамических величин — плотности, скорости и температуры. По всей видимости, одной из первых работ подобного рода следует считать работу [2].

В этой работе использовалась следующая простая модель, описывающая перенос частиц. Предположим, что в момент времени $t = t^j$ в каждой точке пространства функция распределения f может быть записана в виде локально-максвелловского распределения:

$$f_0^j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}, t^j) = \rho^j(\mathbf{x}, t^j)\,[2\pi R T^j(\mathbf{x}, t^j)]^{-3/2} \times$$
$$\times \exp\left[-(\zeta_\alpha - u_\alpha^j(\mathbf{x}, t^j))^2 / 2RT^j(\mathbf{x}, t^j)\right], \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

где ρ, u, T — локальные макроскопические параметры газа; R — газовая постоянная; ζ — скорость молекул газа; $\mathbf{x}$ — пространственная координата.

Затем на отрезке времени $t \in [t^j, t^{j+1}]$ происходит бесстолкновительный разлет газа, описываемый уравнением переноса

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \zeta_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{1.2}$$

В момент времени $t = t^{j+1}$ функция распределения вновь становится локально-максвелловской, но уже с новыми значениями газодина-

мических параметров ρ^{j+1}, u^{j+1}, T^{j-1}, которые определяются с помощью выражений

$$\rho^{j+1} = \int_{-\infty}^{\infty} f^{j+1}\, d\zeta, \qquad (\rho u)^{j+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta f^{j+1}\, d\zeta,$$
$$E^{j+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\, \zeta^2 f^{j+1}\, d\zeta. \tag{1.3}$$

Здесь $E = \rho\,(u^2/2 + {}^3/_2\, RT)$ — полная энергия.

В рассматриваемой работе [2] уравнение переноса решалось в лагранжевой системе координат. Результаты расчета задачи о движении одномерной ударной волны дали хорошее совпадение с точным решением, что позволило сделать вывод о принципиальной возможности применения такого подхода к определению параметров газодинамических течений.

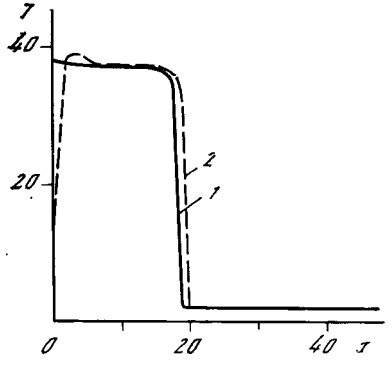


Рис. 1. Решения газодинамической задачи о поршне

1 — по кинетическому методу;
2 — по методу С. К. Годунова

В работе [3] на основе рассмотренной кинетической модели (1.1)—(1.3) в эйлеровой системе координат строились разностные схемы для нахождения газодинамических величин. Там же приводятся примеры расчета одномерных тестовых задач и отмечается, что полученные результаты по своей точности превосходят аналогичные данные, полученные на основе применения схем Лакса—Вендрофа и Маккормака.

В работе [4] проведено дальнейшее уточнение исходной модели 1.1)—(1.3). В частности, для описания течения вязкого и теплопроводного газа предложено в качестве исходного использовать следующий вид функции распределения:

$$f(\mathbf{x}, \zeta, t^j) = f_0(\mathbf{x}, \zeta, t^j)\left[1 + \frac{p_{rs}}{p}\,\frac{m}{2kT}\, c_r c_s - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{5}\,\frac{q_r}{p}\,\frac{m}{kT}\, c_r \left(\frac{5}{2} - \frac{mc^2}{2kT}\right)\right], \tag{1.4}$$

где f_0 — локально-максвелловское распределение; $c = \zeta - u$; u — макроскопическая скорость газа; m — масса молекулы; p — давление. Тензор вязких напряжений p_{rs} и тепловой поток q_r определяются следующим образом:

$$p_{rs} = -\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} - \frac{2}{3}\,\delta_{rs}\,\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) + \delta_{\alpha\beta} p,$$
$$q_r = -\varkappa\, \partial T/\partial x_r. \tag{1.5}$$

Здесь μ — коэффициент вязкости; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

Из результатов расчетов работы [4] приведем данные численного решения задачи о поршне, которые сравниваются с аналогичными результатами, полученными с помощью схемы С. К. Годунова (рис. 1). Результаты, полученные с помощью кинетической модели, для большой скорости поршня ($M = 8$) близки к аналитическому решению. Отношение параметров в области энтропийного следа не превышает 2%, в то время как по схеме С. К. Годунова отклонение составляет порядка 100%.

Из других работ, посвященных использованию кинетических моделей для расчета газодинамических течений, укажем работы [5, 6].

2. Квазигазодинамические уравнения

Полученные на основе использования кинетических моделей результаты свидетельствуют о том, что данный подход может оказаться весьма полезным для численного расчета газодинамических течений. Однако, к сожалению, в этом случае приходится решать (пусть и относительно простое) уравнение переноса (1.2), зависящее, помимо пространственных переменных x и времени t, еще от скоростей молекул ζ. Наличие дополнительных переменных резко увеличивает объем вычислений, необходимый для определения газодинамических параметров, по сравнению с традиционными методами расчета.

Правда, как отмечалось в работах [2—4], для дискретизации уравнения (1.2) по переменной ζ можно использовать сравнительно редкую сетку, состоящую из 10—20 узлов. Это делает практически допустимым использование алгоритмов [2—4] при расчете одномерных задач. Однако данный подход вряд ли целесообразно использовать при массовых газодинамических расчетах пространственно-двумерных задач, даже если предположить, что число точек по каждому из направлений ζ остается порядка 10—20. Более того, в некоторых случаях из-за появления негативного «эффекта луча», с которым часто приходится сталкиваться при расчете задач нейтронной физики и динамики излучающего газа [7—9], общее число точек по переменной ζ, необходимое для достаточной точности численного решения, может достигнуть 10^3 и более.

В работах [10—13] на основе кинетической модели (1.1)—(1.3), используя аналитические преобразования, получены относительно простые уравнения типа уравнений газовой динамики. Эти уравнения, используемые в численных расчетах, уже не зависят от дополнительных переменных ζ. Получим данную систему уравнений.

Основываясь на модели (1.1)—(1.3), определим функцию распределения на новом шаге по времени с помощью выражения

$$f^{j+1}(\mathbf{x}, \zeta, t^{j+1}) = f_0^j(\mathbf{x} - \zeta\tau, \zeta, t^j), \tag{2.1}$$

где f_0^j — локально-максвелловская функция на слое t^j; $\tau = t^{j+1} - t^j$.

части уравнения (2.10) с весами 1, ξ, $\xi^2/2$, предположим, что функцию распределения f можно представить в виде (1.4).

При вычислении интегралов, входящих в правую часть уравнения (2.10), ограничимся предположением о локально-максвелловском характере функции распределения $f = f_0$.

Выпишем полученную таким образом систему уравнений на примере плоского слоя:

$$\frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho u^2 + p), \tag{2.11}$$

$$\frac{(\widehat{\rho u}) - \rho u}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = \frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho u^3 + 3pu), \tag{2.12}$$

$$\frac{\hat{E} - E}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} - \mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\varkappa\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[u^2(E + 2p) + \frac{p}{\rho}(E + p)\right]. \tag{2.13}$$

3. Методы численного решения

Рассмотрим методы численного решения системы уравнений (2.4)—(2.6), которые назовем «кинетическими алгоритмами». Включение в это название термина «кинетический» должно подчеркивать тот факт, что рассматриваемые методы применяются к решению системы уравнений (2.4)—(2.6), полученной на основе использования кинетической модели (1.1)—(1.3).

Разностную схему для решения системы (2.4)—(2.6) будем строить следующим образом (см. [11—13]). Аппроксимируем пространственные производные, входящие в левую часть уравнений, с помощью центральных разностей. Например, для членов, входящих в уравнение движения (2.8), аппроксимация примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) \simeq \frac{\rho_{i+1}u_{i+1}^2 + p_{i+1} - \rho_{i-1}u_{i-1}^2 - p_{i-1}}{2h}. \tag{3.1}$$

Для дополнительных вязких членов, стоящих в правых частях, разностная аппроксимация будет также основана на использовании центральных разностей:

$$\tau\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho u^2 + p) \simeq \frac{1}{h}\left[\frac{1}{V}\frac{\rho_{i+1}u_{i+1}^2 + p_{i+1} - \rho_i u_i^2 - p_i}{h} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{V}\frac{\rho_i u_i^2 + p_i - \rho_{i-1}u_{i-1}^2 - p_{i-1}}{h}\right], \tag{3.2}$$

где h — шаг равномерной сетки.

Времена τ, стоящие в левых частях системы (2.4) — (2.6), формально идентичны. Однако члены типа $[(\rho u)^{j+1} - (\rho u)^j)]/\tau$ совпадают с разностной аппроксимацией соответствующих производных по времени в уравнениях Эйлера или Навье—Стокса. Члены же, стоящие в правых частях, аналогичны (пусть и весьма своеобразным)

вязким членам. Поэтому выбор временно́го шага для левой части системы (2.4) — (2.6) достаточно автономен. В правой же части его величина тесно взаимосвязана с шагом пространственной сетки, так же как длина свободного пробега связана с временем между столкновениями молекул [13].

Нарушение связи между шагом по времени и пространству при аппроксимации правых частей (2.4) — (2.6) может привести при уменьшении τ к появлению нефизических осцилляций. Такие осцилляции имеют место при расчете задач газовой динамики с малой искусственной вязкостью. Избавиться от этих осцилляций можно одновременно сгущая шаг пространственной сетки. Однако такой подход, когда величина шага по пространству жестко зависит от шага по времени, неудобен с точки зрения вычислительной практики.

Значительно более удобным представляется согласование шага по времени, стоящего перед правыми частями, с шагом по пространству. Это время можно трактовать как длину бесстолкновительного разлета (в нашей модели шаг пространственной сетки h), деленную на характерную скорость (в данном случае скорость звука V) [11—13]. При этом коэффициент искусственной вязкости $\mu = h/V$ уже теряет связь с физическим параметром τ (где τ — эффективное время локальной максвеллизации функции распределения, т. е. характерное время установления локально-равновесного распределения частиц по скоростям), а зависит от шага сетки по пространству, поскольку степень размазывания ударных волн измеряется в числе шагов сетки, приходящихся на ширину фронта.

Введение h в коэффициент искусственной вязкости позволяет автоматически уменьшать ширину фронта ударной волны в областях с мелким шагом по пространству и увеличивать там, где сетка грубая, а также учитывать различие шагов по разным координатным направлениям.

Схемы с центральными разностями (3.1) обладают рядом преимуществ по сравнению со схемами, основанными на использовании направленных разностей. Преимущества связаны не только с более высоким порядком аппроксимации соответствующих членов, но и с тем, что вид разностного шаблона для схем с центральными разностями не зависит от направления скорости. Тем самым значительно естественней представляется описание газодинамических течений, в которых происходит столкновение ударных волн, их отражение от жестких стенок и т. д.

Однако эти преимущества схем с центральными разностями при решении модельного уравнения

$$\partial u/\partial t + u\partial u/\partial x = 0 \tag{3.3}$$

полностью ликвидируются их абсолютной неустойчивостью [15]. Поэтому достаточно интересной и важной представляется устойчивость разностной схемы при выполнении ограничений по Куранту на временной шаг:

$$\frac{(\widehat{\rho u}) - \rho u}{\tau} + (\rho u^2 + p)_{\mathring{x}} = \frac{h}{2V}(\rho u^3 + 3pu)_{\bar{x}x} \tag{3.4}$$

(где использованы обычные обозначения для разностных производных [15]), которая получена на основе использования аппроксимаций (3.1) и (3.2).

Не вдаваясь в подробный математический анализ схемы (3.4), отметим, что ее устойчивость представляется довольно естественной, учитывая сам способ ее получения [10—13]. Этот способ основан на интегрировании по скоростям ξ исходного кинетического уравнения (1.2), разностная схема для которого будет устойчива при выполнении ограничений по Куранту на временной шаг.

Отметим еще несколько моментов, связанных с практической реализацией кинетических алгоритмов. Если для устойчивости счета по явной схеме (3.4) необходимо выполнение условия Куранта $\tau < \min(h/V)$, где V — характерная скорость, включающая в себя скорость звука, то, как правило, счет ведется при следующем ограничении на временной шаг:

$$\tau < \alpha \min(h/V), \quad \text{где} \quad \alpha \simeq 0{,}3 \div 0{,}5. \tag{3.5}$$

При проведении расчетов было замечено, что члены со смешанными производными, например $\tau \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\rho u v^2 + up)$ ($\mathbf{V} = (u, v)$), появляющиеся при рассмотрении задач в пространственно-двумерной постановке, могут быть аппроксимированы простейшим способом

$$\tau \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\rho u v^2 + up) \simeq \tau (\rho u v^2 + up)_{x\mathring{y}} \tag{3.6}$$

или вообще быть отброшены. Это также упрощает практическое проведение расчетов с помощью кинетических алгоритмов.

Таким образом, разностная схема, используемая для расчета пространственно-двумерных течений в (x, y) геометрии, примет следующий вид:

$$\frac{\hat{\rho} - \rho}{\tau} + (\rho u)_{\mathring{x}} + (\rho v)_{\mathring{y}} = \frac{h_x}{2V}(\rho u^2 + p)_{\bar{x}x} + \frac{h_y}{2V}(\rho v^2 + p)_{\bar{y}y}, \tag{3.7}$$

$$\frac{(\widehat{\rho u}) - \rho u}{\tau} + (\rho u^2 + p)_{\mathring{x}} + (\rho u v)_{\mathring{y}} =$$

$$= \frac{h_x}{2V}(\rho u^3 + 3pu)_{\bar{x}x} + \frac{h_y}{2V}(\rho u v^2 + up)_{\bar{y}y}, \tag{3.8}$$

$$\frac{(\widehat{\rho v}) - \rho v}{\tau} + (\rho u v)_{\mathring{x}} + (\rho v^2 + p)_{\mathring{y}} =$$

$$= \frac{h_x}{2V}(\rho u^2 v + vp)_{\bar{x}x} + \frac{h_y}{2V}(\rho v^3 + 3pv)_{\bar{y}y}, \tag{3.8'}$$

$$\frac{\hat{E} - E}{\tau} + (u(E + p))_{\mathring{x}} + (v(E + p))_{\mathring{y}} =$$

$$= \frac{h_x}{2V}\left[u^2(E + 2p) + \frac{p}{\rho}(E + p)\right]_{\bar{x}x} +$$

$$+ \frac{h_y}{2V}\left[v^2(E + 2p) + \frac{p}{\rho}(E + p)\right]_{\bar{y}y}. \tag{3.9}$$

Приведем также кинетическую схему, используемую для одномерных расчетов в плоской геометрии:

$$\frac{\hat{\rho}-\rho}{\tau}+(\rho u)_{\mathring{x}}=\frac{h}{2V}(\rho u^2+p)_{\bar{x}x}, \tag{3.10}$$

$$\frac{(\widehat{\rho u})-\rho u}{\tau}+(\rho u^2+p)_{\mathring{x}}=\frac{h}{2V}(\rho u^3+3pu)_{\bar{x}x}, \tag{3.11}$$

$$\frac{\hat{E}-E}{\tau}+(u(E+p))_{\mathring{x}}=\frac{h}{2V}\left[u^2(E+2p)+\frac{p}{\rho}(E+p)\right]_{\bar{x}x}. \tag{3.12}$$

Следует отметить, что члены с весовым множителем h перед разностной трехточечной аппроксимацией вторых производных автоматически получаются, если вместо (2.2) использовать кусочно-постоянную на пространственном отрезке $x\in[x_i,\ x_{i+1}]$ функцию распределения [10].

Рассмотрим процедуру построения такого алгоритма на примере одномерного по пространству уравнения переноса.

Численное решение бесстолкновительного уравнения (1.2) удобно осуществлять следующим образом. Введем разностную сетку, разбивающую пространство скоростей ζ и координат x: $(\zeta_k,\ x_i)$. Внутри каждой разностной ячейки $\zeta_k\leqslant\zeta\leqslant\zeta_{k+1},\ x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$ будем предполагать f постоянной и не зависящей от x и ζ ($f=f_{i,k}$). Так как уравнение (1.2) является бесстолкновительным, то значение функции распределения $f_{i,k}^{j+1}$ к моменту времени t^{j+1} будет определяться лишь смещением $f_{i,k}^{j}$ на расстояние $\zeta_k\tau$. Осредняя полученные значения функции распределения внутри каждой пространственной ячейки $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$, получим разностную схему для решения уравнения (1.2):

$$f_{i,k}^{j+1}=\frac{1}{h}[f_{i,k}^{j}(h-\zeta\tau)+f_{i-1,k}^{j}\zeta\tau],\quad \zeta_k>0, \tag{3.13}$$

$$f_{i,k}^{j+1}=\frac{1}{h}[f_{i,k}^{j}(h+\zeta\tau)-f_{i+1,k}^{j}\zeta\tau],\quad \zeta_k<0. \tag{3.14}$$

При получении выражений (3.13) и (3.14) неявным образом предполагалось, что для всех скоростей ζ, функция распределения при которых не очень мала, выполняется условие [2]

$$|\zeta|\tau<h. \tag{3.15}$$

В случае невыполнения условия (3.15), в выражениях (3.13), (3.14) надо учитывать значения f^j не только в соседних по пространству ячейках, но и их величины в более далеких ячейках.

