УДК 517.956

О методе стационарных состояний для квазилинейных параболических уравнений

Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.

§ 1. Введение

Работа посвящена исследованию асимптотических свойств неограниченных решений широкого класса квазилинейных уравнений и систем параболического типа. Неограниченным решением или режимом с обострением принято называть решение нелинейной эволюционной задачи, которое определено только на конечном интервале изменения времени, причем по мере приближения к моменту обострения амплитуда решения по пространственным переменным неограниченно возрастает. Поэтому неограниченное решение не может быть естественным образом продолжено за момент обострения и тем самым является существенно локальным по времени. Многие математические аспекты теории неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений, а также определенный круг приложений отражены в работах [1]–[6], где можно найти довольно полный список литературы (здесь указаны работы, которые содержат обзоры различных направлений исследований в этой области). В дальнейшем мы не будем касаться многих из упомянутых там хорошо известных и традиционных вопросов, связанных с исследованиями неограниченных решений.

В настоящей работе указаны некоторые дополнительные возможности, которые дает метод стационарных состояний [7], [8], см. также [4] и [6, гл. IV, VII]. На его основе удается получить при весьма общих предположениях оценку снизу неограниченного решения в окрестности точек сингулярности, где оно растет до бесконечности. При этом данный подход применим к исследованию практически любых нелинейных задач, для которых справедлива теорема сравнения решений по краевым данным.

Основное содержание метода излагается на примере анализа неограниченных решений ряда конкретных нелинейных уравнений: квазилинейного параболического уравнения с источником (§ 2), уравнения теплопроводности с нелинейным краевым условием второго рода (§ 3) и параболической системы квазилинейных уравнений (§ 4). В каждом из параграфов проводится довольно подробное (но не исчерпывающее всех возможностей) исследование неограниченных решений методом стационарных состояний, специально приспособленном для конкретных уравнений. Поэтому нет необходимости в изложении и доказательстве теоремы общего вида, применимой сразу для всего класса уравнений и систем (хотя это, конечно, можно сделать). Ниже мы ограничимся весьма кратким и до некоторой степени условным описанием метода.

Краткая характеристика метода стационарных состояний. Пусть $u=u(t, x)\geqslant 0$ – классическое неограниченное ре-

шение в $(0, T_0)\times R^N$ задачи Коши для некоторого нелинейного параболического уравнения $u_t=\mathbf{A}(u)$, $\mathbf{A}(u)$ — эллиптический оператор (например, как в § 2, $\mathbf{A}(u)=\nabla((1+|\nabla u|^2)^{\sigma/2}\nabla u)+u^\beta$, $\sigma\geqslant 0$, $\beta>1$ — постоянные). Здесь $T_0\in(0, +\infty)$ — конечное время существования решения. Пусть $x=0$ — «точка сингулярности», т. е.

$$\overline{\lim_{t\to T_0^-}}\, u(t, 0) = +\infty. \tag{1.1}$$

Метод стационарных состояний устанавливает тот факт, что определенная информация о поведении нижнего предельного распределения

$$\underline{u}(T_0^-, x) = \underline{\lim_{t\to T_0^-}}\, u(t, x) \tag{1.2}$$

в окрестности точки $x=0$ содержится в семействе стационарных состояний $\{U_\lambda, \lambda>0\}$, где $U_\lambda\geqslant 0$ при любом $\lambda>0$ — локальное по x вблизи $x=0$ решение стационарного уравнения $\mathbf{A}(U_\lambda)=0$ и $U_\lambda(0)=\lambda$. Оценка $u(t, x)$ снизу вблизи $t=T_0$, $x=0$ непосредственно связана с видом «огибающей» $L(x)$ семейства $\{U_\lambda\}$, которая определяется следующим образом:

$$L(x) = \sup_{\lambda>0} U_\lambda(x). \tag{1.3}$$

В частности, решение u может быть локализовано и, например, точка сингулярности $x=0$ может быть единственной только в том случае, если огибающая (1.3) определена и конечна всюду в $R^N\setminus\{0\}$. И наоборот, если $L=+\infty$ в R^N, то это обеспечивает отсутствие локализации и, грубо говоря, $u(t, x)$ сколь угодно сильно растет при $t\to T_0^-$ в точках, сколь угодно удаленных от изначально заданной точки сингулярности $x=0$.

В семействе $\{U_\lambda\}$ содержатся также в некотором параметризованном виде (в смысле зависимости $\lambda=\lambda(t)$) важные эволюционные асимптотические свойства неограниченных решений. Эти возможности метода реализованы для некоторых уравнений, например, в [4], [6], [7] и будут также использованы в настоящей работе.

Отметим одну любопытную закономерность: ограничения на параметры уравнения, при которых неограниченное решение задачи Коши не является локализованным (т. е. $L(x)=+\infty$ в R^N), гарантируют глобальную разрешимость краевой задачи в ограниченной по пространству области с граничным условием Дирихле при произвольной конечной начальной функции. Этот факт будет использован в § 4, где рассмотрена довольно сложная параболическая система квазилинейных уравнений.

Методом стационарных состояний удается описать лишь некоторые, но зато, по-видимому, самые общие, свойства неограниченных решений сложных параболических систем квазилинейных уравнений. Более детальное исследование тех свойств решений, которые существенно зависят от вида начальных функций, требует привлечения других подходов и, в частности, численных методов; см. примеры в [6, гл. VII].

Авторы благодарны С. А. Посашкову за полезные обсуждения и замечания.

§ 2. Квазилинейное параболическое уравнение

Возможности метода стационарных состояний удобно сначала продемонстрировать на примере простой модели горения в нелинейной дис-

сипативной среде. Ниже рассматривается задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с источником

$$u_t = \mathbf{A}_1(u) \equiv \nabla \cdot ((1+|\nabla u|^2)^{\sigma/2} \nabla u) + u^\beta, \ t > 0, \ x \in R^N; \tag{2.1}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \ x \in R^N; \ \sup u_0 < +\infty, \ u_0 \in C(R^N), \tag{2.2}$$

где $\sigma > 0$, $\beta > 1$ — постоянные. Коэффициент теплопроводности $k(p) = (1+p^2)^{\sigma/2}$, $p = |\nabla u|$ в (2.1) строго положителен и $k \in C^\infty([0, +\infty))$, так что уравнение является равномерно параболичным, и поэтому задача (2.1), (2.2) имеет локальное по t классическое неотрицательное решение [9, гл. V]. При этом различные решения уравнения (2.1) удовлетворяют обычной теореме сравнения, см., например, [10, с. 72], что существенно для применяемой методики.

При анализе задачи Коши для вырождающегося уравнения

$$u_t = \mathbf{A}_0(u) = \nabla \cdot (|\nabla u|^\sigma \nabla u) + u^\beta, \ t > 0, \ x \in R^N; \tag{2.1'}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \ x \in R^N; \ u_0 \in C^1(R^N), \ \sup(u_0 + |\nabla u_0|) < +\infty \tag{2.2'}$$

(здесь $k(p) = p^\sigma$ и $k(0) = 0$ — уравнение вырождается там, где $p \equiv |\nabla u| = 0$), возникают некоторые дополнительные трудности, поскольку (2.1′), (2.2′) имеет, вообще говоря, обобщенное решение, которое при $t > 0$ не имеет $C^{1,2}_{tx}$ гладкости, необходимой для формального применения теоремы сравнения. Эти затруднения не возникают при исследовании уравнения (2.1), хотя, конечно, в окрестности точки сингулярности, где неограниченно растет и решение и его градиент, отличия в коэффициентах уравнений (2.1) и (2.1′) должны практически не влиять на вид асимптотической оценки снизу. Надо сказать, что технические сложности при аналогичном исследовании вырождающегося уравнения (2.1′) не являются сколько-нибудь принципиальными; хорошо известно, что локальные обобщенные решения уравнений с вырождением типа (2.1′) являются непрерывными, и здесь справедлива теорема сравнения, см. об этом в обзоре [11]. Однако в дальнейшем мы всегда будем, если это необходимо, «подправлять» вырождающиеся уравнения так, чтобы сделать их равномерно параболичными; тем более, на самом деле, это вообще не сказывается на конечном результате и практически не ведет к усложнению вспомогательных выкладок.

1. Предварительные сведения. Условия возникновения неограниченных решений уравнений типа (2.1) или (2.1′) сейчас весьма подробно изучены; различными способами это сделано, например, в [12]—[14]. В частности, в [14] установлено, что при $1 < \beta < \sigma + 1 + (\sigma+2)/N$ всякое нетривиальное решение $u \not\equiv 0$ задачи (2.1′), (2.2′) существует конечное время, а в случае $\beta > \sigma + 1 + (\sigma+2)/N$ при достаточно «малых» $u_0(x)$ возможны глобальные решения. Свойство локализации неограниченных решений наглядно иллюстрирует автомодельное решение уравнения

$$u_t = (|u_x|^\sigma u_x)_x + u^{\sigma+1}, \quad t > 0, \quad x \in R^1 \tag{2.3}$$

(уравнение (2.1′) при $\beta = \sigma + 1$, $N = 1$). Это обобщенное решение в разделяющихся переменных [14]:

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/\sigma} \theta_A(x), \ 0 < t < T_0 < +\infty, \ x \in R^1, \tag{2.4}$$

где неотрицательная функция $\theta_A \in C^1(R^1)$ является финитной: $\operatorname{supp} \theta'_A \equiv$

$\equiv \{x \in R^1 \mid \theta_A(x) > 0\} = \{|x| < L_S/2\}$,

$$L_S = \pi(\sigma+1)^{1/(\sigma+2)} \left[\sigma \sin\left(\frac{\pi}{\sigma+2}\right)\right]^{-1}. \tag{2.5}$$

Поэтому автомодельное решение (2.4) неограниченно возрастает при $t \to T_0^-$ в конечной по своим размерам области локализации $\{|x| < L_S/2\}$, причем $u_A \equiv 0$ вне ее, т. е. возмущения из области локализации не выходят.

Особенности эволюции неограниченных решений задачи (2.1), (2.2) будут рассмотрены в трех случаях: $1 < \beta < \sigma+1$ (HS-режим), $\beta = \sigma+1$ (S-режим) и $\beta > \sigma+1$ (LS-режим). Единственное ограничение, которое накладывается на решение задачи, состоит в следующем.

Условие А. A_1) $u(t, x)$ — неограниченное решение в $(0, T_0) \times R^N$, $T_0 \in R_+^1$, т. е. u определено, равномерно ограничено и является классическим решением в $Q_T = (0, T] \times R^N$ для любого $T \in (0, T_0)$ и

$$\overline{\lim_{t \to T_0^-}} \sup_{x \in R^N} u(t, x) = +\infty. \tag{2.6}$$

A_2) $x = 0$ — «точка сингулярности», т. е.

$$\overline{\lim_{t \to T_0^-}} u(t, 0) = +\infty. \tag{2.7}$$

Асимптотические свойства неограниченного решения удобно описывать в терминах соответственно нижнего $\underline{u}$ и верхнего $\bar{u}$ предельных распределений:

$$\underline{u}(T_0^-, x) = \underline{\lim_{t \to T_0^-}} u(t, x), \quad \bar{u}(T_0^-, x) = \overline{\lim_{t \to T_0^-}} u(t, x). \tag{2.7'}$$

В дальнейшем мы будем главным образом рассматривать пространственную структуру нижнего предельного распределения $\underline{u}(T_0^-, x)$. Это удается сделать на основе метода стационарных состояний в весьма общем случае. Что касается структуры верхнего распределения $\bar{u}(T_0^-, x)$, то этот вопрос в общей постановке остается открытым. Он непосредственно связан с проблемой локализации: при каких условиях множество (область локализации)

$$\omega_L = \{x \in R^N \mid \bar{u}(T_0^-, x) = +\infty\} \tag{2.8}$$

ограничена? Ниже мы постараемся кратко охарактеризовать результаты, связанные с этой проблемой.

Введем обозначения: $B_R = \{|x| < R\}$, $S_R = \{|x| = R\}$, $R > 0$; $[z]_+ = \max\{0, z\}$. Далее, как обычно, $|x|^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$.

2. Основные результаты. Свойства неограниченных решений задачи Коши (2.1), (2.2) существенно зависят от соотношения между параметрами β и σ. Что касается структуры нижнего предельного распределения $\underline{u}(T_0^-, x)$, то здесь справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть* $\sigma > 0$, $\beta > 1$ *и решение задачи* (2.1), (2.2) *удовлетворяет условию* А. *Тогда*

(HS) *если* $\beta \in (1, \sigma+1)$, *то для любого* $R > 0$

$$\overline{\lim_{t \to T_0^-}} \operatorname{srp}_{|x|=R} u(t, x) = +\infty; \tag{2.9}$$

(S) *если* $\beta=\sigma+1$, *то* (2.9) *выполнено для любого* $0<R<R_0=\{[(\sigma+2)/(\sigma+1)]^{\sigma+1}N\}^{1/(\sigma+2)}$;

(LS) *если* $\beta>\sigma+1$, *то для любого достаточно малого* $R\in(0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0>0$ — *постоянная, найдется такое* $t_R\in(0, T_0)$, *что*

$$\sup_{|x|=R} u(t_R, x) > A_0 R^{-\frac{\sigma+2}{\beta-(\sigma+1)}}, \quad A_0=[\beta-(\sigma+1)][(\sigma+2)^{\sigma+1}\beta^{-\beta}N]^{1/[\beta-(\sigma+1)]}. \quad (2.10)$$

Кратко прокомментируем теорему. Утверждение (HS) означает, что при $\beta<\sigma+1$ решение всегда неограниченно возрастает при $t\to T_0^-$ в точках, сколь угодно удаленных от точки сингулярности $x=0$, т. е. любое неограниченное решение не является локализованным. Из утверждения (S) следует, что при $\beta=\sigma+1$ область локализации ω_L (см. (2.8)) при условии $0\in\omega_L$ не может быть слишком «малой». В утверждении (LS) получена оценка пространственной структуры произвольного неограниченного решения в окрестности точки сингулярности $x=0$ при $t\to T_0^-$. Точность оценки (2.10) обсуждается в заключительном пункте этого параграфа.

3. Семейство стационарных состояний; огибающая при $\beta>\sigma+1$. Обозначим через $U_\lambda=U_\lambda(|x|)$, $\lambda>0$ — параметр, следующее семейство радиально симметричных решений стационарного уравнения (2.1):

$$\mathbf{A}_1(U_\lambda)\equiv r^{1-N}(r^{N-1}(1+|U_\lambda'|^2)^{\frac{\sigma}{2}}U_\lambda')'+U_\lambda^\beta=0, \quad r=|x|>0; \quad (2.11)$$

$$U_\lambda(0)=\lambda, \quad U_\lambda'(0)=0 \quad ((\cdot)'\equiv\partial(\cdot)/\partial r). \quad (2.12)$$

Если $U_\lambda=0$ в некоторой точке $r=r_*$, то полагаем $U_\lambda=0$ при $r>r_*$. Для наших целей достаточно убедиться, что эта задача имеет локальное неотрицательное решение в окрестности точки сингулярности $x=0$, и установить элементарные свойства функций из семейства $\{U_\lambda, \lambda>0\}$.

Лемма 2.1. *При любом* $\lambda>0$ *в шаре* $B_{r_0}=\{|x|<r_0(\lambda)\}$, *где*

$$r_0(\lambda)=a_0^{-1}\lambda^{-m} \quad a_0=\left(\frac{\sigma+1}{\sigma+2}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}N^{-\frac{1}{\sigma+2}}, \quad m=\frac{\beta-(\sigma+1)}{\sigma+2}, \quad (2.13)$$

существует строго положительное монотонно убывающее классическое решение задачи (2.11), (2.12), *причем*

$$U_\lambda(|x|)\geqslant \underline{U}_\lambda(x)\equiv\lambda[1-(a_0\lambda^m|x|)^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}]_+, \quad |x|\geqslant 0. \quad (2.14)$$

Доказательство. Локальная разрешимость задачи в классе функций $U_\lambda\in C^2$ вытекает из анализа эквивалентного (2.11), (2.12) интегрального уравнения. Монотонность следует из принципа максимума. Оценка (2.14) получается после двукратного интегрирования очевидного неравенства:

$$r^{1-N}(r^{N-1}(1+|U_\lambda'|^2)^{\sigma/2}U_\lambda')'=-U_\lambda^\beta\geqslant-\lambda^\beta.$$

Первое интегрирование по $(0, r)$ дает оценку $r^{N-1}(1+|U_\lambda'|^2)^{\sigma/2}U_\lambda'\geqslant-\lambda^\beta r^N/N$ и, следовательно, так как $U_\lambda'\leqslant 0$ при $r>0$, $|U_\lambda'|^\sigma U_\lambda'\geqslant-\lambda^\alpha r/N$, откуда прямо следует (2.14).

Введем теперь в соответствии с (1.3) огибающую семейства $\{U_\lambda\}$ — функцию $L(x)$. Как следует из (2.14), свойства функции L существенно

зависят от знака параметра $m=[\beta-(\sigma+1)]/(\sigma+2)$. Нам, как и ранее, понадобится элементарная оценка L снизу.

Лемма 2.2. *Справедлива оценка*

$$L(x)\geqslant \underline{L}(x)=\sup_{\lambda>0}\underline{U}_\lambda(x),\ x\in R^N, \tag{2.15}$$

и, в частности,

$$L(x)=+\infty=\underline{L}(x)\ \text{в}\ R^N\ \text{при}\ 1<\beta<\sigma+1; \tag{2.16}$$

$$L(x)=+\infty=\underline{L}(x)\ \text{в}\ \{|x|<a_0^{-1}\}\ \text{при}\ \beta=\sigma+1; \tag{2.17}$$

$$L(x)\geqslant \underline{L}(x)=A_0|x|^{-1/m}\ \text{в}\ R^N\setminus\{0\}\ \text{при}\ \beta>\sigma+1. \tag{2.18}$$

При этом в случае $\beta>\sigma+1$ *при любом* $\lambda>0$

$$\gamma_\lambda\equiv\{x\in R^N\,|\,\underline{L}(x)=\underline{U}_\lambda(x)\}=\{|x|=a_1\lambda^{-m}\},$$

$$a_1=[\beta(\sigma+2)^{-1}N^{-1/(\sigma+1)}]^{-(\sigma+1)/(\sigma+2)}. \tag{2.19}$$

Доказательство (2.15) очевидно (см. (2.14)). Оценки (2.16)—(2.18) также прямо следуют из (2.14). В частности, при $\beta>\sigma+1$ получаем, что $\sup\limits_{\lambda>0}\underline{U}_\lambda(x)$ достигается в точке $\lambda=\lambda_*$, где $(d/d\lambda)\underline{U}_\lambda(x)=0$, что дает условие

$$1-a_0^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\lambda_*^{\frac{\beta-(\sigma+1)}{\sigma+1}}\frac{\beta}{\sigma+1}|x|^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}=0.$$

Отсюда $\lambda_*=(a_1^{-1}|x|)^{-1/m}$ (что эквивалентно (2.19)), и, следовательно, $\underline{L}\ x)=\underline{U}_{\lambda_*}(x)$, что совпадает с (2.18).

4. Доказательство теоремы 2.1. Все три утверждения доказываются одним и тем же способом с помощью сравнения $\{u(t,x),\ t\in(0,T_0)\}$ с семейством $\{U_\lambda,\ \lambda>0\}$ (некоторые отличия возникают при доказательстве (LS)). Докажем, например, утверждение (HS). Фиксируем любое $R>0$, выберем произвольное достаточно большое $\lambda>0$ так, чтобы $U_\lambda>\sup u_0$ на S_R, и сопоставим в $(0,T_0)\times B_R$ два решения уравнения (2.1) — неограниченное решение $u(t,x)$ и стационарное $U_\lambda(|x|)$. Поскольку $u_0\leqslant U_\lambda$ в $\overline{B}_R$, то в силу условия А найдется такая точка (t_λ,x_λ) на боковой границе области $(0,T_0)\times B_R(t_\lambda\in(0,T_0),\ x_\lambda\in S_R)$, что $u(t_\lambda,x_\lambda)>U_\lambda(|x|)$ и, следовательно, из (2.14) имеем

$$u(t_\lambda,x_\lambda)>\lambda[1-(a_0\lambda^mR)^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}]_+. \tag{2.20}$$

В противном случае, если $u\leqslant U_\lambda$ на $[0,T_0)\times S_R$ и $u_0\leqslant U_\lambda$ в $\overline{B}_R$, то по обычной теореме сравнения [10, гл. II] $u\leqslant U_\lambda$ в $[0,T_0)\times B_R$, т. е. $u(t,0)\leqslant U_\lambda(0)=\lambda$ при всех $t\in(0,T_0)$, что противоречит (2.7). Выполняя теперь предельный переход $\lambda\to+\infty$ в (2.20) и учитывая, что $t_\lambda\to T_0^-$ в силу условия A_1, и тот факт, что при $\beta<\sigma+1$ $(m<0)$ $U_\lambda\to+\infty$, $\lambda\to+\infty$ на любой сфере S_R (напомним, что $x_\lambda\in S_R$), получаем (2.9). Так же доказывается (S), но с тем отличием, что при $\beta=\sigma+1$ в силу (2.14) $U_\lambda(|x|)\to+\infty$, $\lambda\to+\infty$ на S_R по крайней мере при $R\in(0,R_0)$.

При доказательстве (LS) величина ε_0 выбирается из условия $\underline{L}\geqslant\sup u_0$ на S_{ε_0}. Фиксируем $R\in(0,\varepsilon_0)$ и определим $\lambda>0$ так, чтобы (см. (2.19)) $\gamma_\lambda=S_R$, т. е. $\lambda=(R/a_1)^{-1/m}$. Тогда сопоставление $u(t,x)$ с $U_\lambda(|x|)$ в $(0,T_0)\times B_R$ приводит, как и ранее, к выводу о существовании точки $(t_R,\ x_R)\in(0,T_0)\times S_R$, в которой $u(t_R,\ x_R)>U_\lambda(|x_R|)\geqslant\underline{U}_\lambda(x_R)=\underline{L}(x_R)$, и в результате получаем (2.10).