Определив функцию распределения $f_{i,k}^{j+1}$ на новом слое по времени с помощью выражений (3.13) и (3.14), затем найдем значения газодинамических параметров согласно (1.3). В свою очередь, с помощью найденных таким образом параметров ρ^{j+1}, u^{j+1}, E^{j+1}

[2] Для максвелловской функции f_0 условие ее малости будет обеспечено, например, если $|u-\zeta|>3RT$.

построим локально-максвелловскую функцию распределения на новом слое t^{j+1}

$$f_{i,k}^{j+1} = \rho_i^{j+1} (2\pi R T_i^{j+1})^{-1/2} \exp\left[- \frac{(\zeta_k - u_i^{j+1})^2}{2RT_i^{j+1}} \right]. \tag{3.16}$$

Однако, как уже отмечалось, такой путь определения газодинамических параметров связан с решением уравнений (3.13) — (3.14).

Процедуру численного решения можно существенно упростить. В самом деле, интересующие нас газодинамические параметры найдем, непосредственно интегрируя выражения (3.13) и (3.14):

$$\rho_i^{j+1} = \frac{1}{h} \left\{ \int_0^\infty [f_i^j (h - \zeta\tau) + f_{i-1}^j \zeta\tau] \, d\zeta + \int_{-\infty}^0 [f_i^j (h - \zeta\tau) - f_{i-1}^j \zeta\tau] \, d\zeta \right\}, \tag{3.17}$$

$$(\rho u)_i^{j+1} = \frac{1}{h} \left\{ \int_0^\infty \zeta [f_i^j (h - \zeta\tau) + f_{i-1}^j \zeta\tau] \, d\zeta + \right.$$
$$\left. + \int_{-\infty}^0 \zeta [f_i^j (h + \zeta\tau) - f_{i+1}^j \zeta\tau] \, d\zeta \right\}, \tag{3.18}$$

$$T_i^{j+1} = \frac{1}{h} \frac{1}{R\rho_i^{j+1}} \left\{ \int_0^\infty \frac{\zeta^2}{2} [f_i^j (h - \zeta\tau) + f_{i-1}^j \zeta\tau] \, d\zeta + \right.$$
$$\left. + \int_{-\infty}^0 \frac{\zeta^2}{2} [f_i^j (h + \zeta\tau) - f_{i+1}^j \zeta\tau] \, d\zeta - \frac{\rho_i^{j+1} [u_i^{j+1}]^2}{2} \right\}. \tag{3.19}$$

Проводя замену переменной $y = (u - \zeta)/\sqrt{2RT}$ и учитывая локально-максвелловский вид функции f^j, получим, что для точного нахождения интегралов, стоящих в правой части выражений (3.17) — (3.19), необходимо вычислять значения

$$\int_0^{|u|/\sqrt{2RT}} y e^{-y^2} dy, \qquad \int_0^{|u|/\sqrt{2RT}} y^3 e^{-y^2} dy,$$
$$\int_0^{|u|/\sqrt{2RT}} e^{-y^2} dy, \qquad \int_0^{|u|/\sqrt{2RT}} y^2 e^{-y^2} dy. \tag{3.20}$$

Первые два интеграла (3.20) находятся аналитически. Третий и четвертый интегралы могут быть определены с любой необходимой для расчетов степенью точности с помощью следующей процедуры. Составим достаточно подробные таблицы интегралов

$$\widetilde{\Phi}_p = \int_0^{y_p} e^{-y^2} dy, \qquad \widetilde{\Psi}_p = \int_0^{y_p} y^2 e^{-y^2} dy, \tag{3.21}$$

используя равномерный шаг по y ($\Delta y = \text{const}$). Для вычисления интеграла

$$\Phi_i = \int_0^{|u_i|/\sqrt{2RT_i}} e^{-y^2} dy \tag{3.22}$$

определим целую часть аргумента $p = E(|u_i|/(\sqrt{2RT_i}\Delta y))$. Выберем из таблицы (3.21) значения $\tilde{\Phi}_p$ и $\tilde{\Phi}_{p+1}$. С их помощью, используя линейную интерполяцию, определим Φ_i. Аналогично можно определить интеграл Ψ_i. Отметим, что использование таблиц с равномерным шагом по y существенно упрощает процедуру выборки необходимых значений Φ_p и Ψ_p.

Окончательно, применяя найденные таким образом значения Φ_i и Ψ_i, приведем выражения (3.17) — (3.19) к виду

$$\frac{\hat{\rho}_i - \rho_i}{\tau} + (\rho u)_{\mathring{x}} = \frac{h}{\pi^{1/2}} \left[\frac{1}{2} (2RT)^{1/2} \rho e^{-u^2/2RT} + \rho u \left(\frac{u}{|u|} \Phi \right) \right]_{\bar{x}x}, \tag{3.23}$$

$$\frac{(\widehat{\rho u})_i - (\rho u)_i}{\tau} + (\rho u^2 + \rho RT)_{\mathring{x}} =$$

$$= \frac{h}{\pi^{1/2}} \left[\rho u (2RT)^{1/2} e^{-u^2/2RT} + 2\rho RT \left(\frac{u}{|u|} \Psi \right) + \rho u^2 \left(\frac{u}{|u|} \Phi \right) \right]_{\bar{x}x}, \tag{3.24}$$

$$\frac{\hat{E}_i - E_i}{\tau} + \left(\rho u^3 + \frac{5}{2} \rho u RT \right)_{\mathring{x}} = \frac{h}{4\pi^{1/2}} \left[\rho (2RT)^{3/2} e^{-u^2/2RT} \left(2 + \frac{u^2}{2RT} \right) + \right.$$

$$\left. + \rho RT u \left(\frac{u}{|u|} \right) \left(2\Phi + \frac{1}{2} \Psi \right) + 3\rho u^2 (2RT)^{1/2} e^{-u^2/2RT} + 2\rho u^3 \left(\frac{u}{|u|} \Phi \right) \right]_{\bar{x}x}. \tag{3.25}$$

Выражения (3.23) — (3.25) по своей форме несколько напоминают разностные схемы метода С. К. Годунова, где в правые части соответствующих уравнений также входят вторые разности с коэффициентом $1/h$.

Система разностных уравнений (3.23 — 3.25) достаточно громоздка. Однако она сразу записывается в конечно-разностном виде. Опыт расчетов по ней послужил основой для выбора алгоритмов численного решения системы уравнений (2.4) — (2.6).

Следует отметить, что предлагаемый подход по сути дела является предельным переходом, при числе Кнудсена $\varepsilon \to 0$, для алгоритма построения макроскопических уравнений из τ-аппроксимации уравнения Больцмана. Как показано в работе [19], система уравнений (3.23) — (3.25) может быть получена из разностного аналога уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \zeta \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f) \tag{3.26}$$

при аппроксимации оператора $\zeta \partial f/\partial x$ разностями, направленными против потока

$$\frac{\hat{f}-f}{\tau} + \zeta f_{\overline{x}} - \frac{1}{2} h |\zeta| f_{\overline{x}x} = \frac{1}{\varepsilon} Q(f, f), \tag{3.27}$$

где $Q(f, f)$ — интеграл столкновений.

Умножая разностный аналог уравнения Больцмана (3.27) на сумматорные инварианты 1, ζ, $\zeta^2/2$ и интегрируя по пространству скоростей ζ, придем к схеме (3.23—3.25).

Таким образом, появляется согласованность уравнений, описывающих движение разностной среды на макроскопическом уровне с естественной дискретизацией на уровне функции распределения. Тем самым устанавливаются локальные связи между основными макроскопическими величинами ρ, u, T и конвективными и диффузионными потоками, стоящими в правых частях уравнений (3.23) — (3.25).

4. Граничные условия

Наличие в правых частях всех уравнений системы (2.4) — (2.6) членов со вторыми производными требует появления дополнительных граничных условий по сравнению с уравнениями Эйлера или Навье—Стокса. Эти условия могут быть определены с помощью рассмотрения поведения функции распределения вблизи границы.

Рассмотрим, например, как выводятся граничные условия на жесткой стенке. Предположим, что газ на стенке покоится:

$$u|_\Gamma = 0, \tag{4.1}$$

и его температура равна температуре стенки [3]:

$$T|_\Gamma = T_c. \tag{4.2}$$

Граничные условия (4.1) — (4.2) обычны для уравнений газовой динамики. Для получения третьего граничного условия рассмотрим более подробно взаимодействие газа со стенкой.

Предположим, что в слое газа, параметры которого обозначены в дальнейшем индексом 1, вблизи стенки существует локально-максвелловское распределение

$$f_{01} = \frac{\rho_1}{(2\pi R T_1)^{3/2}} \exp\left[-(\zeta_i - u_{i1})^2/2RT_1\right]. \tag{4.3}$$

На самой стенке параметры газа определяются также на основе локально-максвелловского распределения

$$f_{0c} = \frac{\rho_c}{(2\pi R T_c)^{3/2}} \exp\left[-\zeta^2/2RT_c\right]. \tag{4.4}$$

В выражении (4.4) учтены условия (4.1) и (4.2).

[3] Кроме условия (4.2), могут быть рассмотрены и другие граничные условия на температуру, вытекающие непосредственно из экспериментальных данных или решения задачи сопряженного (газ—стенка) теплообмена.

Предположим также, что количество вещества, приходящего на стенку, совпадает с количеством вещества, ее покидающего. Тогда

$$\int\limits_{(\zeta, n)<0} \zeta f_{01} d\zeta = \int\limits_{(\zeta, n)>0} \zeta f_{0c} d\zeta. \tag{4.5}$$

Здесь n — вектор внешней нормали к стенке.

Подставляя в (4.5) f_{01} и f_{0c} из (4.3) и (4.4) и проводя интегрирование, получим

$$\rho_c = \rho_1 \sqrt{\frac{T_1}{T_c}} \left(1 - u_1 \sqrt{\frac{\pi}{2RT_1}} + \frac{u_1}{2RT_1}\right). \tag{4.6}$$

Здесь u_1 — нормальная составляющая скорости газа вблизи стенки.

При получении выражения (4.6) предполагалось, что скорость газа вблизи стенки мала: $u_1^2/2RT_1 \ll 1$. Отметим, что аналогично (4.6) могут быть получены граничные условия и в том случае, если известна доля α испаренных или конденсирующихся молекул.

Основываясь на понятии функции распределения, можно получить другое граничное условие для стационарных течений вблизи твердой поверхности вида [1]:

$$\partial p/\partial n = o(\sqrt{\lambda}), \tag{4.7}$$

где λ — характерная длина свободного пробега. Это условие

$$\partial p/\partial n = 0 \tag{4.8}$$

достаточно широко используется для расчета течений несжимаемой жидкости.

Приведем еще один способ получения граничного условия для давления на твердой стенке, который используется при расчетах течений вязкой несжимаемой жидкости в естественных переменных. Вычисляя проекцию уравнения движения (2.5) на внешнюю нормаль к границе и учитывая (4.1), получим

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} (3pu_\alpha),$$

где x_α — координатное направление, совпадающее с направлением нормали.

При численном решении системы уравнений (2.4) — (2.6) для невязкого газа в качестве граничных условий на твердых стенках и осях симметрии будем ставить традиционные граничные условия скольжения и непротекания [18] $v = 0$, $\partial u/\partial n = 0$ (здесь u и v соответственно тангенциальная и нормальная составляющие скорости вблизи границы), которые дополним условием адиабатичности $\partial\varepsilon/\partial n = 0$ для внутренней энергии и условием (4.8) для давления.

5. Результаты численных расчетов

В этом разделе будут рассмотрены примеры численных расчетов некоторых пространственно-одномерных и двумерных задач, проведенных с помощью кинетических алгоритмов.

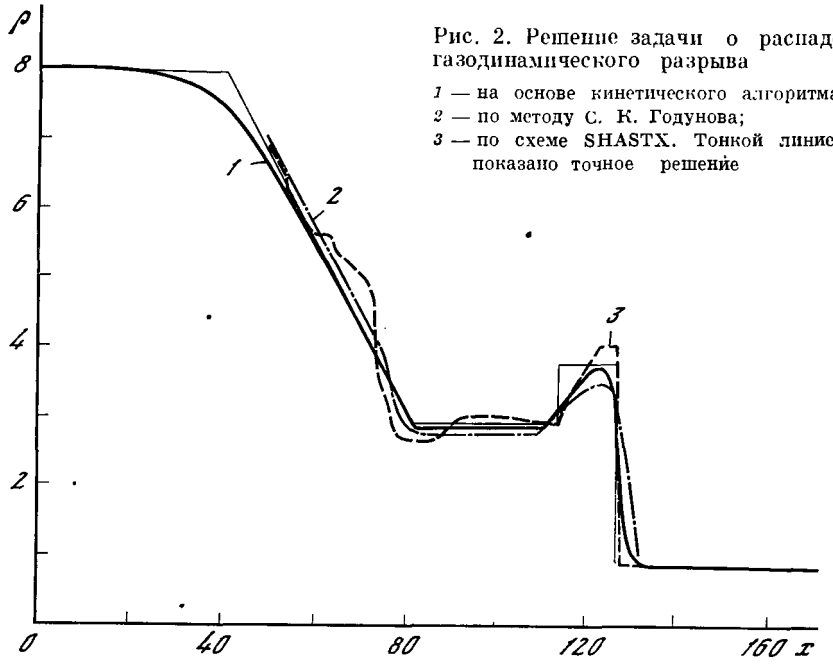


Рис. 2. Решение задачи о распаде газодинамического разрыва

1 — на основе кинетического алгоритма;
2 — по методу С. К. Годунова;
3 — по схеме SHASTX. Тонкой линией показано точное решение

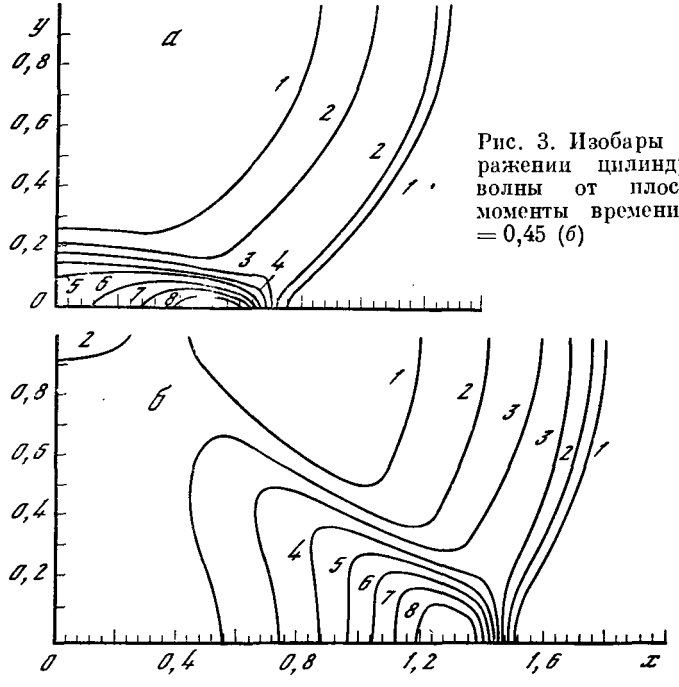


Рис. 3. Изобары в задаче об отражении цилиндрической ударной волны от плоской границы в моменты времени $t = 0{,}25$ (*а*), $t = 0{,}45$ (*б*)

а: *1* — p = 2,2;
2 — 3,4;
3 — 4,6;
4 — 5,8;
5 — 7,0;
6 — 8,2;
7 — 9,4;
8 — 10,6.
б: *1* — p = 1,6;
2 — 2,2;
3 — 2,8;
4 — 3,4;
5 — 4,0;
6 — 4,6;
7 — 5,2;
8 — 5,8

На рис. 2 приведены значения плотности, взятые из расчета задачи о распаде газодинамического разрыва на момент времени $t = 4$. При $t = 0$ в центре исследуемой области при $x = 80$ задан газодинамический разрыв. Слева от разрыва $\rho = 8$, $\rho RT = 480$, справа $\rho = 1$, $\rho RT = 1$. Использовалась равномерная сетка по пространству ($h = 1$). Общее число точек по пространству равно 160. Шаг по времени равен 0,02.

На том же рисунке приведены результаты расчета аналогичной задачи по схемам SHASTX С. К. Годунова (данные этих расчетов взяты из работы [16]). Видны определенные преимущества результатов численного решения, полученного с помощью кинетических алгоритмов, особенно в области волны разрежения.