5. Комментарии. 1) Теорема 2.1 доказана применительно к произвольным (в рамках условия А) неограниченным решениям. При дополнительных ограничениях ее выводы могут быть усилены. Например, если $u(t, x)$ — критическое решение, т. е. $u_t \geqslant 0$ в $(0, T_0) \times R^N$, что обеспечивается условиями $u_0 \in C^2$, $\mathbf{A}_1(u_0) \geqslant 0$ в R^N (см. [6, гл. V]), то верхний предел в (2.9) можно заменить на обычный, а (2.10) тогда примет вид:

$$\sup_{|x|=R} u(T_0^-, x) > A_0 R^{-\frac{\sigma+2}{\beta-(\sigma+1)}} \tag{2.21}$$

для всех $R \in (0, \varepsilon_0)$. Если к тому же предположить, что $u_0 = u_0(|x|)$ и, следовательно, $u = u(t, |x|)$, то при $\beta < \sigma+1$ условие (2.9) будет выполнено всюду в R^N, при $\beta = \sigma+1$ — в B_{R_0}, а в случае $\beta > \sigma+1$ оценка (2.21) запишется в виде

$$u(T_0^-, |x|) > A_0 |x|^{-\frac{\sigma+2}{\beta-(\sigma+1)}}, \quad x \in B_{\varepsilon_0} \setminus \{0\}. \tag{2.22}$$

2) Надо сказать, что и этим не исчерпываются все возможности метода стационарных состояний. В частности, для вывода оценки типа (2.22) при определенных ограничениях на параметры σ, β, N нет необходимости в критичности решения. Например, для уравнения с другим типом нелинейности:

$$u_t = \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) + u^\beta, \quad u = u(t, x) \geqslant 0 \quad (\sigma > 0, \ \beta > 1), \tag{2.23}$$

оценка снизу при $\sigma+1 < \beta < \beta_* = (\sigma+1)(N+2)/(N-2)_+$

$$\underline{u}(T_0^-, x) > C_* |x|^{-\frac{2}{\beta-(\sigma+1)}}, \quad x \in B_{\varepsilon_0} \setminus \{0\}; \ C_* = \text{const} > 0 \tag{2.24}$$

получена в [6, с. 252] при достаточно произвольных $u_0 = u_0(|x|) \geqslant 0$ в R^N без предположения о монотонности $u(t, x)$ по t в $(0, T_0) \times R^N$. Доказательство в этом случае проводится с использованием специальной теории «сравнение решений по пересечениям». В случае $\beta \geqslant \beta_*$ для вывода (2.24) требуется критичность решения.

Близкие по смыслу результаты справедливы и для уравнений (2.1) или (2.1′). Необходимая информация о свойствах стационарных решений $U_\lambda = U_\lambda(|x|)$ уравнения $\mathbf{A}_0(U_\lambda) = 0$ содержится в [15]; «критическим» значением параметра β здесь является $\beta = \beta_* = [N(\sigma+1)+\sigma+2]/[N-(\sigma+2)]_+$. Тем самым, оценку снизу (2.22) можно получить при $\sigma+1 < \beta < \beta_*$ для достаточно произвольных $u_0(|x|) \in C^1$, а при $\beta \geqslant \beta_*$ существенным является требование критичности решения.

3) Как уже упоминалось ранее, теорема 2.1 справедлива для обобщенных неограниченных решений задачи (2.1′), (2.2′). Дело в том, что основа вывода оценки снизу — неравенство (2.14) — справедлива и в этом случае. Функция $\underline{U}_\lambda$ в (2.14) является обобщенным верхним стационарным решением уравнения (2.1′) в B_{r_0}. Поэтому в процессе доказательства можно проводить непосредственное сравнение $\{u(t, x), \ t \in (0, T_0)\}$ с семейством $\{\underline{U}_\lambda, \lambda > 0\}$, минуя стадию сопоставления с семейством стационарных состояний $\{U_\lambda\}$.

4) Утверждение (LS), $\beta > \sigma+1$ справедливо для неограниченных решений краевой задачи для уравнения (2.1) (или (2.1′)) в $(0, T_0) \times \Omega$, Ω — ограниченная область в R^N с гладкой границей $\partial\Omega$, с условием Дирихле $u = 0$ при $t \in (0, T_0)$ на $\partial\Omega$; $u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0$ в $\bar{\Omega}$. Естественно,

предполагается, что $x=0\in\Omega$ (точка сингулярности лежит в Ω). При $1<\beta<\sigma+1$ сравнение $u(t, x)$ с $\{U_\lambda\}$ приводит к выводу о глобальной ограниченности решения при любых ограниченных u_0. Действительно, как показывает (2.14), при $1<\beta<\sigma+1$ всегда можно указать такое достаточно большое $\lambda>0$, что $u_0\leqslant \underline{U}_\lambda$ в $\overline{\Omega}$, а поскольку тогда $u=0\leqslant \underline{U}_\lambda$ на $\partial\Omega$ и $\underline{U}_\lambda\leqslant U_\lambda$ в R^N, то $u\leqslant U_\lambda$ в $R_+^1\times\overline{\Omega}$ в силу теоремы сравнения (этот результат не является новым, см. [12]). При $\beta=\sigma+1$ аналогично получаем глобальную разрешимость краевой задачи, если $\overline{\Omega}\subset B_{R_0}$.

5) Применительно к задаче (2.1′), (2.2′) оценка (2.10) по характеру зависимости от $R=|x|$ является оптимальной. В [15] построены примеры неограниченных обобщенных автомодельных решений u_A уравнения (2.1′) следующего вида:

$$u_A(t, x)=(T_0-t)^{-\frac{1}{\beta-1}}\theta(\xi),\ \xi=|x|/(T_0-t)^{m/(\beta-1)}, \tag{2.25}$$

где функция $\theta\geqslant 0$ удовлетворяет нелинейному эллиптическому уравнению. Существование по крайней мере одного нетривиального решения (2.25) установлено при $\sigma+1<\beta<[N(\sigma+1)+\sigma+2]/[N-(\sigma+2)]_+$ (при $N=1$ доказано существование двух различных счетных семейств решений). Решение (2.25) формирует при $t\to T_0^-$ предельное распределение

$$u_A(T_0^-, x)=C_A|x|^{-\frac{\sigma+2}{\beta-(\sigma+1)}},\ x\in R^N\setminus\{0\};\ C_A=\mathrm{const}>0,$$

которое по характеру зависимости от $|x|$ вблизи $x=0$ совпадает с (2.10) (см. (2.22)).

6) Для доказательства локализации неограниченных решений задачи (2.1′), (2.2′) при $\beta>\sigma+1$ может быть применена техника сравнения по пересечениям с локализованным автомодельным решением (2.25) (для уравнения (2.23) она развита в [6, с. 251]). Не менее перспективным является метод, предложенный в [16] для исследования полулинейных уравнений $u_t=\Delta u+Q(u)$. Он допускает обобщение на квазилинейные уравнения типа (2.23) [17] и приводит в ряде случаев к оценкам $\bar{u}(T_0^-, x)$ сверху, близким к оптимальным. Для уравнения (2.1′) при $N=1$ необходимая оценка сверху $u=u(t, |x|)$ выводится из условия знакоопределенности функции $w\equiv|u_x|^\sigma u_x+\lambda_0 x u^\beta$ в $(0, T_0)\times R_+^1$, где $\lambda_0\in(0, \sigma/2(\sigma+1)]$ — постоянная. Доказательство проводится сначала путем аналогичного исследования семейства решений u_ε, $\varepsilon>0$, регуляризованного уравнения, в котором коэффициент теплопроводности $|u_x|^\sigma$ заменен на бесконечно гладкую строго положительную функцию $\varphi_\varepsilon(u_x)=(\varepsilon^2+|u_x|^2)^{\sigma/2}$ (соответственно, $w\to w_\varepsilon=\varphi_\varepsilon(u_x)u_x+\lambda_0 x u^\beta$). Конечная оценка

$$\bar{u}(T_0^-, x)\leqslant\left[\frac{\beta-(\sigma+1)}{\sigma+2}\lambda_0^{\frac{1}{\sigma+1}}\right]^{-\frac{\sigma+1}{\beta-(\sigma+1)}}|x|^{-\frac{\sigma+2}{\beta-(\sigma+1)}}<+\infty$$

в $R^1\setminus\{0\}$ получается после предельного перехода $\varepsilon\to 0^+$.

7) В теореме 2.1 специально оговорено, что $\sigma>0$. Дело в том, что хотя при $\sigma=0$ оценка (2.10) в утверждении (LS) остается содержательной:

$$\sup_{|x|=R} u(t_R, x)>A_0 R^{-\frac{2}{\beta-1}},\ A_0=(\beta-1)(\beta^{-\beta}N)^{\frac{1}{\beta-1}}, \tag{2.26}$$

она, по-видимому, перестает быть оптимальной по характеру зависимости от R при $R\to 0$. Для уравнения $u_t=\Delta u+u^\beta$, которое совпадает с (2.1) при $\sigma=0$, в [18], [19] получены условия на $u_0=u_0(|x|)$ в краевой задаче в ограниченной области, при которых

$$\bar{u}(T_0^-, |x|)\leqslant\left[\frac{(\beta-1)^2}{8\beta}\right]^{-\frac{1}{\beta-1}}|x|^{-\frac{2}{\beta-1}}|\ln|x||^{\frac{1}{\beta-1}},\ |x|\to 0. \qquad (2.27)$$

Эта оценка отличается от (2.26) наличием дополнительного логарифмического множителя. Оптимальность (2.27) подтверждается качественным асимптотическим анализом (см. [18]), в ее пользу также свидетельствует результат [5, п. 7].

8) При доказательстве теоремы 2.1, фактически, не использовалось условие $T_0<+\infty$, т. е. все результаты справедливы и при $T_0=+\infty$. По всей видимости, при $\beta\leqslant\sigma+1$ таких глобальных, но неограниченных при $t\to+\infty$ решений не существует. При достаточно больших $\beta>\sigma+1$ такие решения, вероятно, могут существовать. Во всяком случае, они обнаружены для уравнения (2.1) при $\sigma=0$, $\beta\geqslant(N+2)/(N-2)_+$ и для (2.23) при $\beta\geqslant(\sigma+1)(N+2)/(N-2)_+$ [20], [21], где рассматривалась краевая задача в $R_+^1\times\Omega$, $u=0$ на $\partial\Omega$, Ω — шар в R^N. В [21] указаны, например, следующие свойства этих необычных решений уравнения (2.1), $\sigma=0: u(t, x)\to 0$ при $t\to+\infty$ в $\Omega\setminus\{0\}$ и $\|u(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega)}\to 0$, $t\to+\infty$. Исходя из аналогии с результатами [20], [21], следует ожидать появления таких решений соответствующей краевой задачи для уравнения (2.1′) в «суперкритическом» случае $\beta\geqslant\beta_*=[N(\sigma+1)+\sigma+2]/[N-(\sigma+2)]_+$.

§ 3. Краевая задача для уравнения нелинейной теплопроводности

Рассмотрим задачу для квазилинейного параболического уравнения с нелинейным краевым условием второго рода:

$$u_t=\mathbf{B}_1(u)\equiv\nabla\cdot((1+u^\sigma)\nabla u)\equiv\sum_{i=1}^{3}((1+u^\sigma)u_{x_i})_{x_i},$$

$$t>0,\ x=(x_1, x_2, x_3)\in\Omega=\{x_1\in R^1,\ x_2\in R^1,\ x_3>0\}; \qquad (3.1)$$

$$-(1+u^\sigma)u_{x_3}=u^\alpha,\ t\geqslant 0,\ x\in\partial\Omega=\{x_1\in R^1,\ x_2\in R^1,\ x_3=0\}; \qquad (3.2)$$

$$u(0, x)=u_0(x)>0,\ x\in\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega;\ u_0\in C^1(\bar{\Omega}),\ \sup u_0<+\infty. \qquad (3.3)$$

Здесь $\sigma\geqslant 0$, $\alpha>1+\sigma/2$ — постоянные; считается выполненным условие согласования краевых и начальных данных: $-(1+u_0^\sigma)(u_0)_{x_3}=u_0^\alpha$ на $\partial\Omega$. Поскольку в области $\{u\geqslant 0\}$ уравнение (3.1) является равномерно параболичным, а при $u>0$ коэффициент теплопроводности имеет высокую гладкость, задача (3.1)—(3.3) имеет локальное классическое строго положительное решение (см. об этом в [9, гл. V], [10]).

Задача (3.1)—(3.3) является обобщением модельной задачи лазерной термохимии, см., например, [22], [23]. В этой трактовке нелинейное краевое условие (3.2) описывает процесс экзотермической реакции горения на поверхности $\partial\Omega$ металлического образца, занимающего полупространство $R^3\setminus\Omega$. Нелинейный источник в (3.2) может приводить к возникновению неограниченного решения. Для случая $\sigma=0$, когда (3.1) переходит в уравнение теплопроводности, это установлено, например, в [24], [23]. Ограничение $\alpha>1+\sigma/2$ связано с необходимым условием возникновения неограниченного решения, оно возникает при построе-

нии соответствующих автомодельных решений (см. об этом ниже). В дальнейшем мы будем считать выполненным следующее условие.

Условие В. B_1) $u=u(t, x)>0$ — неограниченное решение в $(0, T_0)\times\Omega$, т. е. является классическим и равномерно ограничено в $(0, T]\times\bar{\Omega}$ для всех $T\in(0, T_0)$ и

$$\overline{\lim_{t\to T_0^-}}\sup_{x\in\Omega} u(t, x)=+\infty; \tag{3.4}$$

B_2) $x=0$ — точка сингулярности решения в смысле (1.1).

Введем обозначения: $\|x\|^2=x_1^2+x_2^2+x_3$, $D_R=\{\|x\|<R\}\cap\Omega$, $\Gamma_R=\{\|x\|=R\}\cap\bar{\Omega}$; $R=\text{const}>0$.

1. Основные результаты.

Теорема 3.1. *Пусть* $\sigma\geqslant 0$, $\alpha>1+\sigma/2$ *и решение задачи* (2.1)—(2.3) *удовлетворяет условию* В. *Тогда*

(HS) *если* $\alpha<\sigma+1$, *то для любого* $R>0$

$$\overline{\lim_{t\to T_0^-}}\sup_{\|x\|=R} u(t, x)=+\infty; \tag{3.5}$$

(S) *если* $\alpha=\sigma+1$, *то* (3.5) *выполнено для любого* $0<R<R_0=(\sigma+1)^{-1/2}$;

(LS) *если* $\alpha>\sigma+1$, *то для любого достаточно малого* $R\in(0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0=\text{const}>0$, *найдется такое* $t_R\in(0, T_0)$, *что*

$$\sup_{\|x\|=R} u(t_R, x)>B_0R^{-\frac{2}{\alpha-(\sigma+1)}},\quad B_0=\{[\alpha-(\sigma+1)]\,\alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha-(\sigma+1)}}\}^{\frac{1}{\sigma+1}}. \tag{3.6}$$

Классификация различных режимов в зависимости от параметров α, σ здесь такая же, как в теореме 2.1. Утверждение (HS) означает, что при $\alpha<\sigma+1$ неограниченные решения не являются локализованными; из (S) получаем оценку размеров области локализации при $\alpha=\sigma+1$; оценка (3.6) характеризует пространственную сингулярность, формируемую решением при $t\to T_0^-$ в случае $\alpha>\sigma+1$.

Прежде чем переходить к доказательству, отметим, что теорема справедлива в случае аналогичной задачи для вырождающегося уравнения

$$u_t=\mathbf{B}_0(u)\equiv\nabla\cdot(u^\sigma\nabla u),\ t>0,\ x\in\Omega\,(\sigma>0); \tag{3.1'}$$

$$-u^\sigma u_{x_3}=u^\alpha,\ t>0,\ x\in\partial\Omega;\ \alpha>1+\sigma/2; \tag{3.2'}$$

$$u(0, x)=u_0(x)\geqslant 0,\ x\in\Omega;\ u_0^{\sigma+1}\in C^1(\bar{\Omega}),\ \sup u_0<+\infty. \tag{3.3'}$$

При финитной u_0 решение является обобщенным, но всюду, где $u>0$, оно удовлетворяет уравнению и краевому условию в обычном смысле, см. об этом в [11]. Указанная выше классификация совпадает с формальным анализом пространственно-временной структуры неограниченных автомодельных решений задачи (3.1′), (3.2′):

$$u_A(t, x)=(T_0-t)^{-\frac{1}{2\alpha-(\sigma+2)}}\theta(\xi),\quad \xi=x/(T_0-t)^{\frac{\alpha-(\sigma+1)}{2\alpha-(\sigma+2)}}. \tag{3.7}$$

Это решение является неограниченным, если $2\alpha-(\sigma+2)>0$, т. е. $\alpha>1+\sigma/2$. Тогда, как следует из (3.7), наличие или отсутствие локализации зависит от знака разности $\alpha-(\sigma+1)$. В частности, при $\beta=\sigma+1$ локализацию решения наглядно иллюстрирует одномерное автомодельное ре-

шение (3.7) в разделяющихся переменных:

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{\sigma}} \left\{ \frac{2}{\sigma(\sigma+2)} \left(1 - \frac{\sigma x_3}{2}\right)_+^2 \right\}^{\frac{1}{\sigma}} \tag{3.7'}$$

(это обобщенное решение, $|\nabla u_A^{\sigma+1}| \in C$), которое неограниченно возрастает при $t \to T_0^-$ только в полосе $\{0 \leqslant x_3 < 2/\sigma\}$ и $u_A \equiv 0$ вне ее.

2. Свойства семейства верхних стационарных состояний. Доказательство теоремы 3.1 целиком основано на использовании следующего семейства функций

$$\underline{U}_\lambda(x) = \lambda[1 - (\sigma+1)\lambda^{\alpha-(\sigma+1)}\|x\|^2]_+^{1/(\sigma+1)}, \tag{3.8}$$

где $\lambda > 0$ — параметр. Без труда проверяется, что $\underline{U}_\lambda$ при любом $\lambda > 0$ является классическим верхним решением задачи (3.1), (3.2) в области D_{r_0}, $r_0(\lambda) = (\sigma+1)^{-1/2}\lambda^{-[\alpha-(\sigma+1)]/2}$, т. е.

$$\mathbf{B}_1(\underline{U}_\lambda) \leqslant 0 \text{ в } D_{r_0}, \quad -(1 + \underline{U}_\lambda^\sigma)(\underline{U}_\lambda)_{x_3} \geqslant \underline{U}_\lambda^\alpha \text{ на } \Gamma_{r_0}.$$

Тот факт, что функции из семейства $\{\underline{U}_\lambda, \lambda > 0\}$ являются классическими верхними решениями в D_{r_0}, позволяет нам сразу перейти к исследованию его свойств, минуя стадию построения семейства соответствующих стационарных состояний $\{\underline{U}_\lambda, \lambda > 0\}$ (см. комментарии).

Определим в $\bar{\Omega}$ огибающую $\underline{L}(x)$ к семейству $\{\underline{U}_\lambda\}$ в соответствии с (1.3).

Лемма 3.1. *Справедливы оценки:*

$$\underline{L}(x) = +\infty \text{ в } \bar{\Omega} \text{ при } \alpha \in (1 + \sigma/2, \sigma + 1); \tag{3.9}$$

$$\underline{L}(x) = +\infty \text{ в } D_{R_0}, \ R_0 = (\sigma+1)^{-1/2} \text{ при } \alpha = \sigma + 1; \tag{3.10}$$

$$\underline{L}(x) = B_0\|x\|^{-2/[\alpha-(\sigma+1)]} < +\infty \text{ в } \bar{\Omega} \setminus \{0\} \text{ при } \alpha > \sigma + 1. \tag{3.11}$$

При этом в случае $\alpha > \sigma+1$ при любом $\lambda > 0$

$$\gamma_\lambda \equiv \{x \in \bar{\Omega} \mid \underline{L}(x) = \underline{U}_\lambda(x)\} = \{\|x\| = \alpha^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{\alpha-(\sigma+1)}{2}}\} \cap \bar{\Omega}. \tag{3.12}$$

Точное выражение огибающей $\underline{L}$ при $\alpha > \sigma+1$ стоит в правой части (3.6).

Доказательство. Справедливость (3.9), (3.10) прямо следует из (3.8). При $\alpha > \sigma + 1$ $\sup\limits_{\lambda>0} \underline{U}_\lambda$ достигается в точке $\lambda = \lambda_*$, где $(d/d\lambda)\underline{U}_\lambda = 0$, что приводит к (3.11), (3.12).

3. Доказательство теоремы 3.1. Оно полностью повторяет доказательство предыдущей. Докажем, например, утверждение (S). Пусть $R \in (0, R_0)$. Выберем произвольное достаточно большое $\lambda > 0$ так, чтобы $\underline{U}_\lambda > \sup u_0$ на Γ_R, и сравним в $(0, T_0) \times D_R$ решение задачи $u(t, x)$ и верхнее решение $\underline{U}_\lambda$. В силу условия B существует точка $(t_\lambda, x_\lambda) \in (0, T_0) \times \Gamma_R$, в которой $u(t_\lambda, x_\lambda) > \underline{U}_\lambda(x_\lambda) \equiv \lambda[1 - (\sigma+1)R^2]^{1/(\sigma+1)}$. Отсюда предельным переходом $\lambda \to +\infty$ получаем нужный результат, так как $\|x_\lambda\| = R$ и $t_\lambda \to T_0^-$ при $\lambda \to +\infty$ в силу условия B_1. При доказательстве (LS) такое же сравнение проводится в $(0, T_0) \times D_R$ при достаточно малых $R > 0$, а затем используются условия (3.12) и конкретный вид огибающей (3.11), что приводит к оценке (3.6).