Рассмотрим еще одну одномерную задачу, связанную с распространением малых возмущений. Для одномерной системы уравнений (2.7)—(2.9) слева задаются следующие граничные условия:

$$u(t, 0) = -Ca \sin \frac{2\pi}{\lambda} t,$$

$$\rho(t, 0) = \rho_0 \left(1 - a \sin \frac{2\pi}{\lambda} t\right), \qquad (5.1)$$

$$p(t, 0) = p_0 \left(1 - \gamma a \sin \frac{2\pi}{\lambda} t\right),$$

соответствующие колебаниям малой амплитуды. При этом температура $T(t, 0) = \frac{p}{\rho R} = \frac{p_0 (1 - \gamma a \sin 2\pi t/\lambda)}{R\rho_0 (1 - a \sin 2\pi t/\lambda)}$, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, $\rho_0 = 1$, скорость звука $C = 1$.

Решение системы (2.7)—(2.9) с помощью алгоритма (3.10)—(3.12) отличается от точного решения уравнений акустики, где отсутствует затухание возмущений. Расчеты велись на равномерной сетке $h = 1$, число точек $N = 300$, шаг по времени $\tau = 0{,}05$, $\lambda = 20$, $a = 0{,}01$ и 0,1.

Затухание амплитуды волны в 2 раза происходит примерно за 14—15 периодов. Для схемы FLIC [17] при идентичных условиях расчета это затухание происходит гораздо быстрее — за 2—3 периода.

Рассмотрим теперь некоторые результаты расчетов пространственно-двумерных задач, проведенные с помощью схемы (3.7)—(3.9).

В качестве первой рассматривалась задача об ударе цилиндрической ударной волны о плоскую стенку. В начальные моменты времени в четырех центральных ячейках задавалась зона повышенного давления $\rho RT = 100$. Вне горячей зоны $\rho RT = 1$, при этом $V = 0$. После начала газодинамического разлета течение достаточно быстро становится одномерным и остается таким до тех пор, пока цилиндрическая ударная волна не столкнется с жесткой стенкой, в результате чего течение приобретает явно выраженный двумерный характер. На рис. 3 представлены изолинии давления, рассчитанные на сетке 31×61 ($h_x = h_y = 0{,}0333$) на моменты времени $t = 0{,}25$ и $t = 0{,}45$. Видно, как зона повышенного давления, возникающая при

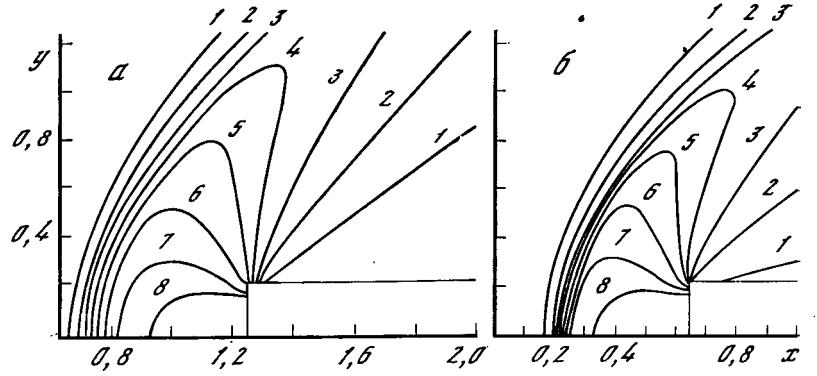


Рис. 4. Изобары в задаче сверхзвукового обтекания прямоугольного торца при $M = 2$ (*а*), $M = 3$ (*б*)

а: *1* — $p = 0{,}81$; *2* — 1,12; *3* — 1,43; *4* — 1,74; *5* — 2,06; *6* — 2,37; *7* — 2,68; *8* — 2,99.

б: *1* — $p = 0{,}79$; *2* — 1,59; *3* — 2,38; *4* — 3,17; *5* — 3,97; *6* — 4,76; *7* — 5,56; *8* — 6,35

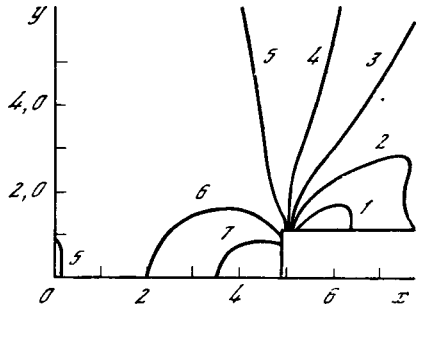


Рис. 5. Изобары в задаче взаимодействия сверхзвуковой струи с преградой, $M = 1{,}3$

1 — $p = 1{,}76$; *2* — 2,64; *3* — 3,52; *4* — 4,40; *5* — 5,30; *6* — 6,20; *7* — 7,00

таком столкновении, с течением времени удаляется от оси $x = 0$. При этом образуется типичная газодинамическая конфигурация, характеризующаяся одновременным наличием прямой ударной волны и отраженного течения.

На рис. 4 изображены линии уровней давления, получающиеся при расчете сверхзвукового обтекания прямоугольного торца. В качестве условий на свободных границах выбирались условия сноса.

Задача решалась на прямоугольной сетке 43×53 для двух значений скорости набегающего потока: $M = 2$ ($h_x = 0{,}05$; $h_y = 0{,}025$) и $M = 3$ ($h_x = h_y = 0{,}025$). В начальный момент времени в невозмущенный поток газа мгновенно вносилось препятствие в виде торца. В дальнейшем численный расчет проводился до выхода на стационарный режим, распределение давлений в котором представлено на рис. 4. Следует отметить, что общая картина течения хорошо согласуется с имеющимися данными расчетов других авторов [18].

Из других результатов приведем данные расчета взаимодействия сверхзвуковой струи с преградой. Геометрия расчетной области изображена на рис. 5: расстояние до преграды $L = 5{,}0$; высота преграды $H = 1{,}05$; ширина щели, через которую вдувается струя, равна 0,75. Отношение давления на входе в струе к давлению в невозмущенной области $p_{вх}/p_{невозм} = 3{,}6$. Скорость вдува $M = 1{,}3$.

Задача решалась на прямоугольной сетке 43×63, шаг по каждому направлению $h_x = 0{,}2$, $h_y = 0{,}125$.

На рис. 5 изображены пространственные профили давления, соответствующие выходу на стационарный режим. Обратим внимание на то, что данный расчет (в отличие от предыдущих двумерных расчетов, в которых $\gamma = 5/3$) проводился для уравнения состояния газа, соответствующего $\gamma = 1{,}4$.

В заключение отметим следующее. Результаты работ [2—6, 10—12] свидетельствуют о том, что использование кинетических моделей открывает новые, в том числе и довольно неожиданные, возможности в создании алгоритмов для расчета газодинамических течений. Используя в качестве физической основы кинетическую модель (1.1), (1.3), удается получить квазигазодинамическую систему уравнений (2.4)—(2.6). Эта система уравнений позволяет использовать исключительно простой вычислительный алгоритм (3.7)—(3.9) для расчета широкого класса задач, описывающих течение невязкого газа.

Авторы выражают благодарность Б. Н. Герасимову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. *Поткин В. А.* Кинетический анализ разностных схем для газовой динамики.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1975 т. 15, № 6, с. 1492—1498.
3. *Reitz R. D.* One-dimensional compressible gas dynamics calculations using the Boltzmann equation.— J. Comput. Phys., 1981, vol. 42, N 1, p. 108—123.
4. *Аристов В. В., Черемисин Ф. Г.* Решение уравнений Эйлера и Навье—Стокса на основе операторного расщепления кинетического уравнения.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 555—559.
5. *Aristov V. V., Tcheremissine F. G.* The numerical method for rarefied and continium gas flow.— In: Thirteenth Intern. symp. of rarefied gas dynamics. Novosibirsk, 1982, N 1, p. 147—149.
6. *Pullin D. I.* Direct simulation methods for compressible inviscid ideal-gas flow.— J. Comput. Phus., 1980, vol. 34, N 2, p. 231—244.
7. *Lathrop K. D.* Ray effects in discrete ordinates equations.— Nucl. Sci. Eng., 1968, vol. 32, p. 357—369.
8. *Басс Л. Г.* Конечно-разностные методы решения уравнения переноса в задачах со сложной геометрией: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 14. М., 1975. 75 с.
9. *Четверушкин Б. Н.* Решение двумерных задач динамики излучающего газа.— В кн.: Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. М.: Наука, 1982, с. 321—332.
10. *Волчинская М. И., Павлов А. Н., Четверушкин Б. Н.* Об одной схеме интегрирования уравнений газовой динамики: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 113. М., 1983. 12 с.
11. *Елизарова Т. Г., Павлов А. Н., Четверушкин Б. Н.* Использование кинетической модели для вывода уравнений, описывающих газодинамические течения: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 144. М., 1983. 12 с.
12. *Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* Об одном вычислительном алгоритме для расчета газодинамических течений.— Докл. АН СССР, 1984, т. 279, № 1, с. 80—83.

13. *Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 165. М., 1984. 23 с.
14. *Куликов Ю. Н., Четверушкин Б. Н.* Неявный разностный метод определения температуры в задачах радиационной газовой динамики.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1973, т. 13, № 1, с. 136—146.
15. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1978. 653 с.
16. *Жмакин А. И., Фурсенко А. А.* Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1980, т. 20, № 4, с. 1021—1030.
17. *Gentry R. E., Daly B. J.* An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems.— J. Comput. Phys., 1966, vol. 1, p. 87—118.
18. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 389 с.
19. *Лукшин А. В.* Разностные аналоги уравнения Больцмана и уравнения макроскопической динамики.— Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 7, с. 1202—1208.

УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СРЕДАХ С ОБЪЕМНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

Л. К. Мартинсон

Введение

Одним из актуальных направлений современной математической физики является изучение нелинейных математических моделей различных физико-химических явлений и процессов. В качестве примеров отметим такие физические теории, как нелинейная квантовая механика, нелинейные электродинамика и оптика, нелинейная теория плазмы, нелинейная акустика, нелинейная теплопроводность и другие теории, в основе математических моделей которых лежат нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Появление этих теорий обусловлено использованием в современной физике воздействий на вещество электрическими и магнитными полями большой интенсивности, пучками частиц высокой энергии, лазерными пучками когерентного излучения, ударными волнами высокой интенсивности, мощными тепловыми потоками.

Линейные математические модели физических процессов удобны для исследования, так как для лежащих в их основе линейных дифференциальных уравнений в частных производных разработаны общие методы их решения [1]. Справедливость принципа суперпозиции для таких уравнений, когда сумма двух или нескольких решений является также решением этого уравнения, позволяет использовать свойство рядов или интегралов Фурье [2] для построения решений, удовлетворяющих дополнительным условиям, связанным с выполнением граничных и начальных условий, т. е. находить решения краевых задач для этих уравнений.

Однако линейные модели математической физики являются всегда лишь определенными приближениями при описании реальных физических процессов. Их можно использовать только в тех случаях, когда исследуемые физические величины в данном процессе изменяются не в очень широком диапазоне значений. В этом смысле все реальные физические процессы нелинейны, и для их адекватного описания следует использовать нелинейные математические модели, в основе которых лежат нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных.

Нелинейные модели математической физики, описывая явления и процессы в более широком диапазоне изменения физических параметров, обладают значительно большей емкостью информации об

этих явлениях и процессах. Линейные модели обычно являются частными случаями нелинейных. Исследования показывают, что нелинейности изменяют не только количественные характеристики процессов, но и качественную картину их протекания.

Однако нелинейности значительно усложняют теорию, так как анализ соответствующих математических моделей требует принципиально новых методов исследования, тесно связанных с теорией нелинейных уравнений в частных производных. Законченной теории и общих методов решения задач для таких нелинейных уравнений в настоящее время не существует, хотя за последние годы в этом направлении математики достигнут значительный прогресс.

Построить простую математическую модель, адекватную реальному физическому процессу, достаточно сложно из-за тесной взаимосвязи различных по физической природе процессов: тепловых, электродинамических, гидродинамических, оптических и др. Как отмечает А. А. Самарский, «математические модели многих задач механики и физики, как правило, очень сложны и не поддаются детальному теоретическому исследованию. Однако ряд их важных свойств можно понять, если разбить исходную задачу на более простые блоки или модули. Модульный анализ задачи и предварительное изучение свойств отдельных модулей требует развития качественных и аналитических методов исследования задач математической физики» [3, с. 1419].

Следуя этому рецепту, из совокупности многих сложных и взаимосвязанных процессов, происходящих в сплошной среде, выделим процесс теплопроводности. Первые исследования математической модели такого процесса переноса энергии в сплошной среде были выполнены Ж. Фурье, П. Лапласом, С. Пуассоном, М. В. Остроградским и другими выдающимися учеными. Основной задачей теории теплопроводности является нахождение температурного поля в среде $u(x, y, z, t)$ в любой момент времени. Если температурное поле изменяется со временем, то процесс теплопроводности называют нестационарным.

Ниже для упрощения дифференциальных операций, связанных с уравнением теплопроводности, мы будем использовать декартову систему координат. Записывая выражения для операторов grad, div, Δ в произвольной ортогональной системе координат, можно получить соответствующие уравнения в цилиндрической, сферической и других системах координат [1, 5].

В основе построения классической математической модели процесса теплопроводности лежит физический закон Фурье, утверждающий, что плотность потока тепла в среде $\mathbf{q}$ пропорциональна градиенту температуры:

$$\mathbf{q} = -\varkappa \operatorname{qrad} u. \qquad (1)$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности среды, $\operatorname{qrad} u = \mathbf{i}\,\partial u/\partial x + \mathbf{j}\,\partial u/\partial y + \mathbf{k}\,\partial u/\partial z$ — градиент температуры, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные по осям прямоугольной декартовой системы координат.

Вектор градиента температуры ортогонален изотермическим поверхностям данного температурного поля, т. е. поверхностям $u(x, y, z, t) = \text{const}$. Знак минус в (1) соответствует свойству тепла распространяться от более нагретых слоев среды к менее нагретым.

Различные физические механизмы могут обусловливать перенос тепла в соответствии с законом (1) [4].

Молекулярная теплопроводность. Этот механизм ответствен за теплопроводность в газах, находящихся в обычных условиях. Переносчиками тепла являются молекулы газа. Коэффициент молекулярной теплопроводности слабо зависит от температуры: $\varkappa_м \sim \sqrt{u}$.

Фононная теплопроводность. С помощью такого механизма переносится тепло в твердых телах. Колебания кристаллической решетки твердого тела, которые в теории моделируют некоторым газом квазичастиц, называемых фононами, осуществляют перенос тепла. Для широкого диапазона температур коэффициент фононной теплопроводности можно считать не зависящим от температуры.

Электронная теплопроводность. В металлах и плазме электроны являются основными переносчиками тепла. Коэффициент электронной теплопроводности зависит от температуры степенным образом: $\varkappa_e \sim u^{2,5}$.

Лучистая или фотонная теплопроводность. В ряде случаев в сильно нагретом веществе (плазма, атмосферы звезд и др.) перенос тепла осуществляется излучением. Коэффициент лучистой теплопроводности сильно зависит от температуры. В первом приближении эту зависимость можно аппроксимировать степенной: $\varkappa_л \sim u^{6,5}$.

В теории теплопроводности используются также модели сред, коэффициент теплопроводности которых зависит не только от температуры, но и от величины градиента температуры [6—8].

1. Математическая модель нелинейного процесса теплопроводности

Вывод дифференциального уравнения теплопроводности основан на применении закона сохранения энергии (первого начала термодинамики) к бесконечно малому элементу среды с учетом потока тепла через поверхность этого элемента, а также выделения или поглощения тепловой энергии в объеме этого элемента. Этот вывод приводится в учебниках по математической физике (см., например, [1]).

Для случая неподвижной среды закон сохранения энергии приводит к следующему дифференциальному соотношению:

$$\rho c \partial u/\partial t = -\operatorname{div} \mathbf{q} + Q. \tag{1.1}$$

Здесь дивергенция плотности потока $\mathbf{q}$ определяется следующими дифференциальными операциями:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \partial q_x/\partial x + \partial q_y/\partial y + \partial q_z/\partial z,$$

ρ — плотность, c — удельная теплоемкость среды, а Q — удельная мощность тепловых источников, которая считается заданной функцией координат и времени.

Подставляя в (1.1) выражение для плотности потока тепла в форме (1), приходим к уравнению теплопроводности в стандартной форме:

$$\rho c \partial u/\partial t = \operatorname{div} (\varkappa \operatorname{qrad} u) + Q. \tag{1.2}$$

Если изучается процесс распространения тепла в однородной среде с постоянными теплофизическими свойствами (ρ, c, $\varkappa = \text{const} > 0$), то уравнение (1.2) можно преобразовать к виду

$$\partial u/\partial t = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), \tag{1.3}$$

где $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{qrad} u \equiv \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2$, Δ — оператор Лапласа, $f = Q/\rho c$, а $a^2 = \varkappa/\rho c$ — коэффициент температуропроводности среды.