4. Комментарии. 1) Если предположить, что решение задачи (3.1)–(3.3) является критическим: $u_t \geqslant 0$ в $(0, T_0)\times\bar{\Omega}$, что, например, обеспечивается условием $B_1(u_0)\geqslant 0$ в $\bar{\Omega}$, то тем же сравнением с семейством $\{\underline{U}_\lambda\}$ выводятся следующие оценки предельного распределения: $\sup\limits_{\|x\|=R} u(T_0^-, x) = +\infty$ для любого $R>0$ при $\alpha\in(1+\sigma/2,\ \sigma+1)$; $\sup\limits_{\|x\|=R} u(T_0^-, x)=+\infty$ для всех $R\in(0,\ (\sigma+1)^{-1/2})$ при $\alpha=\sigma+1$; а при $\alpha>\sigma+1$ получаем оценку

$$\sup_{\|x\|=R} u(T_0^-,\ x) > B_0 R^{-\frac{2}{\alpha-(\sigma+1)}},\ R\in(0, \varepsilon_0).$$

2) Функции из семейства (3.8) всюду, где они положительны, удовлетворяют неравенствам $\mathbf{B}_0(\underline{U}_\lambda)\leqslant 0$ в Ω, $-\underline{U}_\lambda^\sigma(\underline{U}_\lambda)_{x_3}\geqslant \underline{U}_\lambda^\alpha$ на $\partial\Omega$. Следовательно, они являются классическими верхними решениями в D_{r_0}, $r_0=r_0(\lambda)$, и теорема 3.1 справедлива для задачи (3.1′)–(3.3′).

3) Степень точности оценки снизу в утверждении (LS) зависит от структуры огибающей $\underline{L}(x)$ в окрестности точки сингулярности и, в конечном итоге, от выбранного семейства верхних стационарных состояний. Семейство $\{\underline{U}_\lambda\}$, разумеется, может быть выбрано неединственным образом. Например, в случае задачи (3.1′)–(3.3′) при $\alpha\geqslant 3(\sigma+1)$ вместо (3.8) удобно рассмотреть другое семейство строго положительных классических верхних стационаров:

$$\underline{U}_\lambda^*(x) = \left[\frac{2}{\alpha-(\sigma+1)}\right]^{\frac{2}{\alpha-(\sigma+1)}} \lambda^{-1}\left\{x_1^2+x_2^2+\right.$$
$$\left.+\left(x_3+\frac{2}{\alpha-(\sigma+1)}\lambda^{-[\alpha-(\sigma+1)]}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{\alpha-(\sigma+1)}},\ \lambda>0. \tag{3.13}$$

Отметим, что при $\alpha=3(\sigma+1)$ всякая функция $\underline{U}_\lambda^*$ является точным стационарным решением задачи (3.1′), (3.2′): $\mathbf{B}_0(\underline{U}_\lambda^*)=0$ в Ω и $-(\underline{U}_\lambda^*)^\sigma(\underline{U}_\lambda^*)_{x_3} = (\underline{U}_\lambda^*)^{3(\sigma+1)}$ на $\partial\Omega$ (в этом случае $\underline{U}_\lambda^*\equiv U_\lambda$). Семейству (3.13) отвечает следующая огибающая:

$$\underline{L}^*(x)\equiv\sup_{\lambda>0}\underline{U}_\lambda^*(x) = B_0^*\{|x|+x_3\}^{-\frac{1}{\alpha-(\sigma+1)}} < +\infty,$$
$$x\in\bar{\Omega}\setminus\{0\};\ B_0^* = \{\alpha-(\sigma+1)]^{-\frac{1}{\alpha-(\sigma+1)}},$$

где $|x|^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$. При этом по сравнению с (3.12) меняется кривая касания огибающей $\underline{L}^*$ с функциями из семейства $\{\underline{U}_\lambda^*\}$. Здесь

$$\gamma_\lambda^*\equiv\{x\in\bar{\Omega}\,|\,\underline{L}^*(x)=\underline{U}_\lambda^*(x)\} =$$
$$=\{|x|=\{2/[\alpha-(\sigma+1)]\}^2\lambda^{-1[\alpha-(\sigma+1)]}\}\cap\bar{\Omega}.$$

Поэтому, если при $\alpha\geqslant 3(\sigma+1)$ проводить сравнение $u(t, x)$ с семейством $\{\underline{U}_\lambda^*\}$, то вместо (3.6) в утверждении (LS) для решения задачи (3.1′)–(3.3′) получим следующую оценку:

$$\sup_{|x|=R} u(t_R, x) > \inf_{|x|=R}\underline{L}^*(x) = B_0^*(2R)^{-\frac{1}{\alpha-(\sigma+1)}}. \tag{3.6′}$$

Подчеркнем, что здесь в отличие от (3.6) sup в левой части берется по половине сферы $\{|x|=R\}$ в R^3, а не по $\{\|x\|=R\}\cap\Omega$. Хотя оценки (3.6)

и (3.6′) отличаются друг от друга, по характеру поведения правых частей в окрестности точки сингулярности $x=0$ они довольно близки.

4) Если в качестве верхних стационарных состояний в задаче (3.1′)–(3.3′) взять однопараметрическое семейство одномерных функций:

$$U_\lambda^{**}(x)=\lambda[1-(\sigma+1)\lambda^{\alpha-(\sigma+1)}x_3]_+^{1/(\sigma+1)},\ \lambda>0, \tag{3.14}$$

то при $\alpha>\sigma+1$ получим следующую огибающую ($B_0>0$ указана в (3.6)):

$$L^{**}(x)\equiv\sup_{\lambda>0}U_\lambda^{**}(x)=B_0x_3^{-\frac{1}{\alpha-(\sigma+1)}}<+\infty,\ x_3>0,$$

причем здесь

$$\gamma_\lambda^{**}\equiv\{x\in\bar\Omega\,|\,U_\lambda^{**}=L^{**}\}=\{x_3=\alpha^{-1}\lambda^{-[\alpha-(\sigma+1)]}\}.$$

Поэтому при том же способе доказательства утверждения (LS) с использованием семейства (3.14) вместо (3.6) получается оценка

$$\sup_{x_3=R}u(t_R,x)>B_0R^{-\frac{1}{\alpha-(\sigma+1)}},\ R\in(0,\varepsilon_0). \tag{3.15}$$

По характеру зависимости от x_3 на прямой $x_1=x_2=0$ вблизи $x=0$ правая часть (3.15) совпадает с (3.6) и (3.6′). Если дополнительно предположить, что $u_0=u_0(x_3)$ (следовательно, $u=u(t,x_3)$) и решение является критическим: $u_t\geqslant0$ в $(0,T_0)\times\Omega$, то тем же способом устанавливается, что

$$u(T_0^-,x_3)\equiv\lim_{t\to T_0^-}u(t,x_3)>B_0x_3^{-\frac{1}{\alpha-(\sigma+1)}},\ x_3\in(0,\varepsilon_0). \tag{3.15′}$$

5) Мы имеем возможность проверить точность оценок (3.15) и (3.15′), сопоставляя их с легко выводимыми для этой задачи оценками сверху. В кратком изложении, которое не претендует на исчерпывающую полноту, их вывод осуществляется следующим образом.

Рассмотрим задачу (3.1′)–(3.3′) при $\sigma\geqslant0$, $\alpha>\sigma+1$. В случае $\sigma>0$, когда уравнение (3.1′) является вырождающимся, мы будем для простоты предполагать, что $u_0>0$ в $\bar\Omega$; тогда решение $u>0$ в $(0,T_0)\times\bar\Omega$ и является классическим. Будем также считать, что $u^{\sigma+1}\in C_{tx}^{1,3}((0,T_0)\times\times\Omega)\cap C^1([0,T_0)\times\bar\Omega)$. Оценка неограниченного решения сверху выводится из условия: $w\equiv u^\sigma u_{x_3}+u^\alpha\leqslant0$ в $(0,T_0)\times\Omega$. Без труда проверяется, что $w(t,x)$ удовлетворяет «линейному» параболическому уравнению:

$$w_t=u^\sigma\Delta w+bw+q,\quad (t,x)\in(0,T_0)\times\Omega; \tag{3.16}$$

$$b=[\sigma/(\sigma+1)]u^{-1}\Delta u^{\sigma+1}, \tag{3.17}$$

$$q=-\sigma u^{\alpha+\sigma-1}\cdot\Delta u-[\alpha(\alpha-1)-\sigma(\alpha-\sigma)]u^{\alpha+\sigma-2}|\Delta u|^2, \tag{3.18}$$

причем в силу (3.2′)

$$w=0,\quad t\in(0,T_0),\quad x\in\partial\Omega. \tag{3.19}$$

Случай $\sigma=0$. Здесь, очевидно, $b\equiv0$ и $q=-\alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}\leqslant0$. Поэтому w удовлетворяет параболическому дифференциальному неравенству $w_t\leqslant\Delta w$ в $(0,T_0)\times\Omega$ и краевому условию (3.19) на боковой границе $(0,T_0)\times\Omega$. Следовательно, если $w(0,x)\equiv(u_0)_{x_3}+u_0^\alpha\leqslant0$ в Ω и функция u_0 такова, что $u\to0$, $u_{x_3}\to0$ при $|x|\to+\infty$ (тогда $w\to0$ при $|x|\to$

$\to+\infty$), то в соответствии с принципом максимума [10, гл. II] имеем $w\equiv u_{x_3}+u^\alpha\leqslant 0$ в $(0, T_0)\times\bar\Omega$. Интегрируя это неравенство, получим для всех $t\in(0, T_0)$

$$u(t, x_1, x_2, x_3)\leqslant\{(\alpha-1)x_3+u(t, x_1, x_2, 0)\}^{-1/(\alpha-1)}<$$
$$<\{(\alpha-1)x_3\}^{-1/(\alpha-1)},\ x_3>0. \tag{3.20}$$

Случай $\sigma>0$. Необходимо дополнительное предположение: $u_t=(\sigma+1)^{-1}\Delta u^{\sigma+1}\geqslant 0$ в $(0, T_0)\times\Omega$, т. е. u_0 такова, что $\mathbf{B}_0(u_0)\geqslant 0$ в Ω. Тогда $b\geqslant 0$ (см. (3.17)) и, поскольку для критического решения $u^\sigma\Delta u\geqslant -\sigma u^{\sigma-1}|\nabla u|^2$, из (3.18) имеем $q\leqslant-\alpha[\alpha-(\sigma+1)]u^{\alpha+\sigma-2}|\nabla u|^2\leqslant 0$ при $\alpha>\sigma+1$. Поэтому (3.16) означает, что $w_t\leqslant u^\sigma\Delta w+bw$ в $(0, T_0)\times\Omega$, $w=0$ при $t\in(0, T_0)$ на $\partial\Omega$ и, если $w(0, x)=u_0{}^\sigma(u_0)_{x_3}+u^\alpha\leqslant 0$ в Ω и $u_0(x)$ такова, что $u_0{}^{\sigma+1}\to 0$, $(u_0{}^{\sigma+1})_{x_3}\to 0$ при $|x|\to+\infty$, то в силу принципа максимума $w\equiv u^\sigma u_{x_3}+u^\alpha\leqslant 0$ в $(0, T_0)\times\bar\Omega$. Из последнего неравенства прямо следует, что при $t\in(0, T_0)$

$$u(t, x_1, x_2, x_3)<\{[\alpha-(\sigma+1)]x_3\}^{-1/[\alpha-(\sigma+1)]},\ x_3>0. \tag{3.21}$$

Сопоставление (3.21) и (3.15′) (напомним, что обе эти оценки получены в предположении критичности решения) показывает, что показатель степени при x_3 в (3.15′) является неулучшаемым.

§ 4. Задача Коши и краевая задача для параболической системы квазилинейных уравнений

В этом параграфе излагаются те возможности, которые дает применение метода стационарных состояний к параболическим системам. В качестве примера мы подробно рассмотрим следующую систему, состоящую из трех квазилинейных уравнений:

$$u_t=\nabla\cdot((1+u^2)^{1/2}\nabla u)+vw, \tag{4.1}$$
$$v_t=\nabla\cdot((1+v^2)\nabla v)+|u|^{p-1}uw, \tag{4.2}$$
$$w_t=\nabla\cdot((1+w^2)^{3/2}\nabla w)+uv, \tag{4.3}$$

которая является моделью горения теплопроводной трехкомпонентной среды. Система содержит только один параметр $p\geqslant 1$ в уравнении (4.2). Каждое уравнение системы является равномерно параболичным с бесконечно гладким коэффициентом теплопроводности по отношению к соответствующей функции, и диагональная матрица системы строго положительно определена. Поэтому при естественных ограничениях задача Коши или краевая задача с условием Дирихле для системы (4.1)–(4.3) имеет локальное классическое решение [9, гл. VIII]. Кроме того, в области $\{u\geqslant 0,\ v\geqslant 0,\ w\geqslant 0\}$ источники в правых частях уравнений удовлетворяют хорошо известным условиям монотонности и гладкости ($p\geqslant 1$ в (4.2)), при которых два различных решения задач Коши или краевых задач для (4.1)–(4.3) подчиняются теореме сравнения по начальным и краевым функциям; см. [25], [26], а также конкретные приложения, например, в [27], [28]. Учитывая, что 0, 0, 0 является решением системы, отсюда получаем неотрицательность и единственность локального решения при неотрицательных ограниченных начальных и краевых функциях.

1. Основные результаты. 1) Задача Коши. При исследовании свойств решений задачи Коши для (4.1)—(4.3):

$$u=u_0(x)\geqslant 0,\quad v=v_0(x)\geqslant 0,\quad w=w_0(x)\geqslant 0,\quad t=0,\quad x\in R^N;$$
$$u_0,\ v_0\ w_0\in C(R^N),\quad M_0=\sup(u_0+v_0+w_0)<+\infty, \tag{4.4}$$

будем считать выполненным следующее условие.

Условие С. C_1) $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, $w\geqslant 0$ — неограниченное решение задачи (4.1)—(4.4) в $(0, T_0)\times R^N$, $T_0\in R_+^1=(0, +\infty)$ — время существования, т. е. u, v, w — равномерно ограниченное классическое решение в $(0, T]\times R^N$ для любого $T\in(0, T_0)$ и

$$\overline{\lim_{t\to T_0^-}}\sup_{x\in R^N}[u(t, x)+v(t, x)+w(t, x)]=+\infty; \tag{4.5}$$

C_2) $x=0$ — точка сингулярности решения:

$$\overline{\lim_{t\to T_0^-}}[u(t, 0)+v(t, 0)+w(t, 0)]=+\infty. \tag{4.6}$$

Тот факт, что при $p\geqslant 1$ решение задачи может быть неограниченным, вытекает из сравнения u, v, w со следующим пространственно-однородным решением системы:

$$u_T(t)=\left(\frac{2}{p+1}\right)^{1/(p+1)}(T-t)^{-2/(p+1)},\quad v_T(t)=\frac{2}{p+1}(T-t)^{-1},$$
$$w_T(t)=u_T(t);\quad T=\text{const}>0, \tag{4.7}$$

которое определено при $0\leqslant t<T$, причем $u_T, v_T, w_T\to+\infty$ при $t\to T^-<+\infty$. Если в задаче Коши $u_0\geqslant u_T(0)$, $v_0\geqslant v_T(0)$, $w_0\geqslant w_T(0)$ в R^N при некотором $T>0$, то по теореме сравнения $u\geqslant u_T$, $v\geqslant v_T$, $w\geqslant w_T$ в R^N при всех допустимых $t>0$, т. е. решение является неограниченным и выполнено (4.5), причем $T_0\leqslant T$.

Теорема 4.1. *Пусть $p\geqslant 1$ и решение задачи* (4.1) — (4.4) *удовлетворяет условию* С. *Тогда*

(*HS*) *если $p<18/5$, то для любого $R>0$*

$$\overline{\lim_{t\to T_0^-}}\sup_{|x|=R}[u(t, x)+v(t, x)+w(t, x)]=+\infty; \tag{4.8}$$

(*S*) *если $p=18/5$, то* (4.8) *выполнено для любого* $0<R<R_0=3^{-1/8}2^{1/40}N^{1/2}$;

(*LS*) *если $p>18/5$, то для любого $R\in(0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0=\text{const}>0$, найдется такое $t_R\in(0, T_0)$, что выполнено хотя бы одно из следующих трех неравенств:*

$$\sup_{|x|=R}u(t_R, x)>E_1R^{-40/(5p-18)},$$
$$\sup_{|x|=R}v(t_R, x)>E_2R^{-10(p+2)/(5p-18)}, \tag{4.9}$$
$$\sup_{|x|=R}w(t_R, x)>E_3R^{-24/(5p-18)},$$

где E_1, E_2, E_3 — положительные постоянные, зависящие только от p и N.

Таким образом, в задаче Коши для системы уравнений (так же, как в более простых задачах в §§ 2, 3) возникает критическое значение параметра $p=18/5$, и свойства неограниченных решений существенно за-

висят от знака разности $p-18/5$. Это же значение параметра является «критическим» и в краевой задаче.

2) Краевая задача. Пусть $\Omega\subset R^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим для (4.1) — (4.3) краевую задачу с условиями

$$u=v=w=0,\quad t\geqslant 0,\quad x\in\partial\Omega;$$
$$u=u_0(x)\geqslant 0,\ v=v_0(x)\geqslant 0,\ w=w_0(x)\geqslant 0,\ t=0,\ x\in\partial\Omega, \tag{4.10}$$

где $u_0, v_0, w_0\in C_0(\bar\Omega)$. Краевая задача имеет единственное локальное (по t) неотрицательное классическое решение. Ниже определены условия глобального существования ограниченного решения.

Теорема 4.2. *(HS) если $p\in[1, 18/5)$, то решение задачи* (4.1)—(4.3), (4.10) *равномерно ограничено в $R_+^1\times\Omega$ при любых u_0, v_0, w_0;*

(S) если $p=18/5$, то решение равномерно ограничено при любых u_0, v_0, w_0, если существует $x_0\in R^N$ такое, что

$$\Omega\subset\{|x-x_0|<R_0=3^{-1/8}2^{1/40}N^{1/2}\}; \tag{4.11}$$

(LS) если $p>18/5$, то задача имеет равномерно ограниченное решение при всех достаточно малых u_0, v_0, w_0.

Из теоремы 4.2 следует, что краевая задача может иметь неограниченное решение только при $p\geqslant 18/5$ (при $p=18/5$ в том случае, если диаметр области Ω не слишком мал). Некоторые свойства неограниченного решения указаны в следующем утверждении.

Теорема 4.3. *Пусть $p\geqslant 18/5$, решение задачи* (4.1) — (4.3), (4.10) *является неограниченным в $(0, T_0)\times\Omega$, причем $x=0\in\Omega$ — точка сингулярности в смысле* (4.6). *Тогда*

(S) если $p=18/5$, то для любого $0<R<R_0$

$$\overline{\lim_{t\to T_0^-}}\sup_{\{|x|=R\}\cap\Omega}[u(t, x)+v(t, x)+w(t, x)]=+\infty; \tag{4.12}$$

(LS) если $p>18/5$, то справедливо утверждение (LS) из теоремы 4.1.

Кроме того, для любого $t\in[0, T_0)$ выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\sup_{x\in\Omega}u(t, x)\geqslant\left(\frac{2}{p+1}\right)^{1/(p+1)}(T_0-t)^{-2(p+1)},\ \sup_{x\in\Omega}v(t, x)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{2}{p+1}(T_0-t)^{-1},\ \sup_{x\in\Omega}w(t, x)\geqslant\left(\frac{2}{p+1}\right)^{1/(p+1)}(T_0-t)^{-2(p+1)}. \tag{4.13}$$

2. Семейство стационарных состояний. Для доказательства теорем достаточно рассмотреть однопараметрическое семейство стационарных состояний, симметричных относительно точки сингулярности $x=0$. Здесь мы укажем способ построения семейства несколько подробнее, чем в предыдущих параграфах, где изучались более простые задачи. Рассмотрим сначала трехпараметрическое семейство функций $(U, V, W)(|x|)$, которые являются решением задачи

$$r^{1-N}(r^{N-1}(1+U^2)^{1/2}U')'+VW=0,\ r^{1-N}(r^{N-1}(1+V^2)V')'+$$
$$+|U|^{p-1}UW=0,\ r^{1-N}(r^{N-1}(1+W^2)^{3/2}W')'+UV=0,\ r=|x|>0; \tag{4.14}$$
$$U'(0)=V'(0)=W'(0)=0,\ U(0)=\lambda,\ V(0)=\mu,\ W(0)=\nu, \tag{4.15}$$

где $\lambda>0$, $\mu>0$, $\nu>0$ — произвольные параметры. Без труда устанавли-

вается, что положительное классическое решение этой задачи существует при малых $r=|x|>0$, причем в области $\{U\geqslant 0,\ V\geqslant 0,\ W\geqslant 0\}$ каждая из функций U, V, W строго убывает (следствие принципа максимума). Поэтому

$$r^{1-N}(r^{N-1}(1+U^2)^{1/2}U')'+\mu\nu\geqslant 0,\ r^{1-N}(r^{N-1}(1+V^2)V')'+\lambda^p\nu\geqslant 0,$$
$$r^{1-N}(r^{N-1}(1+W^2)^{3/2}W')'+\lambda\mu\geqslant 0$$

и, следовательно (см. доказательство леммы 2.1 в § 2),

$$U(x)\geqslant \underline{U}(x),\ V(x)\geqslant \underline{V}(x),\ W(x)\geqslant \underline{W}(x) \tag{4.16}$$

всюду в $\{U\geqslant 0,\ V\geqslant 0,\ W\geqslant 0\}$, где

$$\underline{U}(x)=\lambda[1-\lambda^{-2}\mu\nu|x|^2/N]_+^{1/2},\ \underline{V}(x)=\mu[1-\lambda^p\mu^{-2}\nu 3|x|^2/2N]_+^{1/3},$$
$$\underline{W}(x)=\nu[1-\lambda\mu\nu^{-4}2|x|^2/N]_+^{1/4}. \tag{4.17}$$

Из (4.17) непосредственно следует, что неравенства (4.16) выполнены в $\{|x|\leqslant r_0=\min\{r_1,r_2,r_3\}\}$, где

$$r_1=(N\lambda^2/\mu\nu)^{1/2},\ r_2=(2N\mu^3/3\lambda^p\nu)^{1/2},\ r_3=(N\nu^4/2\lambda\mu)^{1/2}.$$