Если теплофизические свойства среды в различных ее точках различаются и зависимости $\rho = \rho(x, y, z)$, $c = c(x, y, z)$ и $\varkappa = \varkappa(x, y, z)$ известны, то уравнение (1.2), оставаясь линейным уравнением параболического типа, усложняется, описывая процесс теплопроводности в неоднородной среде.

К нелинейной модели процесса теплопроводности

$$\rho(u)\, c(u)\, \partial u/\partial t = \operatorname{div} (\varkappa(u) \operatorname{qrad} u) + Q(u, x, y, z, t) \tag{1.4}$$

приводит учет зависимости теплофизических свойств среды от температуры или нелинейной зависимости удельной мощности объемных тепловых источников (стоков) Q от температуры.

Учитывая трудности исследования нелинейной модели (1.4), о которых говорилось выше, введем в эту модель следующие упрощения.

1. Будем считать, что плотность и теплоемкость среды постоянны, а коэффициент теплопроводности зависит от температуры степенным образом: $\varkappa = \varkappa_0 u^\sigma$, $\varkappa_0 = \text{const} > 0$. Здесь σ — параметр нелинейности среды, значения которого различны для различных физических механизмов переноса тепла (см. введение). Параметр нелинейности σ будем считать в дальнейшем положительным, хотя в некоторых работах [9] обсуждаются модели сред с отрицательным показателем степени: $\sigma < 0$.

2. Предположим, что в среде протекают эндотермические процессы, приводящие к объемному поглощению тепловой энергии. Такие тепловые стоки могут возникать в среде за счет различных процессов: химических реакций, ионизации и диссоциации молекул, объемного излучения, фазовых переходов, охлаждения среды при ее расширении и др. Мощность поглощения будем считать зависящей от температуры, т. е. полагать $Q = -\rho c \psi(u)$, где $\psi(u)$ — функция поглощения.

При таких предположениях уравнение (1.4) несколько упрощается:

$$\partial u/\partial t = a^2 \operatorname{div} (u^\sigma \operatorname{qrad} u) - \psi(u). \tag{1.5}$$

Здесь $a^2 = \varkappa_0/\rho c$ — характерное значение коэффициента температуропроводности нелинейной среды.

Математическая модель (1.5) нелинейного процесса теплопроводности в среде с объемным поглощением тепла и будет предметом дальнейшего анализа. При этом анализе без ограничения общности часто будем считать $a^2 = 1$, так как простым преобразованием временной переменной от t к $t' = a^2 t$ уравнение (1.5) всегда приводится к такому виду.

Для одномерных процессов квазилинейное параболическое уравнение (1.5) с $a^2 = 1$ запишется в виде

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x - \psi(u), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0, \tag{1.6}$$

или

$$u_t = \mu^{-1} (u^\mu)_{xx} - \psi(u), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0,$$

где $\mu = (1 + \sigma) = \text{const} \geqslant 1$; $u_t \equiv \partial u/\partial t$; $u_x \equiv \partial u/\partial x$.

При $\sigma > 0$ уравнение (1.5) или его одномерный аналог (1.6) являются квазилинейными параболическими уравнениями с неявным вырождением. Последнее означает, что при $u = 0$ это уравнение из дифференциального уравнения в частных производных второго порядка превращается (вырождается) в дифференциальное уравнение первого порядка. Следует отметить, что с вырождением уравнения (1.5) связаны некоторые особые свойства его решений, которые будут обсуждаться ниже.

Дифференциальное уравнение (1.5) имеет бесчисленное множество решений. Чтобы из этого множества выбрать решение, описывающее конкретный процесс теплопроводности в некотором теле, необходимо к дифференциальному уравнению присоединить дополнительные условия о геометрических размерах и форме тела, начальном распределении температуры в теле (начальные условия), тепловом взаимодействии тела с окружающими внешними телами (граничные условия).

Чтобы отвлечься от влияния на температурное поле формы и размеров тела и выделить те особенности процесса теплопроводности, которые связаны с нелинейными свойствами среды, мы ограничимся ниже анализом свойств решения задачи Коши для уравнения (1.5). В этой задаче изучается эволюция температурного поля в безграничном пространстве, заполненном нелинейной средой. Начальное распределение температуры

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \tag{1.7}$$

задается из некоторого класса функций $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R}^3)$. Функции этого класса являются непрерывными ограниченными функциями, имеющими обобщенные производные $(u_0^\mu)_x$, $(u_0^\mu)_y$ и $(u_0^\mu)_z$.

Кроме того, функции класса $\overset{\circ}{H}$ будем считать равными нулю вне некоторого шара $S(l) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant l\}$ конечного радиуса, равного $l < \infty$. Такие функции называют финитными функциями, а замыкание множества точек, где $u \neq 0$, носит название носителя финитной функции и обозначается символом

supp u. Так как все решения уравнения (1.5), рассматриваемые ниже, будут неотрицательны, то в наших исследованиях supp $u(x, y, z, t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: u > 0\}$.

Используя в качестве начальных распределений финитные функции, будем изучать процесс распространения тепловых возмущений в нелинейной среде с объемным поглощением, так как в таких задачах температурное поле в начальный момент времени будет иметь вид локального теплового возмущения, заданного в некоторой ограниченной области пространства, включающей начало координат. Это возмущение будет эволюционировать по нулевому невозмущенному температурному фону, и его эволюция опишется нестационарным решением $u(x, y, z, t)$ задачи Коши для уравнения (1.5).

В работах [10—12] доказано, что если начальное распределение температуры $u_0(x, y, z) \geqslant 0$ принадлежит классу $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R}^3)$, то задача Коши для уравнения (1.5) имеет единственное неотрицательное обобщенное решение.

Естественно, что, определяя решение задачи Коши для уравнения (1.5), мы должны удовлетворить всем физическим условиям, которым удовлетворяет температурное поле в среде. Эти физические условия, в частности, требуют, чтобы температура и тепловой поток не испытывали разрывов, т. е. чтобы функции u и $\mathbf{q}$ являлись непрерывными функциями координат для любого момента времени $t > 0$. Для нелинейной модели условие непрерывности теплового потока не требует, вообще говоря, непрерывности частных производных u_x, u_y, u_z, так как вектор плотности потока $\mathbf{q}$ содержит эти производные, умноженные на функцию u^σ: $q_x = -\varkappa_0 u^\sigma u_x$, $q_y = -\varkappa_0 u^\sigma u_y$ и $q_z = -\varkappa_0 u^\sigma u_z$.

Поэтому в класс допустимых решений задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения (1.5) следует ввести и такие решения, у которых производные u_x, u_y и u_z могут терпеть разрывы в некоторых точках пространства, сохранив при этом требование непрерывности компонент q_x, q_y и q_z. Это расширение класса допустимых решений тем более необходимо, так как в работе [13] показано, что даже при сколь угодно гладких начальных данных у производных решения уравнения (1.6) при $\mu \geqslant 2$ могут возникать точки разрыва.

Такое расширение класса допустимых решений приводит к понятию обобщенного решения дифференциального уравнения — понятию, которое широко используется в современной математической физике.

Так как в некоторых точках пространства производные у обобщенного решения не существуют, то, очевидно, в этих точках дифференциальное уравнение не имеет смысла. Поэтому, определяя обобщенное решение, следует требовать для него выполнения некоторого интегрального соотношения, являющегося следствием дифференциального уравнения, но не содержащего в своей структуре производных функции u. Обычно такое интегральное соотношение получают, умножая дифференциальное уравнение на достаточно гладкую пробную функцию $\varphi(x, y, z, t)$ и интегрируя его по пространственным и временной переменным.

Так, например, следуя [10, 11], определим обобщенное решение уравнения (1.6) как неотрицательную непрерывную функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условию Гельдера по переменным x и t, для которой в области $\pi = [x_0, x_1] \times [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}^2_+$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} (u\varphi_t + \mu^{-1}u^\mu\varphi_{xx} - \psi(u)\varphi)\,dx\,dt - \int_{x_0}^{x_1} u\varphi\,dx\Big|_{t_0}^{t_1} - \mu^{-1}\int_{t_0}^{t_1} u^\mu\varphi_x\,dt\Big|_{x_0}^{x_1} = 0, \tag{1.8}$$

каковы бы ни были числа $t_0 < t_1$, $x_0 < x_1$ и пробная функция $\varphi(x, t)$, имеющая непрерывные производные φ_t, φ_x и φ_{xx} и равная нулю при $x = x_0$ и $x = x_1$.

Хотя определение обобщенного решения включает в себя некоторую достаточно произвольную пробную функцию φ, можно показать, что обобщенное решение не зависит от выбора пробной функции.

Понятие обобщенного решения для уравнений вида (1.5) и (1.6) было введено в работах О. А. Олейник и ее учеников [14, 15, 10—13, 16]. В этих работах было показано также, что разрывы производных решения $u(x, y, z, t)$ могут наблюдаться только при выходе на нулевой невозмущенный фон, т. е. в точках, где $u = 0$, и уравнение вырождается. Во всех же точках области возмущения, где $u > 0$, обобщенное решение удовлетворяет дифференциальному уравнению в обычном классическом смысле, так как в этой области у функции u существуют все производные, которые входят в дифференциальное уравнение.

Итак, под решением задачи Коши

$$\begin{aligned} &u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) - \psi(u), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+, \\ &u(x, 0) = u_0(x) \in \mathring{H}(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.9}$$

мы будем понимать функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению в обобщенном смысле и условию $\lim\limits_{t\to 0} u(x, t) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Здесь и далее для сокращения записи координаты точки пространства будут изображаться одной буквой $x \in \mathbb{R}^n$ с указанием размерности этого пространства с помощью задания параметра $n = 1, 2, 3$.

Ниже исследуются некоторые свойства решения задачи (1.9) с акцентированием внимания на те из них, которые обусловлены нелинейностью изучаемой математической модели.

2. Конечная скорость распространения тепловых возмущений в нелинейных процессах теплопроводности

Одним из необычных свойств решений задачи (1.9), обусловленным нелинейностью математической модели, описывающей распространение тепловых возмущений в нелинейной среде, является свойство конечной скорости распространения возмущений.

Определение 1. *В задаче* (1.9) *скорость распространения возмущений конечна, если в любой момент времени* $t \in [0, T]$ *существует шар* $S(r(t)) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leqslant r(t)\}$ *конечного радиуса* $r(t) < \infty$, *такой, что область возмущения, где* $u > 0$, *вкладывается в этот шар, т. е.* $\operatorname{supp} u(x, t) \subset S(r(t))\ \forall t \in [0, T]$.

Финитность решения задачи (1.9) в любой момент времени $t \in [0, T]$, вытекающая из этого определения, с физической точки зрения означает, что тепловые возмущения в нелинейной среде распространяются в виде тепловых волн с конечной скоростью перемещения фронтов и в любой момент времени существует область пространства, куда тепловые возмущения еще не проникли.

В линейных моделях математической физики конечная скорость распространения возмущений наблюдается только для волновых процессов, описываемых гиперболическими уравнениями [1]. Для диффузионных же процессов, описываемых параболическими уравнениями, конечная скорость распространения возмущений является существенно нелинейным эффектом. Так, например, для линейной модели (1.3) скорость распространения возмущений бесконечна, т. е. для любого $t > 0$ $u(x, t) > 0$ в любой точке пространства $x \in \mathbb{R}^n$.

Конечная скорость распространения тепловых возмущений в нелинейной среде была впервые обнаружена в работах Я. Б. Зельдовича, А. С. Компанейца и Г. И. Баренблатта [17, 18] при анализе свойств решения задачи (1.9) с $\psi \equiv 0$, когда начальное распределение описывается дельтообразной функцией $u_0(x) = Q_0 \delta^n(x)$, характеризующей температурное поле сосредоточенного теплового источника с мгновенным выделением при $t = 0$ энергии $E = \rho c Q_0$. Задача (1.9) в этом случае называется задачей о влиянии мгновенного точечного источника тепла. Решение ее имеет важное значение в теории, хотя для нелинейной модели это решение уже не является фундаментальным, с помощью которого можно найти решения задач с другими начальными условиями.

Точное решение задачи о влиянии мгновенного точечного источника тепла в нелинейной среде со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры и отсутствии в среде источников или стоков тепла найдено в работах [17, 18] для случая плоской ($n = 1$), осевой ($n = 2$) и центральной ($n = 3$) симметрий. Оно удовлетворяет в любой момент времени $t \geqslant 0$ интегральному закону сохранения

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, t)\, d^n x = Q_0 = \text{const} > 0.$$

Это решение имеет вид фронтового решения, описывающего распространение тепловой волны от мгновенного точечного источника тепла, помещенного в начале координат. Оно выражается финитной функцией

$$u(r, t) = \begin{cases} U(t)\left[1 - \left(\dfrac{|x|}{x_+(t)}\right)^2\right]^{\frac{1}{\sigma}}, & |x| < x_+(t), \\ 0, & |x| \geqslant x_+(t), \end{cases} \tag{2.1}$$

где

$$U(t) = \xi_0 Q_0^{\frac{2}{2+n\sigma}} \left[\frac{\sigma}{2(2+n\sigma)}\right]^{\frac{1}{\sigma}} t^{-\frac{n}{2+n\sigma}};$$

$$x_+(t) = \xi_0^{\frac{\sigma}{2}} Q_0^{\frac{\sigma}{2+n\sigma}} t^{\frac{1}{2+n\sigma}};$$

$$\xi_0 = \xi_0(n, \sigma) = \left\{\frac{N(n)}{2}\left[\frac{\sigma}{2(2+n\sigma)}\right]^{\frac{1}{\sigma}} B\left[\frac{n}{2}, \frac{\sigma+1}{\sigma}\right]\right\}^{-\frac{2}{2+n\sigma}};$$

$$N(n) = \begin{cases} 2, & n=1, \\ 2\pi, & n=2, \\ 4\pi, & n=3, \end{cases} \qquad B[\alpha, \beta] = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Из (2.1) следует, что $\operatorname{supp} u(x, t) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leqslant x_+(t)\}$, т. е. $u = 0$ вне шара конечного радиуса, равного $x_+(t)$. Следовательно, положение фронта тепловой волны определяется из условия

$$|x| = x_+(t) \sim t^{\frac{1}{2+n\sigma}}.$$

Хотя скорость фронта тепловой волны уменьшается со временем:

$$\dot{x}_+(t) \equiv \frac{dx_+}{dt} \sim t^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1+n\sigma}{2+n\sigma},$$

возмущения от источника проникают в среду неограниченно далеко, так как $x_+(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Для произвольного начального условия $u_0(x) \in \mathring{H}(\mathbb{R}^1)$ конечное значение скорости распространения возмущений в задаче (1.9) было доказано в работе [15] для случая $\psi \equiv 0$ при любом $\sigma > 0$.

Разработанные А. А. Самарским и его школой численные методы решения квазилинейных вырождающихся уравнений параболического типа [1, 19—23] позволили решить широкий класс задач для таких уравнений и подтвердить численными экспериментами конечную скорость распространения тепловых возмущений в нелинейных средах. Численные расчеты показали также, что тепловые волны в нелинейных средах являются устойчивыми структурами и могут наблюдаться в реальных процессах теплопереноса.

Из более поздних теоретических работ, в которых рассматривались вопросы конечной скорости распространения возмущений для процессов, описываемых квазилинейными параболическими уравнениями с различными типами нелинейностей, укажем работы А. С. Калашникова [24—26], С. П. Антонцева [27—29], В. А. Галактионова [30] и Б. Кнерра (США) [31].

Конечная скорость распространения тепловых возмущений качественно изменяет характер протекания нестационарных процессов теплопроводности в нелинейных средах по сравнению с аналогичными процессами в средах с постоянным коэффициентом теплопроводности, когда тепловые возмущения распространяются мгновенно. Благодаря появлению «инерции тепла» в нелинейных средах эволю-

ция тепловых структур приобретает особенности, свойственные волновым процессам.

Проиллюстрируем это на примере анализа эволюции одномерного ($n = 1$) теплового импульса в нелинейной среде со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры при отсутствии объемного выделения или поглощения тепла. Математической моделью такого процесса является следующая задача Коши для квазилинейного параболического уравнения:

$$u_t = a^2 (u^\sigma u_x)_x, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_+,$$
$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{2.2}$$

Тепловым импульсом мы назовем тепловую структуру, занимающую в пространстве ограниченную область, температурный профиль которой в начальный момент времени описывается неотрицательной ограниченной непрерывной финитной функцией $u_0(x) \in \mathring{H}(\mathbb{R}^1)$ с компактным носителем $\operatorname{supp} u_0(x) = [-l, +l]$, где $l < \infty$. Эта функция вне интервала $(-l, +l)$ равна нулю, а внутри этого интервала ее можно представить в виде

$$u_0(x) = A_0 \Phi(x/l), \quad -l < x < +l. \tag{2.3}$$

Такая тепловая структура характеризуется амплитудой A_0, соответствующей максимальному значению температуры в ней, и полушириной l. С этими параметрами связана тепловая энергия импульса $E = \rho c I$, где

$$I = \int_{-l}^{+l} u_0(x)\, dx = gl A_0,$$

причем формфактор

$$g = \int_{-1}^{+1} \Phi(\xi)\, d\xi \quad (0 < g < 2)$$

зависит от формы теплового импульса в начальный момент времени.