Для того чтобы перейти к искомому однопараметрическому семейству стационарных состояний, потребуем равенства носителей функций (4.17): $r_1=r_2=r_3$. Тогда $\mu=(3/2)^{1/4}\lambda^{(p+2)/4}$, $\nu=2^{1/5}\lambda^{3/5}$ и, следовательно,

$$\underline{U}_\lambda=\lambda[1-(a_0\lambda^m|x|)^2]_+^{1/2},\quad \underline{V}_\lambda=(3/2)^{1/4}\lambda^{(p+2)/4}\times$$
$$\times[1-(a_0\lambda^m|x|)^2]_+^{1/3},\quad \underline{W}_\lambda=2^{1/5}\lambda^{3/5}[1-(a_0\lambda^m|x|)^2]_+^{1/4};\ \lambda>0, \tag{4.18}$$

где $m=(5p-18)/40$, $a_0=1/R_0=3^{1/8}2^{-1/40}N^{-1/2}$. Обозначим через $\{U_\lambda, V_\lambda, W_\lambda\}$ семейство стационарных состояний, каждое из которых является решением задачи (4.14), (4.15) при $\lambda>0$, $\mu=(3/2)^{1/4}\lambda^{(p+2)/4}$, $\nu=2^{1/5}\lambda^{3/5}$. Тогда из (4.16) прямо следует, что при каждом $\lambda>0$

$$U_\lambda\geqslant \underline{U}_\lambda,\ V_\lambda\geqslant \underline{V}_\lambda,\ W_\lambda\geqslant \underline{W}_\lambda \text{ в } \{|x|<r_0(\lambda)=a_0^{-1}\lambda^{-m}\}. \tag{4.16'}$$

Свойства семейства (4.18) в первую очередь зависят от знака параметра $m=(5p-18)/40$, что отражают теоремы 4.1—4.3.

3. Доказательство теоремы 4.1. Докажем сначала утверждения (HS) и (S). Поскольку при $m\leqslant 0$ $\underline{U}_\lambda$, $\underline{V}_\lambda$, $\underline{W}_\lambda\to+\infty$ при $\lambda\to+\infty$ всюду в B_{R_0}, где $R_0=+\infty$ при $p<18/5$ и $R_0=1/a_0$ при $p=18/5$, для любого $R\in(0,R_0)$ при всех больших $\lambda>0$ на S_R имеет место неравенство $\underline{U}_\lambda$, $\underline{V}_\lambda$, $\underline{W}_\lambda>M_0$. Сравним в $(0,T_0)\times B_R$ неограниченное в смысле (4.5) решение u, v, w и стационарное решение U_λ, V_λ, W_λ. Поскольку в силу (4.16′) $U_\lambda>u_0$, $V_\lambda>v_0$, $W_\lambda>w_0$ в $\bar{B}_R$, существует такая точка (t_λ, x_λ) на боковой границе области $(0,T_0)\times B_R$, в которой либо $u>U_\lambda$, либо $v>V_\lambda$, либо $w>W_\lambda$. Если это не так и $u\leqslant U_\lambda$, $v\leqslant V_R$, $w\leqslant W_\lambda$ на S_R при всех $t\in(0,T_0)$, то в силу теоремы сравнения эти же неравенства выполнены всюду в $(0,T_0)\times B_R$, т. е. $u+v+w\leqslant U_\lambda(0)+V_\lambda(0)+W_\lambda(0)<+\infty$, что противоречит (4.6). Используя теперь тот факт, что $t_\lambda\to T_0^-$ при $\lambda\to+\infty$ (см. условие C), а также условие $|x_\lambda|=R$ и очевидное неравенство

$$(u+v+w)(t_\lambda,\ x_\lambda)>\min\{U_\lambda, V_\lambda, W_\lambda\}(x_\lambda)\to+\infty,\ \lambda\to+\infty,$$

приходим к (4.8) для всех $R\in(0,R_0)$.

Перейдем теперь к доказательству утверждения (LS). Из (4.18) и (4.16′) при $m>0$ следует существование такого $\lambda_*>0$, что при всех

$\lambda \geqslant \lambda_*$ справедливы неравенства U_λ, V_λ, $W_\lambda \geqslant M_0$ на $S_{r_0/2}$, где $r_0 = r_0(\lambda) = a_0^{-1}\lambda^{-m}$. Положим $\varepsilon_0 = r_0(\lambda_*)/2$, фиксируем произвольное $R \in (0, \varepsilon_0)$ и рассмотрим стационарное состояние при значении параметра $\lambda = \lambda_R$, которое выбирается из условия $r_0(\lambda_R)/2 = R$, т. е. $\lambda_R = (2a_0R)^{-1/m}$. Сравним теперь в $(0, T_0) \times B_R$ неограниченное решение u, v, w и стационарное решение U_λ, V_λ, W_λ, $\lambda = \lambda_R$. Поскольку $\lambda_R \geqslant \lambda_*$, справедливы неравенства $U_\lambda > u_0$, $V_\lambda > v_0$, $W_\lambda > w_0$ в $\bar{B}_R$. Следовательно, в силу условия C существует такая точка (t_R, x_R) на боковой границе области $(0, T_0) \times B_R$, в которой нарушается хотя бы одно из неравенств $u \leqslant U_\lambda$, $v \leqslant V_\lambda$, $w \leqslant W_\lambda$, $\lambda = \lambda_R$, т. е. либо $u(t_R, x_R) > U_\lambda(|x_R|) \geqslant \underline{U}_\lambda(x_R)$, либо $v(t_R, x_R) > V_\lambda(|x_R|) \geqslant \underline{V}_\lambda(x_R)$, либо $w(t_R, x_R) > W_\lambda(|x_R|) \geqslant \underline{W}_\lambda(x_R)$. Подставляя в последние неравенства $|x_R| = R$ и $\lambda_R = (2a_0R)^{-1/m}$, получим, что при $t = t_R \in (0, T_0)$ выполнено по крайней мере одно из трех неравенств (4.9), где

$$E_1 = (2a_0)^{-1/m} 3^{1/2}/2, \quad E_2 = (2a_0)^{-(p+2)/4m} (3/2)^{1/4} (3/4)^{1/3},$$
$$E_3 = (2a_0)^{-3/5m} (3/4)^{1/4} 2^{1/5}.$$

Замечание. Доказательство утверждения (LS) проводилось другим более простым способом без построения огибающих к семействам $\{U_\lambda\}$, $\{V_\lambda\}$, $\{W_\lambda\}$, однако это сказалось только на величине постоянных E_i в (4.9). Степени «сингулярности» по R в (4.9) этим способом определяются точно, такие же степени содержат соответствующие огибающие.

4. Доказательство теоремы 4.2. (HS) Очевидно, что при $m < 0$ всегда можно найти такое достаточно большое $\lambda > 0$, что $\bar{\Omega} \subset \{|x| < r_0(\lambda)\}$ и $u_0 \leqslant U_\lambda$, $v_0 \leqslant V_\lambda$, $w_0 \leqslant W_\lambda$ в $\bar{\Omega}$. Тогда, поскольку в силу (4.10) $u \leqslant \underline{U}_\lambda$, $v \leqslant \underline{V}_\lambda$, $w \leqslant \underline{W}_\lambda$ на $\partial\bar{\Omega}$, в соответствии с обычной теоремой сравнения получим $u \leqslant U_\lambda$, $v \leqslant V_\lambda$, $w \leqslant W_\lambda$ всюду в $R_+^1 \times \bar{\Omega}$ (так как в силу (4.16′) эти неравенства выполнены на параболической границе области $R_+^1 \times \Omega$). Поэтому имеет место равномерная ограниченность решения (см. (4.18)):

$$u \leqslant \lambda, \quad v \leqslant (3/2)^{1/4} \lambda^{(p+2)/4}, \quad w \leqslant 2^{1/5} \lambda^{3/5} \text{ в } R_+^1 \times \bar{\Omega}. \tag{4.19}$$

(S) Случай $m = 0$ анализируется точно так же, оценка (4.19) получается путем сравнения решения задачи с функциями $(U_\lambda, V_\lambda, W_\lambda) \times (x - x_0)$.

(LS) Если $m > 0$ в (4.18), то при любой ограниченной области Ω можно найти такое достаточно малое $\lambda > 0$, что $\bar{\Omega} \subset \{|x| < r_0(\lambda)\}$. Поэтому всюду в $R_+^1 \times \bar{\Omega}$ будут справедливы оценки (4.19), если $u_0 \leqslant \underline{U}_\lambda$, $v_0 \leqslant \underline{V}_\lambda$, $w_0 \leqslant \underline{W}_\lambda$ в $\bar{\Omega}$.

5. Доказательство теоремы 4.3. Доказательство (S) и (LS) проводится так же, как доказательство соответствующих утверждений в теореме 4.1. Отметим, что в случае $p = 18/5$ в силу утверждения (S) из теоремы 4.2 выполнено условие $\bar{\Omega} \subset B_{R_0}$, так что при любом $R \in (0, R_0)$ множество $\{|x| = R\} \cap \Omega$ не является пустым и (4.12) имеет смысл.

Доказательство последнего утверждения теоремы вытекает из сравнения неограниченного решения задачи с пространственно-однородным решением (4.7), которое имеет тот же момент обострения $t = T_0$, т. е. при $T = T_0$. Действительно, предположим, что при некотором $t = t_* \in [0, T_0)$ не выполнено ни одно из неравенств (4.13), т. е.

$$u < u_{T_0}(t_*), \quad v < v_{T_0}(t_*), \quad w < w_{T_0}(t_*) \tag{4.20}$$

при $t=t_*$ всюду в $\overline{\Omega}$. Тогда в силу непрерывности решения u, v, w найдется такое $\tau>0$, что (4.20) имеет место в $\overline{\Omega}$ при $t=t_*+\tau$. Но по теореме сравнения это означает, что

$$u(t+\tau, x)\leqslant u_{T_0}(t),\ v(t+\tau, x)\leqslant v_{T_0}(t),\ w(t+\tau, x)\leqslant \leqslant w_{T_0}(t) \text{ в } [t_*, T_0)\times\overline{\Omega},$$

что противоречит (4.6), если подставить в последние оценки $t=T_0-\tau<<T_0$ и $x=0$.

6. Комментарии. 1) Оценки снизу в теореме 4.1 получены при самых общих (в рамках условия C) предположениях относительно начальных функций в задаче Коши (4.1) — (4.4). Если наложить на u_0, v_0, w_0 требование критичности решения: $u_t\geqslant 0$, $v_t\geqslant 0$, $w_t\geqslant 0$ в $(0, T_0)\times\times R^N$ (это можно обеспечить естественными ограничениями на u_0, v_0, w_0) или рассмотреть радиально симметричное решение, то оценки могут быть усилены, см. комментарии к §§ 2, 3.