Из доказанных в [15] теорем следует, что при этих условиях существует единственное неотрицательное обобщенное решение задачи (2.2). Это решение монотонно зависит от начального условия, т. е. если $u_0^{(1)}(x) \leqslant u_0^{(2)}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^1$, то $u^{(1)}(x, t) \leqslant u^{(2)}(x, t)\ \forall (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_+$.

При анализе закона движения границ носителя обобщенного решения задачи (2.2) будем считать, что температурное поле симметрично относительно центра импульса $x = 0$, а асимптотика функции $u_0(x)$, описывающей это поле в начальный момент времени, имеет степенной вид вблизи граничных точек $x = -l$ и $x = +l$:

$$u_0(x) \sim U_0 (l + x)^\alpha \quad \text{при } x \to -l + 0,$$
$$u_0(x) \sim U_0 (l - x)^\alpha \quad \text{при } x \to +l - 0. \tag{2.4}$$

Здесь $U_0 = \text{const} > 0$, а показатель степени α удовлетворяет условию $\alpha \geqslant (1 + \sigma)^{-1}$.

Из теории размерностей [32, 33] следует, что решение задачи (2.2) с начальным распределением (2.3) имеет вид

$$u(x, t) = A_0 F(t/\tau, x/l, \sigma).$$

Здесь параметр $\tau = a^{-2} l^2 A_0^{-\sigma}$ определяет характерное время релаксации процесса теплопроводности в нелинейной среде. В отличие от линейной среды с постоянным коэффициентом теплопроводности ($\sigma = 0$) в нелинейной среде ($\sigma > 0$) время релаксации, т. е. характерный масштаб времени процесса теплопроводности, зависит не только от свойств среды, но и от амплитуды (энергии) теплового импульса.

Инерционный эффект конечной скорости распространения возмущений приводит к тому, что при $\sigma > 0$ для любого $t \in [0, T]$ $\operatorname{supp} u(x, t) = [x_-(t), x_+(t)]$, причем $|x_\mp(t)| < \infty$. Вне интервала $(x_-(t), x_+(t))$ функция u равна нулю. Эта область соответствует нулевому невозмущенному фону, по которому распространяется тепловое возмущение. Граничные точки носителя решения $x = x_-(t)$ и $x = x_+(t)$ будем называть соответственно левой и правой фронтовыми точками, так как они определяют положение фронтов теплового импульса в любой момент времени $t > 0$. В силу предполагаемой симметрии температурного профиля теплового импульса достаточно описать движение, например, только правой фронтовой точки.

Сформулируем ряд выводов о характере движения фронтов теплового импульса в процессе его эволюции [34, 35].

1. Фронты теплового импульса не могут изменять направления своего движения, причем $\dot{x}_-(t) \leqslant 0$, а $\dot{x}_+(t) \geqslant 0$ для любого $t > 0$. Ширина теплового импульса $\mathscr{L}(t) = x_+(t) - x_-(t)$ растет неограниченно при $t \to \infty$, а его амплитуда уменьшается.

2. Закон движения фронтов теплового импульса в сильной степени зависит от формы импульса в начальный момент времени, в частности от крутизны его фронтов.

Можно вывести асимптотические формулы, описывающие закон движения правого фронта на начальной и завершающей стадиях эволюции. При $\alpha < 2\sigma^{-1}$ эти формулы имеют вид: для $t \ll \tau$ [42]

$$x_+(t) = l + \delta t^\nu, \tag{2.5}$$

где $\delta = \{a^2 \sigma^{-1} (2 - \sigma\alpha) U_0^\sigma\}^\nu$; $\nu = (2 - \sigma\alpha)^{-1}$;
для $t \gg \tau$

$$x_+(t) = l \left[1 + \frac{2(2+\sigma)}{\sigma} \frac{t}{\tau}\right]^{\frac{1}{2+\sigma}}. \tag{2.6}$$

3. При $\alpha \geqslant 2\sigma^{-1}$ крутизна фронтов импульса недостаточна, чтобы фронты пришли в движение, и наблюдается эффект метастабильной локализации тепла [36], когда существует такое $0 < T_M < \infty$, что $\operatorname{supp} u(x, t) = \operatorname{supp} u_0(x)$ $\forall t \in [0, T_M]$. В течение конечного промежутка времени фронты теплового импульса остаются неподвижными и температурное поле теплового импульса эволюционирует в неиз-

меняющейся по размеру пространственной области. За это время происходит изменение формы теплового импульса, крутизна температурного профиля вблизи неподвижных фронтов увеличивается, и в некоторый момент времени $t = T_M$ фронты приходят в движение.

Время метастабильной локализации, в течение которого ширина теплового импульса не изменяется, оценивается снизу значением $T_M = \sigma [2 (2 + \sigma)]^{-1} \tau^*$, где τ^* — время релаксации процесса нелинейной теплопроводности, при расчете которого амплитуда A_0 выбирается как минимальное значение параметра A^*, для которого выполняется неравенство

$$u_0 (x) \leqslant A^* [1 - | x |/l]^{2/\sigma} \; \forall x \in [-l, +l].$$

4. Вблизи движущихся с конечной скоростью фронтовых точек $x = x_- (t)$ и $x = x_+ (t)$ обобщенное решение имеет степенную асимптотику:

$$u (x, t) \sim U (t) [x - x_- (t)]^{1/\sigma} \text{ при } x \to x_- + 0,$$
$$u (x, t) \sim U (t) [x_+ (t) - x]^{1/\sigma} \text{ при } x \to x_+ - 0, \qquad (2.7)$$

причем

$$\dot{x}_\pm = \pm a^2 \sigma^{-1} U^\sigma (t).$$

Таким образом, одной из существенных особенностей процесса теплопроводности в нелинейной среде, тесно связанной с конечной скоростью распространения возмущений, является свойство тепловой инерции. Инерция тепла проявляется, в частности, в том, что если в среде выделить ограниченную замкнутую область конечных размеров, то тепловое возмущение будет находиться в этой области в течение конечного времени, пока фронт возмущения не достигнет границ этой области. С учетом асимптотической формулы (2.6) для времени удержания T_L теплового импульса в области пространства с характерным линейным размером $L > l$ можно вывести следующую оценочную формулу:

$$T_L = [\sigma/(2 (2 + \sigma))] [(L/l)^{2+\sigma} - 1] \tau. \qquad (2.8)$$

Анализ (2.8) показывает, что время удержания теплового импульса, обусловленное свойством тепловой инерции, увеличивается с увеличением размера области удержания L и с уменьшением энергии теплового импульса E. Оно существенно зависит от значения параметра нелинейности среды, стремясь к нулю при $\sigma \to 0$.

При выполнении неравенства $\alpha \geqslant 2\sigma^{-1}$ время удержания теплового импульса следует оценивать уже по обобщенной формуле $T'_L = T_L + T_M$, учитывающей метастабильную фазу в процессе эволюции импульса, предшествующую фазе движения его фронтов.

Отметим, что удержание теплового импульса в ограниченной области пространства в течение конечного промежутка времени является одной из важных задач физики плазмы. Тот факт, что в нелинейных процессах теплопроводности удержание теплового импульса

может происходить за счет свойства инерции тепла, указывает на принципиальную возможность решения проблемы удержания высокотемпературной плазмы без дополнительного внешнего воздействия, например воздействия внешним магнитным полем. При этом важно, что свойство тепловой инерции сохраняется и при наличии в нелинейной среде активных экзотермических процессов [37].

Отмеченный выше эффект конечной скорости распространения тепловых возмущений в нелинейной среде без объемного поглощения тепла существенно связан с вырождением уравнения, лежащего в основе математической модели процесса. Физически это означает обращение в нуль на фронте тепловой волны коэффициента теплопроводности среды.

Важный результат был доказан в работах [38—41], где исследовались свойства решений задачи Коши и краевых задач для квазилинейного уравнения (1.5) с нелинейным младшим членом $\psi \not\equiv 0$. Показано, что при наличии младшего члена финитные решения могут быть обнаружены и у невырождающихся квазилинейных уравнений параболического типа. Конечная скорость распространения возмущений в этих случаях обусловлена исключительно нелинейностью младших членов уравнений.

Физическая интерпретация этого результата следующая: при наличии объемного поглощения тепловой энергии эффект конечной скорости распространения тепловых возмущений может наблюдаться и в средах, у которых коэффициент теплопроводности не обращается в нуль, а также и при распространении возмущения по ненулевому температурному фону. Этот вывод был сделан в [38] и получил подтверждение при исследовании математической модели процесса распространения тепловых возмущений в среде с постоянным коэффициентом теплопроводности, в основе которой лежит уравнение (1.5) с $\sigma = 0$, но с нелинейным младшим членом $\psi = \psi(u)$ [39—41].

В частности, в [40] доказано, что если асимптотика функции поглощения $\psi(u)$ при $u \to +0$ имеет степенной вид $\psi(u) \sim \Pi u^{\nu}$, где $\Pi = \text{const} > 0$, а показатель степени $\nu < 1$, то тепловые возмущения распространяются с конечной скоростью и в среде с постоянным коэффициентом теплопроводности. Уравнение (1.5) в этом случае имеет линейную главную часть и не вырождается при $u = 0$.

В качестве примера приведем фронтовое решение уравнения типа уравнения Колмогорова — Петровского—Пискунова (КПП) [43]

$$u_t = u_{xx} - \psi(u), \quad (x, \ t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_+,$$

следующего из (1.6) при $\sigma \to 0$. Для $\psi(u) = \Pi(u^{\nu} - u^{(1+\nu)/2})$, $\nu < 1$, это уравнение имеет обобщенное решение со слабым разрывом в точке $x = c_- t$:

$$u(x, t) = \begin{cases} \left\{1 - \exp\left[\dfrac{1-\nu}{1+\nu}\,\Pi\left(t - \dfrac{x}{c_-}\right)\right]\right\}^{\frac{2}{1-\nu}}, & x \geqslant c_- t, \\ 0, & x < c_- t. \end{cases}$$

Это решение описывает волну охлаждения, фронт которой распространяется по нулевому невозмущенному фону со скоростью $c_- = \{2(1 + \nu)^{-1} H\}^{1/2}$.

В связи с этим отметим, что в работе [44] показано, как гладкие решения уравнения КПП для простых волн связаны с асимптотическими решениями квазилинейного уравнения (1.6) с $\sigma > 0$, которые описывают тепловые волны в нелинейной среде с конечной скоростью распространения фронтов.

Итак, существуют два фактора различной физической природы, которые обусловливают нелинейность процесса теплопроводности и приводят к инерционному замедлению скорости распространения тепловых возмущений. Первый фактор связан с зависимостью коэффициента теплопроводности среды от температуры и обращением его в нуль на фронте волны. Механизм второго фактора связан с протеканием в среде эндотермических процессов, приводящих к объемному поглощению тепловой энергии, мощность которого зависит от локального значения температуры. При наличии такого механизма конечная скорость распространения тепловых возмущений может наблюдаться даже в средах с постоянным коэффициентом теплопроводности.

В заключение раздела подчеркнем, что скорость распространения тепловых возмущений в реальных средах всегда конечна. Этот факт должен учитываться при построении макроскопических моделей сред. Как было показано выше, модель нелинейной среды обладает таким свойством. В последнее время в теории теплопроводности были предложены также модели сред, процесс распространения тепла в которых описывается гиперболическим уравнением [45—47]. Такие модели обладают свойством конечной скорости распространения тепла даже в рамках линейной теории. Вопрос о том, какая из моделей среды является предпочтительней, отражая наиболее существенные свойства реальных сред в конкретных тепловых процессах, должен решаться путем сравнения всей совокупности выводов, полученных при исследовании модели, с данными экспериментов.

3. Эффект пространственной локализации тепловых возмущений в средах с объемным поглощением тепла

При наличии в среде объемного поглощения тепла в процессах нелинейной теплопроводности наблюдается еще один нелинейный инерционный эффект — эффект пространственной локализации тепловых возмущений, когда возмущения проникают в среду лишь на конечную глубину даже за бесконечный промежуток времени.

Этот эффект обусловлен влиянием объемного поглощения тепла и может быть обнаружен при исследовании математической модели (1.9) с ненулевым младшим членом $\psi = \psi(u)$ в квазилинейном параболическом уравнении, лежащем в основе этой модели.

Определение 2. *В задаче Коши* (1.9) *решение* $u(x, t)$ *пространственно локализовано, если существует шар* $S(L) = \{x \in \mathbb{R}^n$:

$\{x \mid \leqslant L\}$ *конечного радиуса* $L = \text{const} < \infty$, *такой, что* $u = 0$ *вне этого шара в любой момент времени* $t \geqslant 0$.

Другими словами, для пространственно локализованного решения $\operatorname{supp} u(x, t) \subset S(L) \; \forall \, t \in [0, \infty)$.

Впервые эффект пространственной локализации тепловых возмущений в нелинейной среде с объемным поглощением тепла был обнаружен в работе [38] при исследовании свойств точного обобщенного решения задачи о влиянии мгновенного точечного источника тепла в нелинейной среде с поглощением ($\psi(u) = Hu$). Математическая модель такого процесса описывается задачей Коши (1.9) с начальным условием $u_0(x) = Q_0\delta^n(x)$. Финитное решение этой задачи имеет следующую структуру:

$$u(x, t) = w(x, t) \exp(-Ht), \tag{3.1}$$

$$w(x, t) \equiv w(\xi, \tau) = \begin{cases} (Q_0^2\tau^{-n})^s \left\{ \dfrac{\sigma s}{2} (\xi_0^2 - \xi^2) \right\}^{\frac{1}{\sigma}}, & \xi < \xi_0, \\ 0, & \xi \geqslant \xi_0. \end{cases}$$

Здесь $\xi = |x| (Q_0^\sigma \tau)^{-s}$ — автомодельная переменная; $s = (2 + n\sigma)^{-1}$; $\xi_0 = \xi_0(n, \sigma)$ — константа, зависящая от параметров задачи n и σ, значение которой определено формулой в (2.1), а $\tau = \tau(t)$ — преобразованная по закону

$$\tau(t) = \tau_m [1 - \exp(-t/\tau_m)], \quad \tau_m = (\sigma H)^{-1},$$

временная переменная, отображающая полубесконечный интервал $[0, \infty)$ по переменной t в ограниченный отрезок $[0, \tau_m)$ по переменной τ.

Финитное решение (3.1) имеет компактный носитель $\operatorname{supp} u(x, t) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leqslant L(t)\}$, где

$$L(t) = L_m(1 - \exp(-t/\tau_m))^s, \quad L_m = \xi_0 (Q_0^\sigma \tau_m)^s.$$

Так как $L(t) \to L_m < \infty$ при $t \to \infty$, то решение (3.1) пространственно локализовано, причем предельный размер носителя

$$L_m = \xi_0 [Q_0^\sigma (\sigma H)^{-1}]^{\frac{1}{2 + n\sigma}} < \infty$$

определяет размер области локализации решения. На такую глубину проникают лишь тепловые возмущения от мгновенного точечного источника тепла в нелинейную среду с объемным поглощением.

З а м е ч а н и е. Решение (3.1) является слабым решением задачи, причем стремление функции $u(x, t)$ к начальному распределению $u_0(x) = Q_0\delta^n(x)$ следует понимать как сходимость в классе обобщенных функций [48], т. е.

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \chi(x) \, d^n x = Q_0 \chi(0)$$

для любой пробной функции $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Если же в задаче о влиянии мгновенного точечного источника не выходить за рамки класса непрерывных и ограниченных функций в качестве начального распределения, то ее решение следует рассматривать лишь начиная с некоторого достаточного малого промежутка времени, т. е. перейти от решения $u(x, t)$ к решению $u(x, t - \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малая константа. Таким образом может быть снята сингулярность, возникающая в задаче о влиянии мгновенного точечного источника при $t \to +0$. Дельтообразное начальное распределение трансформируется при этом в некоторую непрерывную и ограниченную функцию с компактным носителем достаточно малых размеров.

Достаточное условие локализации решения задачи (1.9) с произвольным видом функции поглощения $\psi = \psi(u)$, удовлетворяющей условию $\psi(0) = 0$, в одномерном случае ($n = 1$) было сформулировано в работе [10]. Для степенной модели, когда $\psi(u) = Pu^{\nu}$, $P, \nu = \text{const} > 0$, это условие, являющееся одновременно и необходимым условием локализации решения, имеет вид неравенства $\nu < 1 + \sigma$.

Некоторые обобщения условий локализации решения для случая, когда функция поглощения зависит явно и от времени, т. е. имеет вид $\psi = \psi(u, t)$ имеются в [49, 50]. Численные расчеты [51] подтвердили правильность вывода о возможности пространственной локализации тепловых возмущений в нелинейных средах с поглощением.

Тщательное исследование эффекта пространственной локализации возмущений в задаче (1.9) [10—12, 34] позволило дать более детальную классификацию различных режимов локализации. Выделим следующие режимы локализации решений задачи (1.9): а) локализация с волной разогрева ($\text{mes supp } u(x, t_1) < \text{mes supp } u(x, t_2)\ \forall t_1 < t_2$); б) локализация с метастабильной фазой ($\text{supp } u(x, t) = \text{supp } u_0(x)\ \forall t \in [0, T_M]$); в) стабильная локализация ($\text{supp } u(x, t) = \text{supp } u_0(x)\ \forall t > 0$); г) локализация со сменой волны разогрева волной охлаждения; д) локализация с волной охлаждения ($\text{mes supp } u(x, t_2) < \text{mes supp } u(x, t_1)\ \forall t_1 < t_2$). Рисунок 1 качественно иллюстрирует соответствующие режимы локализации решений в одномерной задаче ($n = 1$) с симметричным относительно точки $x = 0$ начальным распределением. Область возмущения, где $u > 0$, заштрихована, а величина L характеризует размер области локализации решения. Линии Γ_1 и Γ_2 отделяют область возмущения от невозмущенной области, где $u = 0$. Вид этих линий характеризует движение фронтов теплового возмущения в различных режимах локализации.

Конкретный вид режима локализации решения для степенной функции поглощения $\psi = Pu^{\nu}$ зависит от значений параметра нелинейности среды σ, параметра поглощения P, показателя степени ν младшего члена уравнения, а также показателя α асимптотики начального распределения (2.4). Достаточные условия реализации того или иного режима локализации можно найти в [11, 34]. Другое, более грубое деление позволяет различать режимы пространственной локализации (рис. 1, *а — в*) и режимы пространственно-временной локализации (рис. 1, *г, д*).

Определение 3. *В задаче* (1.9) *имеет место пространственно-временная локализация решения* $u(x, t)$, *если в пространстве* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$ *существует цилиндр конечной высоты* $Ц = S(L) \times [0, T_m]$, *такой, что* $u = 0$ *всюду вне этого цилиндра.*

В таких режимах локализации объемное поглощение обусловливает не только пространственную локализацию возмущений, но и конечное время их жизни, равное $T_m < \infty$ [10].

Исследования показывают [34], что для уравнения со степенной нелинейностью младшего члена ($\psi(u) = Пu^{\nu}$) пространственно-временная локализация решения задачи (1.9) наблюдается при $\nu < 1$. Иллюстрацией такого режима локализации может служить точное решение задачи (1.9) с $\psi(u) = Пu^{1-\sigma}$, $\sigma < 1$, описывающее нестационарный процесс распространения тепла от мгновенного точечного источника тепла. Это обобщенное решение было найдено в работе [52]. Оно имеет следующий вид:

$$u(x, t) = \begin{cases} U(t)\left[1 - \left(\frac{|x|}{x_+(t)}\right)^2\right]^{1/\sigma}, & |x| < x_+(t), \\ 0, & |x| \geqslant x_+(t), \end{cases} \tag{3.2}$$

где

$$U(t) = \left[\frac{\sigma}{2(2+n\sigma)}\right]^{\frac{1}{\sigma}} t^{-\frac{1}{\sigma+2}} x_+^{\frac{2}{\sigma}}(t);$$

$$x_+(t) = \xi_0^{\frac{\sigma}{2}}(n, \sigma) Q_0^{\frac{\sigma}{2+n\sigma}} t^{\frac{1}{2+n\sigma}} \left[1 - \left(\frac{t}{T_m}\right)^p\right]^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0, T_m];$$

$$p = \frac{2(1+n\sigma)}{2+n\sigma}, \quad T_m = Q_0^{\frac{\sigma}{1+n\sigma}} \left[\frac{\xi_0^{\sigma} p}{2П(2+n\sigma)}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

В процессе эволюции возмущения носитель решения $\operatorname{supp} u(x, t) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leqslant x_+(t)\}$ изменяет свой размер немонотонно. Сначала размер области возмущения растет, однако наступает вторая фаза эволюции, когда фронт тепловой волны изменяет направление своего движения, и размер области возмущения начинает уменьшаться. В момент времени $t = T_m$ эта область стягивается в точку и возмущение прекращает свое существование, т. е. $u = 0$ всюду в $\mathbb{R}^n$, если $t > T_m$. Эволюция тепловой структуры (3.2) протекает в режиме пространственно-временной локализации возмущений со сменой волны разогрева волной охлаждения. Обобщение этой задачи на случай $\psi = \psi(u, t) = Пt^{\beta}u^{1-\sigma}$ можно найти в [53], где найдено ее точное решение для любого $\beta > 0$.

Режим стабильной локализации возмущений является одним из наиболее ярких проявлений эффекта локализации тепла. В таком режиме эволюции структура самоизолируется в тепловом отношении от окружающего пространства и эволюционирует в пространственной области неизменных размеров.

Возможность тепловой самоизоляции локализованных структур является принципиально важным выводом, который вытекает из анализа математической модели нелинейной теплопроводности с по-

глощением. С физической точки зрения эффект тепловой самоизоляции означает подавление механизмом объемного поглощения тепла естественной тенденции тепловой структуры к уширению за счет диффузионного механизма переноса тепла.

Интересно отметить, что такую компенсацию диффузионного потока объемным поглощением можно обнаружить уже в рамках линейной модели теплопроводности. Действительно, рассмотрим тривиальную на первый взгляд задачу. Пусть в среде с постоянными теплофизическими свойствами равномерно распределены тепловые стоки, мощность которых убывает со временем по экспоненциальному закону. В одномерном случае нестационарный процесс эволюции тепловых структур описывается в такой среде линейной задачей

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} - \Pi \exp(-gt), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_+, \\ &u(0, t) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где Π, $g = \text{const} > 0$.

Как будет эволюционировать периодическая тепловая структура, начальное распределение температуры в которой задано в виде

$$u_0(x) = U(1 + \cos \pi x/l), \; U = \text{const} > 0? \tag{3.4}$$

При отсутствии объемного поглощения тепла ($\Pi = 0$) решение задачи (3.3), (3.4)

$$u(x, t) = U[1 + \cos(\pi x/l) \exp(-\pi^2 t/l)] \tag{3.5}$$

отвечает на поставленный вопрос. За счет диффузионного потока тепла температура нагретых слоев понижается, а холодных — повышается (рис. 2, *а*). Выравнивание температуры сопровождается изменением температуры в любой точке среды.

Качественно иной вид эволюции тепловой структуры (3.4) можно наблюдать при наличии в среде объемного поглощения тепла ($\Pi > 0$). Действительно, пусть $U = \Pi g^{-1}$, а $l^2 = \pi^2 g$. В этом случае задача (3.3) с начальным условием (3.4) имеет следующее решение:

$$u(x, t) = U(1 + \cos \pi x/l) \exp(-gt). \tag{3.6}$$

Нагретые области тепловой структуры не прогревают близлежащих холодных областей, и температура в любой точке монотонно уменьшается со временем (рис. 2, *б*). Отдельные части периодической структуры (квазиструктуры), занимающие в пространстве ячейки размером $2l = 2\pi g^{-1/2}$, не участвуют в тепловом взаимодействии друг с другом. В точках $x_m = \pm (2m - 1)\, l$, $m = 1, 2, \ldots$, разделяющих отдельные квазиструктуры, температура и тепловой поток в любой момент времени равны нулю. Важно отметить также, что для реализации такого режима эволюции параметры тепловой структуры U и l должны быть определенным образом связаны с параметрами, характеризующими объемное поглощение тепла.

В нелинейной среде с объемным поглощением можно обнаружить тепловую самоизоляцию структур, имеющих вид одиночных тепловых импульсов, в процессе эволюции которых не наблюдается характер-

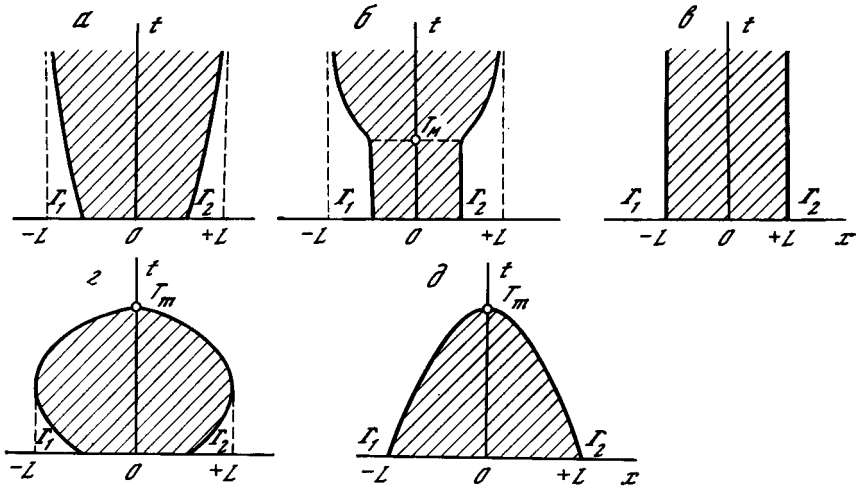


Рис. 1. Различные виды эволюции носителя локализованного решения

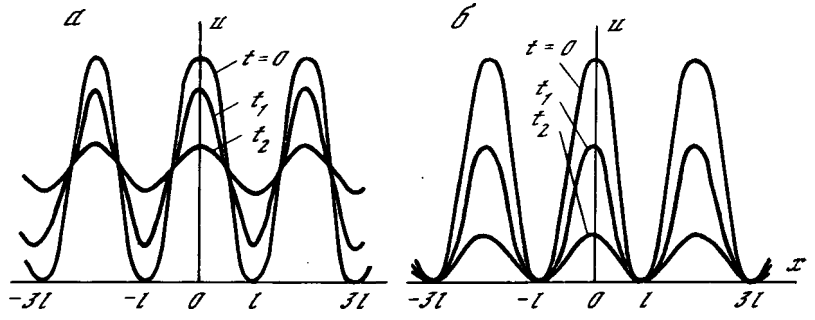


Рис. 2. Влияние объемного поглощения на образование самоизолированных тепловых структур $(t_2 > t_1 > 0)$

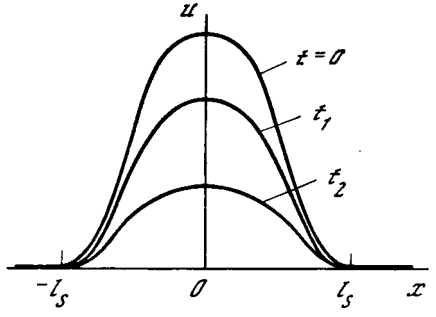


Рис. 3. Эволюция самоизолированного теплового импульса $(t_2 > t_1 > 0)$

ного для диффузионных процессов уширения структуры. Самоизоляция тепловых структур в процессах теплопроводности при наличии объемного поглощения тепла была обнаружена в работах [54—56] при исследовании математической модели вида (1.9) с нелинейным младшим членом $\psi = \psi(u, t)$, зависящим явно от времени.

Приведем два точных решения задач такого типа. Одно из них

$$\hat{u}(x,t)=\begin{cases}\hat{A}(t+t_0)^{-1/\sigma}\left[1-\left(\frac{|x|}{r_s}\right)^2\right]^{1/\sigma}, & |x|<r_s,\\ 0, & |x|\geqslant r_s,\end{cases} \tag{3.7}$$

является решением задачи вида (1.9) с младшим членом в уравнении $\psi = \Pi (t + t_0)^{-2} u^{1-\sigma}$, Π, $t_0 = \text{const} > 0$, $\sigma < 1$.

Размер r_s и амплитуда $\hat{A}$ самоизолированной структуры (3.7) связаны с параметром поглощения Π следующими соотношениями:

$$\hat{A} = \{1/2\Pi\sigma\,(2+n\sigma)\}^{1/\sigma},\ r_s = (2+n\sigma)\,\Pi^{1/2}.$$

Фронт теплового возмущения $\hat{u}(x, 0)$, занимающего в начальный момент времени шарообразную область конечного радиуса r_s, остается неподвижным в течение всего процесса эволюции такой самоизолированной тепловой структуры.

Другое решение

$$\tilde{u}(x,t)=\begin{cases}\tilde{A}\left(\cos^2\frac{\pi x}{2l_s}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}\exp\left(-\frac{t}{\theta(1-\nu)}\right), & x\in(-l_s,+l_s),\\ 0, & x\in\mathbb{R}^1\setminus(-l_s,+l_s),\end{cases} \tag{3.8}$$

$$\tilde{A}=\left\{\frac{2\Pi\theta(1-\nu)}{1+\nu}\right\}^{\frac{1}{1-\nu}},\quad l_s=\pi\theta^{\frac{1}{2}}(1-\nu)^{-\frac{1}{2}},$$

описывает эволюцию одномерной ($n = 1$) самоизолированной тепловой структуры шириной $2l_s$ в случае, когда в основе математической модели (1.9) лежит уравнение с линейной главной частью ($\sigma = 0$), а нелинейность процесса теплопроводности обусловлена нелинейным младшим членом уравнения, имеющим вид $\psi(u, t) = \Pi u^{\nu} \exp(-t/\theta)$, Π, $\theta = \text{const} > 0$, $0 < \nu < 1$.

Видно, что нестационарный процесс теплопроводности даже в среде с постоянным коэффициентом теплопроводности при наличии объемного поглощения тепла может протекать в необычном для тепловых процессов режиме, когда температура всех точек среды монотонно уменьшается со временем, уширения тепловой структуры не наблюдается, как будто тепловое возмущение окружено адиабатической оболочкой (рис. 3).

Нельзя не обратить внимание на то, что такая своеобразная эволюция самоизолированных тепловых структур напоминает эволюцию необычного пространственно-локализованного природного объекта — шаровой молнии. Это позволило автору в работе [54] предположить механизм объемного поглощения тепла в качестве одного из возможных механизмов, обусловливающих тепловую самоизоляцию шаровой молнии. Проведенные оценки показывают правомочность такой гипотезы. Как отмечалось выше, пространственный размер самоизолированной системы вполне определенным образом зависит от параметров процесса поглощения тепла. Это согласуется с данными о доволь-

но узком интервале диаметров наблюдавшихся шаровых молний. В рамках такой гипотезы можно объяснить и взрывной характер процесса при взаимодействии шаровой молнии с предметами: соприкосновение нарушает тепловую самоизоляцию и интенсивный тепловой поток приводит к быстрому выделению энергии в месте контакта.

Следует заметить, что тенденция к тепловой самоизоляции структур в нелинейной среде ($\sigma > 0$) может наблюдаться и при отсутствии объемного поглощения и даже при протекании в ней активных процессов, сопровождающихся тепловыделением. В этих случаях эффект тепловой самоизоляции структур связан с «запиранием» теплового потока на фронте за счет обращения в нуль коэффициента теплопроводности нелинейной среды. Режимы тепловой самоизоляции структур в этих случаях наблюдаются для достаточно пологих начальных профилей температур либо при реализации граничных режимов с «обострением», когда температура граничной поверхности возрастает неограниченно за конечный промежуток времени. Кроме того, в отличие от сред с объемным поглощением в нелинейных средах с объемным тепловыделением самоизоляция структур может наблюдаться лишь в течение ограниченного промежутка времени, по истечении которого фронт теплового возмущения приходит в движение и проникает в среду неограниченно далеко. Такая локализация тепла «в малом» по времени была названа в [36] метастабильной локализацией.

Теория тепловых процессов в нелинейных средах, протекающих в режиме метастабильной локализации тепла, была развита в работах А. А. Самарского и С. П. Курдюмова с сотрудниками Института прикладной математики АН СССР в связи с исследованием ряда прикладных задач физики плазмы [36, 37, 57—64]. При этом широко использовались численные методы исследования математических моделей и вычислительный эксперимент. В этих работах показано также, что метастабильная локализация тепла играет существенную роль в образовании пространственных тепловых структур в процессах горения.

Итак, при исследовании математической модели нелинейного процесса теплопроводности в средах с объемным поглощением тепла обнаружено фундаментальное свойство локализации тепловых процессов. В нелинейной среде с поглощением каждый источник тепла имеет лишь ограниченную область влияния. Характерный размер этой области зависит от свойств среды и тепловой энергии источника. Взаимодействовать друг с другом в тепловом отношении могут только такие тепловые структуры, расстояние между центрами которых меньше некоторого конечного радиуса взаимодействия.

В настоящее время в рамках нового научного направления в теории теплопроводности, изучающего локализацию тепловых процессов, опубликовано большое число работ. Обнаружены новые режимы локализации тепла, расширяющие рамки узкого определения этого нелинейного эффекта, приведенного в настоящем разделе. Сюда относятся, например, метастабильная локализация тепла [36, 61], конвективная локализация тепла, обусловленная механическим дви-

жением нелинейной среды [65—67], эффективная локализация тепла в средах с постоянными теплофизическими свойствами [68, 69]. От первых шагов, связанных с обнаружением этого инерционного нелинейного эффекта, теория перешла уже к обсуждению возможности и условий постановки физических экспериментов по обнаружению локализации тепла [58, 63, 64, 70].

4. Некоторые модификации математической модели нелинейной теплопроводности

Математические модели обладают обычно большой степенью общности, что позволяет использовать одну и ту же модель для описания различных по физической природе явлений и процессов. Модель нелинейной теплопроводности не является исключением из этого правила. С помощью этой модели можно описать широкий класс нелинейных процессов переноса, таких, как диффузия, фильтрация, вязкое трение, электропроводность, проникновение магнитного поля в проводники [71]. К математическим моделям, в основе которых лежат квазилинейные уравнения параболического типа, сводятся некоторые задачи физики плазмы, теории турбулентности, теории горения, химической кинетики, теории пограничного слоя, биофизики, астрофизики, синергетики и других теорий.

При описании таких процессов математическая модель нелинейной теплопроводности может несколько модифицироваться, обобщаться и усложняться. Однако и при исследовании таких обобщенных моделей обнаруживаются и проявляются нелинейные инерционные эффекты конечной скорости распространения и пространственной локализации возмущений.

В качестве примера рассмотрим влияние нелинейных механизмов конвективного и диффузионного переноса при описании распространения кинематических волн [72]. В основе этой теории лежат модельные уравнения переноса достаточно общей структуры, отражающие свойства волновых процессов различной физической природы. В рамках теории кинематических волн можно описать как распространение ударных газодинамических волн, так и движение ледников, транспортных потоков на автомагистралях, кинетику процессов сорбции и др.

При изучении процесса распространения кинематических волн в качестве исходного соотношения выбирается закон сохранения для плотности вещества или некоторого состояния $\rho = \rho(x, t)$, имеющий в одномерном случае ($x \in \mathbb{R}^1$) стандартный вид

$$\partial\rho/\partial t + \partial q/\partial x = 0. \tag{4.1}$$

Здесь q — плотность потока, связанная с ρ и ρ_x некоторой функциональной связью $q = q(\rho, \rho_x)$, зависящей от выбора физической модели, описывающей процесс переноса. Исследуя влияние нелинейностей механизмов конвективного и диффузионного переноса на распространение кинематической волны, запишем эту связь в виде

$$q = \alpha(\rho)\,\rho - \beta(\rho)\,\rho_x. \tag{4.2}$$

Ограничиваясь рассмотрением нелинейностей степенного вида, будем считать, что

$$\alpha(\rho) = \alpha_0 + \alpha_1 (\rho/\rho^*)^{\lambda},\ \alpha_0,\ \alpha_1 = \text{const} \geqslant 0, \qquad (4.3)$$

$$\beta(\rho) = \beta_0 (\rho/\rho_*)^{\sigma},\ \beta_0 = \text{const} \geqslant 0.$$

Здесь ρ_* — некоторое характерное значение плотности, а λ, $\sigma = \text{const} \geqslant 0$ — параметры нелинейностей.

В дальнейшем без ограничения общности значение α_0 будем считать равным нулю. Физически это соответствует переходу в систему отсчета, движущуюся со скоростью α_0.

Вводя безразмерные величины $u = \rho/\rho_*$, $x' = x/x_*$, $t' = t/t_*$, где x_* — характерный масштаб длины, а $t_* = x_* (\alpha_1 (1 + \lambda))^{-1}$ — характерный масштаб времени, и опуская в дальнейшем штрихи у безразмерных переменных, приведем (4.1)—(4.3) к следующему безразмерному уравнению с двойной нелинейностью степенного вида ($k = \beta_0 t_* x_*^{-2} = \text{const} \geqslant 0$):

$$u_t + u^{\lambda} u_x = k (u^{\sigma} u_x)_x. \qquad (4.4)$$

Это уравнение отличается от нелинейного уравнения теплопроводности младшим членом, описывающим нелинейный конвективный перенос. В предельном случае $\sigma = 0$ и $\lambda = 1$ уравнение (4.4) переходит в классическое уравнение Бюргерса. Это уравнение играет важную роль в теории нелинейных волн, позволяя, в частности, изучать структуру ударных волн с учетом эффектов диффузии и нелинейного распространения [72]. С помощью замены Коула—Хопфа уравнение Бюргерса может быть сведено к линейному уравнению теплопроводности, решения которого в математической физике подробно изучены. В общем случае $\sigma > 0$ такой замены для уравнения (4.4) найти не удается и приходится ограничиваться качественным исследованием свойств его решений [73, 74] и поиском частных решений этого нелинейного уравнения в частных производных.

Для уравнения (4.4) рассмотрим важную в теории нелинейных волн задачу об эволюции разрыва, когда в начальный момент времени распределение $u(x, 0)$ задано в виде скачка конечной высоты

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_m = \text{const} > 0, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \qquad (4.5)$$

Распад такого разрыва приведет к формированию волны сжатия, структуру которой можно определить из решения задачи (4.4), (4.5).

При отсутствии диффузионного механизма переноса ($k = 0$), если исключить из рассмотрения опрокидывание волн, разрыв в виде ударной волны бесконечно малой ширины будет перемещаться с постоянной скоростью $c_0 = (1 + \lambda)^{-1} u_m^{\lambda}$ [72]. Учет диффузионного механизма переноса (в нашем случае нелинейного) приведет к сглаживанию скачка и образованию некоторой пространственной структуры кинематической волны сжатия с непрерывным изменением плот-

ности. Решение, описывающее структуру волны в этом случае, не должно содержать точек сильного разрыва.

По истечении некоторого характерного времени релаксации следует ожидать выхода процесса на стационарный режим распространения. Изучая структуру волны, вызванной распадом разрыва (4.5), именно на стадии установления стационарного профиля волны будем искать решение уравнения (4.4) в автомодельной форме простой волны

$$u = u(\xi),\ \xi = x - c_+ t. \tag{4.6}$$

Здесь c_+ — скорость распространения волны — константа, которую следует определить в процессе решения задачи.

Рассматриваемая постановка задачи соответствует следующим условиям:

$$\begin{aligned} &u \to u_m,\ u^\sigma u_\xi \to 0 \text{ при } \xi \to -\infty, \\ &u \to 0,\ u^\sigma u_\xi \to 0 \text{ при } \xi \to +\infty, \end{aligned} \tag{4.7}$$

отражающим факт обращения в нуль диффузионного потока в бесконечно удаленных точках, где функция u стремится к постоянным значениям.

Подставляя в (4.4) решение в форме (4.6), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение со степенными нелинейностями:

$$k(u^\sigma u_\xi)_\xi - u^\lambda u_\xi + c_+ u_\xi = 0,\quad \xi \in \mathbb{R}^1. \tag{4.8}$$

Интегрируя (4.8) один раз, имеем

$$k u^\sigma u_\xi - (1+\lambda)^{-1} u^{\lambda+1} + c_+ u = 0, \tag{4.9}$$

так как константу интегрирования следует положить равной нулю с учетом условий при $\xi \to +\infty$.

Выполняя теперь условия (4.7) при $\xi \to -\infty$, определим из (4.9) значение скорости распространения волны $c_+ = (1+\lambda)^{-1} u_m^\lambda$. Это значение точно совпадает со скоростью распространения разрыва c_0 в отсутствие диффузионного механизма переноса ($k = 0$).

Введем обозначения

$$v = \frac{u}{u_m},\quad \eta = \xi \frac{(1+\sigma) u_m^{\lambda-\sigma}}{(1+\lambda) k} \tag{4.10}$$

и запишем (4.9) в виде

$$dv^{\sigma+1}/d\eta = v^{\lambda+1} - v \tag{4.11}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &v \to 1 \text{ при } \eta \to -\infty, \\ &v \to 0 \text{ при } \eta \to +\infty. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Уравнение (4.11) интегрируется, причем его решение, удовлетворяющее условиям (4.12), имеет качественно различную форму для $\sigma = 0$ и $\sigma > 0$. Это различие связано с конечной скоростью распро-

странения возмущений при $\sigma > 0$, отмеченной в разд. 2 при исследовании математической модели нелинейной теплопроводности.

В случае линейного механизма диффузии ($\sigma = 0$) это решение имеет простой вид:

$$v = v_0(\eta) = \{1 + \exp(\lambda\eta)\}^{-1/\lambda}. \qquad (4.13)$$

Решение $v_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ описывает распределение плотности в волне сжатия, распространяющейся по нулевому невозмущенному фону. Это распределение асимптотически стремится к стационарным состояниям при $\eta \to \mp\infty$ и не содержит фронтовых точек сильного или слабого разрыва (пунктирная кривая на рис. 4). Качественно иную форму имеет решение задачи (4.11), (4.12) для $\sigma > 0$, т. е. с учетом нелинейности диффузионного процесса переноса. В этом случае не существует решения в классе $C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Однако такое решение может быть найдено в классе функций, удовлетворяющих условиям гладкости $v \in C(\mathbb{R}^1)$, $v^\sigma v_\eta \in C(\mathbb{R}^1)$, которые гарантируют непрерывность плотности и потока. Физическая постановка задачи допускает решения уравнения (4.11) из такого класса. Соответствующее решение $u = u(x, t)$ исходного уравнения (4.4) является его обобщенным решением в смысле определения, данного в работе [73].

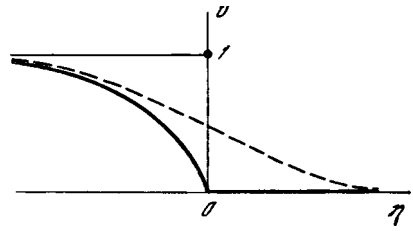


Рис. 4. Структура кинематической волны

Обобщенное решение задачи (4.11), (4.12) терпит слабый разрыв по производным в некоторой фронтовой точке $\eta = \eta_0$. Учитывая инвариантность уравнения (4.11) относительно сдвига по переменной η, значение η_0 всегда может быть выбрано равным нулю. Интегральная кривая такого решения (сплошная кривая на рис. 4) состоит из частного решения $v_-(\eta) > 0$ при $\eta < 0$, сшитого во фронтовой точке $\eta = 0$ с особым решением $v \equiv 0$ при $\eta > 0$:

$$v(\eta) = \begin{cases} v_-(\eta), & \eta < 0, \\ 0, & \eta \geqslant 0. \end{cases} \qquad (4.14)$$

Частное решение $v_-(\eta)$, обращающееся в нуль при $\eta = 0$, может быть найдено в виде неявной зависимости $\eta = \eta(v_-)$. Действительно, разделяя переменные в уравнении (4.11) и интегрируя полученное выражение, получаем

$$\eta = -(\sigma + 1)\int_0^{v_-} z^{\sigma-1}(1 - z^\lambda)^{-1}\,dz, \quad \eta \leqslant 0, \quad 0 \leqslant v_- \leqslant 1. \qquad (4.15)$$

Квадратура в (4.15) может быть выражена через гипергеометрическую функцию [75]

$$\eta = -\frac{\sigma+1}{\sigma} v_-^\sigma F\left[1, \frac{\sigma}{\lambda}; 1 + \frac{\sigma}{\lambda}; v_-^\lambda\right]. \qquad (4.16)$$

Анализ (4.16) показывает, что вблизи фронтовой точки $\eta = 0$ функция $v_-(\eta)$ имеет степенную асимптотику:

$$v_-(\eta) \sim \left(-\frac{\sigma}{\sigma+1}\eta\right)^{1/\sigma}, \quad \eta \to -0. \tag{4.17}$$

Отсюда следует, в частности, что $v(\eta) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ для $\sigma < 1$, т. е. фронт волны является пологим фронтом. При $\sigma > 1$ производная v_η терпит разрыв в точке $\eta = 0$, неограниченно возрастая по модулю при $\eta \to -0$. Фронт кинематической волны сжатия является крутым фронтом, если $\sigma > 1$. Нетрудно проверить, что, несмотря на неограниченный рост градиента плотности вблизи крутого фронта, диффузионный поток обращается в нуль при $\eta = 0$. Поэтому условие непрерывности потока выполняется в любой точке пространства, включая фронтовую. Математически это означает, что для найденного решения $v^\sigma v_\eta \in C(\mathbb{R}^1)$.

Отметим, что при некоторых соотношениях между параметрами нелинейностей σ и λ гипергеометрическая функция в (4.16) выражается через элементарные, и зависимость $v_- = v_-(\eta)$ может быть найдена в явном аналитическом виде. Так, например, при $\lambda = \sigma$

$$v_-(\eta) = \left\{1 - \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\eta\right)\right\}^{1/\sigma}, \quad \eta \leqslant 0,$$

при $\lambda = 2\sigma$

$$v_-(\eta) = \left\{\operatorname{th}\left(-\frac{\sigma}{\sigma+1}\eta\right)\right\}^{1/\sigma}, \quad \eta \leqslant 0.$$

Таким образом, наличие фронтовой точки слабого разрыва является характерной особенностью структуры рассмотренной кинематической волны сжатия, в формировании которой принимает участие нелинейный диффузионный механизм переноса. Появление фронтовой точки является следствием конечной скорости распространения возмущений в математической модели нелинейной теплопроводности, лежащей в основе уравнения (4.4).

Задача об эволюции инверсного разрыва, когда начальное распределение задано в виде

$$u(x, 0) = u_p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ u_m > 0, & x > 0, \end{cases} \tag{4.18}$$

не имеет автомодельного решения, соответствующего волновому режиму распространения волны разрежения со стационарным профилем. Однако и в этом случае можно сделать ряд выводов об особенностях эволюции начального разрыва (4.18) с учетом нелинейности процесса переноса. Как следует из результатов работы [73], в задаче (4.4), (4.18) существует левый фронт волны разрежения, причем если параметры нелинейности удовлетворяют условию $\sigma > \lambda$, то наблюдается эффект локализации фронта: для любого $t > 0$ $u(x, t) = 0$, если $x < -x_m$. Максимальную глубину проникновения фронта волны разрежения x_m можно оценить следующим образом. Для $\sigma > \lambda$ уравнение (4.4) имеет следующее стационарное обобщенное

решение:

$$u_s(x) = \begin{cases} u_m \left\{1 + \dfrac{x}{l_m}\right\}^{\frac{1}{\sigma-\lambda}}, & x > -l_m, \\ 0, & x \leqslant -l_m, \end{cases} \tag{4.19}$$

где

$$l_m = k\,(1+\lambda)\,(\sigma-\lambda)^{-1}\,u_m^{\sigma-\lambda}. \tag{4.20}$$

Так как $u_s(x) \geqslant u_p(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^1$ и $u(0, t) \leqslant u_m = u_s(0)$ для любого $t > 0$, то из теоремы сравнения работы [73] следует, что для задачи (4.4), (4.18) носитель решения принадлежит интервалу $[-l_m, +\infty)$, а вне его $u(x, t) = 0$ в любой момент времени $t \geqslant 0$. Поэтому для глубины проникновения фронта волны разрежения x_m справедлива оценка $x_m \leqslant l_m$, где величина l_m определена соотношением (4.20).

Локализация фронта волны разрежения обусловлена конвективным переносом в рассматриваемом процессе и является проявлением конвективной локализации возмущений в нелинейной среде [65—67], так как для волны разрежения направление переноса противоположно направлению движения фронта волны возмущения.

Усложнение математической модели (4.4) может быть связано с учетом в законе сохранения (4.1) объемных источников или стоков с мощностью, зависящей от плотности. Уравнение такого типа со степенными нелинейностями

$$u_t = k\,(u^\sigma u_x)_x + a u^\lambda u_x + b u^\nu, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_+,$$

исследовалось в работах [73, 76], где получен ряд результатов относительно свойств обобщенных решений задачи Коши и краевой задачи в полупространстве для этого уравнения.

Дальнейшие обобщения математической модели процесса нелинейной теплопроводности могут быть связаны с учетом анизотропных свойств среды [19], ее неоднородности [77, 78] или с переходом к рассмотрению многокомпонентных диффузионных процессов переноса [79, 80]. Естественным обобщением такой модели является также переход от степенных нелинейностей к нелинейностям более общего вида.

В заключение отметим, что в настоящей работе при исследовании математической модели процесса нелинейной теплопроводности акцентировалось внимание на качественной теории и аналитических методах решения соответствующих задач. Эти методы в настоящее время не исчерпывают всех методов исследования нелинейных математических моделей. Развитие современной вычислительной техники, численных методов решения нелинейных задач математической физики и особенно нового направления математического моделирования — вычислительного эксперимента — позволяет эффективно решать широкий класс задач для уравнения нелинейной теплопроводности с нелинейностями достаточно общего вида.

Однако только одни вычисления и расчеты конкретных задач лишь в редких случаях позволяют выявить и, самое главное, объяс-

нить общие свойства и закономерности исследуемой модели. Очевидно, и здесь справедлив некоторый «принцип дополнительности», когда для полного и всестороннего исследования математической модели необходимо численные методы дополнять качественными и аналитическими методами. Только комплексное применение этих методов с их параллельным развитием и взаимным влиянием приведет к интенсивному развитию теории процессов, описываемых математической моделью. Поэтому, несмотря на успехи численных методов, значение качественной теории и аналитических методов исследования математической модели процесса нелинейной теплопроводности остается важным и на современном этапе развития теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 724 с.
2. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 607 с.
3. *Самарский А. А.* Численные методы решения многомерных задач механики и физики.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1980, т. 20, № 6, с. 1418—1428.
4. *Мучник Г. Ф., Рубашов И. Б.* Методы теории теплообмена. М.: Высш. шк., 1970. Ч. 1. 285 с.
5. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
6. *Berkovsky B. M., Bashtovoi V. G.* The finite velocity of heat propagation from the view-point of the kinetic theory.— Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1977, vol. 20, N 6, p. 621—626.
7. *Граник И. С., Мартинсон Л. К.* Движение фронта тепловой волны в нелинейной среде с поглощением.— Инж.-физ. журн., 1980, т. 35, № 4, с. 728—731.
8. *Мартинсон Л. К.* Нелинейные эффекты в процессе эволюции тепловых структур.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1984, т. 24, № 3, с. 462—467.
9. *Курдюмов С. П., Посашков С. А., Синило А. В.* Автомодельные тепловые структуры в нелинейной среде со стоками тепла: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 111. М., 1984. 22 с.
10. *Калашников А. С.* О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1974, т. 14, № 4, с. 891—905.
11. *Калашников А. С.* О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1976, т. 16, № 3, с. 689—696.
12. *Кершнер Р.* О некоторых свойствах обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1976. 9 с.
13. *Калашников А. С.* О возникновении особенностей у решений уравнений нестационарной фильтрации.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1967, т. 7, № 2, с. 440—443.
14. *Олейник О. А.* Об уравнении типа уравнения нестационарной фильтрации.— Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 6, с. 1210—1213.
15. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-Линь.* Задачи Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, т. 22, № 5, с. 667—704.
16. *Калашников А. С.* О дифференциальных свойствах обобщенных решений уравнений типа нестационарной фильтрации.— Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1974, № 1, с. 62—68.
17. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.— В кн.: Сборник, посвящен-

ный семидесятилетию академика А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950, с. 61—71.
18. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористых средах.— Прикл. математика и механика, 1952, т. 16, № 1, с. 67—78.
19. *Самарский А. А., Соболь И. М.* Примеры численного расчета температурных волн.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1963, т. 3, № 4, с. 702—719.
20. *Самарский А. А.* Некоторые результаты теории разностных методов.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 7, с. 1155—1171.
21. *Абрашин В. Н., Цурко В. А.* Разностные схемы для параболических уравнений с нелинейным вырождением.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 7, с. 1215—1223.
22. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
23. *Новещенко Ю. А., Попов Ю. П.* Пакет программ для решения тепловых задач ТЕКОН: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 65. М., 1978. 46 с.
24. *Калашников А. С.* О задаче Коши для вырождающегося параболического уравнения второго порядка с нестепенной нелинейностью.— Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1981, вып. 6, с. 83—96.
25. *Калашников А. С.* О распространении возмущений в первой краевой задаче для вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью.— Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1982, вып. 8, с. 128—134.
26. *Калашников А. С.* О характере движения фронтов при нестационарной фильтрации жидкостей, не подчиняющихся закону Дарси.— Успехи мат. наук, 1982, т. 37, вып. 4, с. 118—119.
27. *Антонцев С. Н.* О конечной скорости распространения возмущений в плоских задачах двухфазной фильтрации.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Наука, 1979, вып. 39, с. 23—29.
28. *Антонцев С. Н.* О характере возмущений, описываемых решениями многомерных вырождающихся параболических уравнений.— В кн.: Динамика жидкости со свободными границами. Новосибирск: Наука, 1979, вып. 40, с. 25—30.
29. *Антонцев С. Н.* Конечная скорость распространения возмущений в многомерных задачах двухфазной фильтрации.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1980, т. 96, с. 3—12.
30. *Галактионов В. А.* О некоторых свойствах бегущих волн в среде с нелинейной теплопроводностью и источниками тепла.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1981, т. 21, № 4, с. 980—989.
31. *Knerr B. F.* The behaviour of the support of solution of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension.— Trans. Amer. Math. Soc., 1979, vol. 249, N 2, p. 409—424.
32. *Коган Б. Ю.* Размерность физической величины. М.: Наука, 1968. 71 с.
33. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
34. *Мартинсон Л. К.* Распространение возмущений в нелинейных процессах переноса.— Тр. МВТУ, 1979, № 301, с. 19—34.
35. *Мартинсон Л. К.* Эволюция теплового импульса в среде с нелинейной теплопроводностью.— Тр. МВТУ, 1982, № 374, с. 14—34.
36. *Самарский А. А., Змитренко П. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6, с. 1344—1347.
37. *Змитренко П. В., Михайлов А. П.* Инерция тепла. М.: Знание, 1982. 64 с.
38. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1972, т. 12, № 4, с. 1048—1053.
39. *Павлов К. Б.* Пространственная локализация тепловых возмущений при нагревании сред с объемным поглощением тепла.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1973, № 5, с. 96—101.
40. *Мартинсон Л. К.* О конечной скорости распространения тепловых возмущений в средах с постоянным коэффициентом теплопроводности.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1976, т. 16, № 5, с. 1233—1241.

41. *Голайдо С. И., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* Распространение тепловых возмущений в средах с объемным поглощением тепла.— Инж.-физ. журн., 1977, т. 32, № 1, с. 124—130.
42. *Павлов К. Б., Романов А. С.* Об изменении области локализации возмущений в процессах нелинейного переноса.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 57—62.
43. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме.— Бюл. МГУ. Математика и механика, 1937, т. 1, вып. 6, с. 1—26.
44. *Волосов К. А., Данилов В. Г., Маслов В. П.* Математическое моделирование технологических процессов изготовления БИС. М.: МИЭМ, 1984. 131 с.
45. *Ленюк М. П.* О волновом уравнении теплопроводности.— Укр. мат. журн., 1972, т. 24 № 6, с. 832—838.
46. *Чернышев А. Д.* О теории теплопроводности при конечной скорости распространения тепла.— Инж.- физ. журн., 1975, т. 28, № 3, с. 523—527.
47. *Бубнов В. А.* К теории тепловых волн.— Инж.- физ. журн., 1982, т. 43, № 3, с. 431—437.
48. *Гладков А. Л.* Решение типа источника для некоторых квазилинейных параболических уравнений.— Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1982, № 5, с. 36—39.
49. *Граник И. С.* К вопросу о локализации температурных возмущений в средах с объемным поглощением тепла.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1978, т. 18, № 3, с. 775—779.
50. *Граник И. С.* Пространственная локализация возмущений в нелинейных процессах переноса: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МАИ, 1978. 15 с.
51. *Голайдо С. И., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* Нестационарные задачи нелинейной теплопроводности с объемным поглощением тепла.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1973, т. 13, № 5, с. 1351—1356.
52. *Мартинсон Л. К.* Распространение тепловой волны в нелинейной среде с поглощением.—Журн. прикл. механики и техн. физики, 1979, № 4, с. 36—39.
53. *Мартинсон Л. К.* Эволюция теплового импульса в нелинейной среде с объемным поглощением тепла.— Теплофизика высоких температур, 1983, т. 21, № 4, с. 801—803.
54. *Мартинсон Л. К.* Тепловая самоизоляция локализованных структур в средах с объемным поглощением тепла.— Письма в ЖТФ, 1980, т. 6, вып.4, с. 211—215.
55. *Мартинсон Л. К.* Локализованная тепловая структура в среде с объемным поглощением тепла.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1981, № 2, с. 70—73.
56. *Мартинсон Л. К.* Эффект самоизоляции локализованных структур в нелинейных процессах переноса.— Инж.-физ. журн., 1983, т. 44, № 6, с. 983—986.
57. *Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 321—324.
58. *Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Локализация горения в плазме с электронной теплопроводностью.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, вып. 9, с. 620—624.
59. *Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Плохотников К. Э.* Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Тепловой «кристалл»: Препр. ИМП им. М. В. Келдыша АН СССР № 22. М., 1977. 50 с.
60. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Метастабильная локализация возмущений в задачах для уравнения типа нестационарной теплопроводности: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 181. М., 1979. 33 с.
61. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Локализация тепла в нелинейных средах.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826—1841.

62. *Самарский А. А.* Локализация тепла в нелинейных средах.— Успехи мат. наук, 1982, т. 37, вып. 4, с. 86—87.
63. *Курдюмов С. П.* Локализация диффузионных процессов и возникновение структур при развитии в диссипативной среде режимов с обострением: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1979. 38 с.
64. *Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия ее проявления в эксперименте: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 103. М., 1977. 87 с.
65. *Мартинсон Л. К.* Пространственная локализация тепловых возмущений в движущихся нелинейных средах.— Теплофизика высоких температур, 1979, № 5, с. 1019—1023.
66. *Мартинсон Л. К.* Плоская задача конвективного теплопереноса в нелинейной среде.— Прикл. математика и механика, 1980, т. 44, вып. 1, с. 181—185.
67. *Мартинсон Л. К.* Тепловой пограничный слой в нелинейной среде с объемным поглощением тепла.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1981, т. 21, № 4, с. 1049—1053.
68. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Асимптотическая стадия режимов с обострением и эффективная локализация тепла в задачах нелинейной теплопроводности.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 7, с. 1195—1204.
69. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянной теплопроводностью: Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР № 28. М., 1979. 76 с.
70. *Грюканов М. Ф., Конкашбаев И. К.* Нелинейные волны при сжатии θ-пинча, ограниченного торцами.— Физика плазмы, 1981, т. 7, № 6, с. 1189—1194.
71. *Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е.* Явления переноса. М.: Химия, 1974. 687 с.
72. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
73. *Калашников А. С.* О характере распространения возмущений в процессах, описываемых квазилинейными вырождающимися параболическими уравнениями.— Труды сем. им. И. Г. Петровского, 1975, вып. 1, с. 135—144.
74. *Павлов К. Б., Покровский Л. Д., Тараненко С. Н.* О свойствах решений нелинейного уравнения переноса.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 9, с. 1661—1667.
75. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
76. *Кершнер Р.* Об условиях локализации тепловых возмущений в полуограниченной движущейся среде при наличии поглощения.— Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1976, № 4, с. 52—58.
77. *Самарский А. А., Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г.* Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горящей среде.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 3, с. 587—591.
78. *Калашников А. С.* Об уравнении теплопроводности в среде с неравномерно распределенными нелинейными источниками или поглотителями тепла.— Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1983, № 3, с. 20—24.
79. *Самарский А. А, Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных двухкомпонентных средах с объемными источниками.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 5, с. 1084—1088.
80. *Таланов В. И.* Стимулированная диффузия и кооперативные эффекты в распределенных кинетических системах.— В кн.: Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983, с. 47—56.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.
ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ 7

Волосевич П. П., Леванов Е. И.
РАЗЛИЧНЫЕ РЕЖИМЫ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ И ТРЕХТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ 60

Габов С. А., Свешников А. Г.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ 107

Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Посашков С. А., Самарский А. А.
КВАЗИЛИНЕЙНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СО СЛОЖНЫМ СПЕКТРОМ НЕОГРАНИЧЕННЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ 142

Галахов М. А., Усов П. П.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ, СМАЗКИ И ИЗНОСА 183

Давыдов А. С.
НЕЛИНЕЙНАЯ БИОФИЗИКА 223

Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ 261

Мартинсон Л. К.
ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СРЕДАХ С ОБЪЕМНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ 279

УДК 517.957:517.91

Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. **Двухкомпонентные диссипативные системы в окрестности точки бифуркации.**— В кн.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986.

В работе рассматривается уравнение Курамото—Цузуки, описывающее большой класс нелинейных диссипативных систем. Исследованы различные типы пространственно-симметричных и автомодельных решений, двухчастотные и непериодические режимы (диффузионный хаос), а также простейшие двумерные решения этого уравнения. Рассмотрены различные упрощенные и качественные методы, позволившие подробно исследовать уравнение Курамото—Цузуки в случае небольших областей.
Ил. 28. Табл. 1. Библиогр. 50 назв.

УДК 517.957:[536.2+537.84]

Волосевич П. П., Леванов Е. И. **Различные режимы теплопереноса в двухтемпературной и трехтемпературной плазме.**— В кн.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986.

В работе с помощью анализа автомодельных решений и численного интегрирования уравнений газовой динамики исследуются различные режимы переноса тепла в высокотемпературной плазме, рассматриваемой в одножидкостном двухтемпературном и трехтемпературном гидродинамическом приближении. Демонстрируется роль автомодельных решений как в изучении ряда качественных закономерностей процессов, происходящих в плазме, так и в оценке точности и эффективности методов, используемых для численного моделирования нелинейных задач физики плазмы.
Ил. 10. Библиогр. 112 назв.

УДК 517.958:532.59

Гаджов С. А., Свешников А. Г. **Математические задачи динамики стратифицированной жидкости.**— В кн.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986.

В работе дан обзор новых задач математической физики, возникающих в связи с изучением динамики стратифицированной жидкости, и результатов, полученных при их изучении. Изложение ведется таким образом, чтобы читатель мог получить представление о методах получения и обоснования излагаемых результатов. Главное внимание уделено рассмотрению основных начально-краевых задач динамики стратифицированной жидкости, вопросам их обобщенной и классической разрешимости, обсуждены различные типы уравнений установившихся колебаний и задачи дифракции. Кроме того, рассмотрены некоторые явно разрешимые нестационарные задачи и изучено поведение их решений при больших временах.
Ил. 1. Библиогр. 30 назв.

УДК 517.956:536.2

Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Посашков С. А., Самарский А. А. **Квазилинейное параболическое уравнение со сложным спектром неограниченных автомодельных решений.**— В кн.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986.

Рассматривается квазилинейное параболическое уравнение теплопроводности с источником, коэффициент теплопроводности зависит от градиента температуры. Построены неограниченные автомодельные решения, существующие на конечном интервале изменения времени. Показано, что возникающая при этом нелинейная эллиптическая задача в R^N имеет сложный спектр решений, состоящий из четырех семейств — трех дискретных (счетных) и одного континуального. Численно построена картина ветвления решений, упорядоченных по некоторому параметру, проверена асимптотическая устойчивость соответствующих автомодельных решений. Доказано существование решений эллиптической задачи, принадлежащих двум различным дискретным семействам.
Ил. 13. Библиогр. 53 назв.

УДК 531.43/.49:532.516

Галахов М. А., Усов П. П. **Математические модели теории трения, смазки и износа.**— В кн.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986.

Излагаются некоторые достаточно развитые математические модели теории трения, смазки и износа, а также результаты их решения. Главное внимание уделяется теории смазки и элементам математической теории износа с приложениями к расчету узлов трения.
Ил. 14. Библиогр. 41 назв.

УДК 532.59

Давыдов А. С. **Нелинейная биофизика.**— В кн.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986.

В статье дается общее описание возбуждений в нелинейных квазиодномерных системах, описываемых уединенными волнами — солитонами. Исследуется перенос энергии внутрипептидного возбуждения по спиральным белковым молекулам. Показано, что солитоны являются идеальными носителями энергии и информации. На основе представления о солитонах обсуждается новая модель мышечного сокращения на молекулярном уровне и вопросы о возможной роли солитонов в переносе энергии и электронов внутри клетки.

Библиогр. 70 назв.

УДК 519.6:533.6.01

Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н. **Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений.**— В кн.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986.

На основе кинетической модели получена система уравнений типа уравнений газовой динамики. Предложены алгоритмы решения этой системы уравнений и проведены численные расчеты одномерных и двумерных задач течения невязкого газа.

Ил. 5, Библиогр. 19 назв.

УДК 517.958

Мартинсон Л. К. **Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением.**— В кн.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986.

Изучаются свойства конечной скорости распространения и пространственной локализации обобщенных решений квазилинейных уравнений параболического типа с младшими членами, лежащих в основе математической модели процесса нелинейной теплопроводности. Анализируется влияние объемных эндотермических процессов в нелинейной среде на распространение тепловых возмущений.

Исследуются особенности распространения кинематических волн, описываемых обобщенным уравнением Бюргерса, учитывающим нелинейности механизмов диффузионного и конвективного переноса.

Ил. 4. Библиогр. 80 назв.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Процессы в нелинейных средах

Утверждено к печати
ордена Ленина Институтом прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР

Редактор издательства *Е. К. Паламарчук.* Художник *Ф. Н. Буданов*
Художественный редактор *М. Л. Храмцов.* Технический редактор *Н. Н. Плохова*
Корректоры *Н. Г. Васильева, Р. З. Землянская*

ИБ № 31681

Сдано в набор 3.10.85. Подписано к печати 28.02.86. Т-03465. Формат 60×90¹/₁₆
Бумага кн.-журнальная. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 19,5.
Усл. кр. отт. 19,5. Уч.-изд. л. 21,9. Тираж 3200 экз. Тип. зак. 1906. Цена 2 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90
2-я тип. издательства «Наука» 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6