2) Теорема 4.1 (и все другие теоремы этого параграфа) останется справедливой, если рассмотреть задачу Коши для вырождающейся системы

$$\begin{gathered} u_t=\nabla\cdot(|u|\nabla u)+vw, \quad v_t=\nabla\cdot(|v|^2\nabla v)+|u|^{p-1}uw, \\ w_t=\nabla\cdot(|w|^3\nabla w)+uv, \quad t>0, \quad x\in R^N. \end{gathered} \tag{4.21}$$

Задача Коши для (4.21) имеет локальное неотрицательное обобщенное решение при неотрицательных начальных функциях, причем оно единственно; см., например, работу [25]. Там же показано, что для решений системы типа (4.21) справедлива теорема сравнения по начальным функциям.

Функции (4.18) образуют семейство классических верхних стационарных решений системы (4.21) в $\{|x|<r_0(\lambda)\}$. Поэтому то же сравнение $\{u, v, w, t>0\}$ уже непосредственно с семейством $\{\underline{U}_\lambda, \underline{V}_\lambda, \underline{W}_\lambda, \lambda>0\}$ приводит при условии C к оценкам из теоремы 4.1.

3) Теоремы 4.1—4.3 показывают, что многие свойства решений задач Коши и краевых задач для (4.1) — (4.4) при достаточно произвольных ограниченных u_0, v_0, w_0 зависят от знака одного параметра $m=(5p-18)/40$. Оказывается, то же самое справедливо в случае многих других многопараметрических систем.

Например, в [6, с. 410] рассмотрена система

$$u_t=\Delta u^{\nu+1}+v^p, \quad v_t=\Delta v^{\mu+1}+u^q, \quad t>0, \quad x\in R^N; \tag{4.22}$$

$$\begin{gathered} u=u_0(x)\geqslant 0, \quad v=v_0(x)\geqslant 0, \quad t=0, \quad x\in R^N; \\ u_0^{\nu+1}, v_0^{\mu+1}\in C(R^N)\cap H_0^1(R^N), \quad \sup(u_0+v_0)<+\infty, \end{gathered} \tag{4.23}$$

содержащая четыре параметра $\mu\geqslant 0$, $\nu\geqslant 0$, $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$. Методом стационарных состояний было показано, что свойства решения задачи Коши зависят от знака одного параметра $m=[pq-(1+\mu)(1+\nu)]/2(p++\mu+1)$. Используя семейство верхних стационарных состояний системы (4.22)

$$\begin{gathered} \underline{U}_\lambda(x)=\lambda[1-(\lambda^m|x|/(2N)^{1/2})^2]_+^{1/(\nu+1)}, \\ \underline{V}_\lambda(x)=\lambda^{\frac{q+\nu+1}{p+\mu+1}}[1-(\lambda^m|x|/(2N)^{1/2})]_+^{1/(\mu+1)}, \quad \lambda>0, \end{gathered}$$

и методику доказательства теоремы 4.1, мы можем дополнить результаты [6] следующими (предполагается выполненным аналог условия C):

(HS) если $m<0$, то для любого $R>0$

$$\overline{\lim_{t\to T_0^-}} \sup_{|x|=R} [u(t, x)+v(t, x)] = +\infty; \tag{4.24}$$

(S) если $m=0$ (т. е. $pq=(1+\mu)(1+\nu)$), то (4.24) выполнено при любых $0<R<R_0=(2N)^{1/2}$;

(LS) если $m>0$, то для любого $R\in(0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0>0$, найдется такое $t_R\in(0, T_0)$, что выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\sup_{|x|=R} u(t_R, x) > a_1 R^{-\frac{2(p+\mu+1)}{pq-(1+\mu)(1+\nu)}}, \quad \sup_{|x|=R} v(t_R, x) > a_2 R^{-\frac{2(q+\nu+1)}{pq-(1+\mu)(1+\nu)}}$$

(здесь и далее через a_i обозначаются различные положительные постоянные, зависящие только от параметров конкретной системы уравнений). Рассмотрим примеры систем с другими нелинейностями.

Пример 1. Система уравнений

$$u_t = \nabla\cdot((1+u^2)^{1/2}\nabla u)+v^q, \quad v_t = \nabla\cdot((1+|\nabla v|^2)^{1/2}\nabla v)+u^p, \quad q\geqslant 1, \ p\geqslant 1,$$

имеет семейство стационарных состояний $\{U_\lambda, V_\lambda\}$ со следующими свойствами:

$$U_\lambda \geqslant \underline{U}_\lambda = \lambda[1-(a_3\lambda^m|x|)^2]_+^{1/2},$$

$$V_\lambda \geqslant \underline{V}_\lambda = a_4\lambda^{\frac{2(p+3)}{3q+4}}[1-(a_3\lambda^m|x|)^{3/2}]_+, \quad \lambda>0,$$

где $m=(pq-4)/(3q+4)$, и поэтому при выполнении аналога условия C имеем: (HS) если $m<0$, то (4.24) справедливо при любых $R>0$; (S) если $m=0$ (т. е. $pq=4$), то (4.24) выполнено при $0<R<R_0=[(2/3)^{-2q}N^{q+2}]^{1/(3q+4)}$; ($LS$) если $m>0$, то для любого $R\in(0, \varepsilon_0)$ найдется $t_R\in(0, T_0)$ такое, что имеет место хотя бы одно из неравенств

$$\sup_{|x|=R} u(t_R, x) > a_5 R^{-\frac{3q+4}{pq-4}}, \quad \sup_{|x|=R} v(t_R, x) > a_6 R^{-\frac{2(p+3)}{pq-4}}.$$

Пример 2. Рассмотрим теперь задачу Коши для системы с экспоненциальными нелинейностями:

$$u_t = \nabla\cdot(e^u\nabla u)+e^{\alpha v}, \quad v_t = \nabla\cdot(e^v\nabla v)+e^{\beta u}, \quad \alpha>0, \ \beta>0.$$

Здесь сразу можно построить семейство верхних стационарных состояний

$$\underline{U}_\lambda(x) = \{\lambda+\ln[1-e^{m\lambda}|x|^2/2N]\}_+,$$

$$\underline{V}_\lambda(x) + \left\{\frac{1+\beta}{1+\alpha}\lambda+\ln[1-e^{m\lambda}|x|^2/2N]\right\}_+, \quad \lambda>0,$$

где $m=(\alpha\beta-1)/(1+\alpha)$. Поэтому если решение задачи Коши является неограниченным в $(0, T_0)\times R^N$ и $x=0$ — его точка сингулярности, то (HS) если $m<0$, то (4.24) справедливо при любых $R>0$; (S) если $m=0$ (т. е. $\alpha\beta=1$), то (4.24) выполнено при $0<R<R_0=(2N)^{1/2}$; (LS) если $m>0$, то для любого $R\in(0, \varepsilon_0)$ найдется $t_R\in(0, T_0)$ такое, что имеет место хотя бы одно из неравенств

$$\sup_{|x|=R} u(t_R, x) > -\frac{2(1+\alpha)}{(\alpha\beta-1)}\ln R - a_7, \quad \sup_{|x|=R} v(t_R, x) > -\frac{2(1+\beta)}{(\alpha\beta-1)}\ln R - a_8.$$

Пример 3. Параболическая система

$$u_t=\Delta u+ue^v, \quad v_t=\nabla\cdot(e^v\nabla v)+u^2, \quad t>0, \quad x\in R^N,$$

содержит как степенные, так и экспоненциальные нелинейности. Семейство верхних стационарных состояний $\{\underline{U}_\lambda, \underline{V}_\lambda\}$ имеет вид

$$\underline{U}_\lambda(x)=\lambda[1-\lambda|x|^2/2N]_+, \quad \underline{V}_\lambda(x)=\{\ln\lambda+\ln[1-\lambda|x|^2/2N]\}_+, \quad \lambda>1.$$

Таким образом, здесь всегда имеет место ситуация (LS): для любого $R\in(0, \varepsilon_0)$ найдется такое $t_R\in(0, T_0)$, что выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\sup_{|x|=R} u(t_R, x)>\frac{N}{2}R^{-2}, \quad \sup_{|x|=R} v(t_R, x)=-2\ln R-\ln(2N).$$

Обратим внимание, что в отличие от предыдущих примеров указанные оценки пространственной сингулярности вблизи $x=0$ существенно различны по u и v: по u — степенная, по v — логарифмическая.

Для всех рассмотренных выше систем с помощью указанных семейств стационарных состояний могут быть доказаны аналоги теорем 4.1, 4.2.

Литература

1. *Levine H. A.* Nonexistence of global solutions to some properly and improperly posed problems of mathematical physics: the method of unbounded Fourier coefficients// Math. Ann. 1975. V. 214. P. 205—220.
2. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации//Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982. С. 217—243.
3. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Теория режимов с обострением в сжимаемых средах//Совр. пробл. матем. Новейшие достижения. (Итоги науки и техники). Т. 28. ВИНИТИ, 1986. С. 3—94.
4. *Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры//Совр. пробл. матем. Новейшие достижения. (Итоги науки и техники). Т. 28. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 95—206.
5. *Giga Y., Kohn R.* Characterizing blow-up using similarity variables//Indiana Univ. Math. J. 1987. V. 36. P. 1—40.
6. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука. 1987.
7. *Галактионов В. А.* Об условиях локализации неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений//ДАН СССР. 1982. Т. 264, № 5. С. 1035—1040.
8. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* О методе стационарных состояний для нелинейных эволюционных параболических задач//ДАН СССР. 1984. Т. 278. № 6. С. 1296—1300.
9. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
11. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка//УМН. 1987. Т. 42, Вып. 2. С. 135—176.
12. *Tsutsumi M.,* Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations//Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1972./73. V. 8. P. 211—229.
13. *Levine H. A., Payne L. E.* Nonexistence of global weak solutions for classes of nonlinear wave and parabolic equations//J. Math. Anal. Appl. 1976. V. 55. P. 329—334.
14. *Галактионов В. А.* Об условиях несуществования в целом и локализации решений задачи Коши для одного класса нелинейных параболических уравнений//ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23. № 6. С. 1341—1354.
15. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Посашков С. А., Самарский А. А.* Квазилинейное параболическое уравнение со сложным спектром неограниченных автомодельных решений//Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986. С. 142—182.
16. *Friedman A., McLeod B.* Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations// Indiana Univ. Math. J. 1985. V. 34. P. 425—447.
17. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* Оценки локализованных неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений//Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 7. С. 1133—1143.

18. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* Применение новых теорем сравнения к исследованию неограниченных решений нелинейных параболических уравнений//Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 7. С. 1165—1173.
19. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* О некоторых особенностях эволюции неограниченных решений полулинейных параболических уравнений. Препринт № 232. ИПМ АН СССР. М., 1987.
20. *Ni W.-M., Sacks P. E., Tavantzis J.* On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear parabolic equations//J. Differ. Equat. 1984. V. 54. P. 97—120.
21. *Ni W.-M., Sacks P.* Singular behavior in nonlinear parabolic equations//Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 287. P. 657—671.
22. *Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С.* Термохимическое действие лазерного излучения//УФН. 1982. Т. 138. № 1. С. 45—94.
23. *Бункин Ф. В., Галактионов В. А., Кириченко Н. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об одной нелинейной краевой задаче зажигания излучением//ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27. № 4. С. 549—559.
24. *Levine H. A., Payne L. E.* Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time// J. Differ. Equat. 1974. V. 16. P. 319—334.
25. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum princuples in differential equations. Englewood Cliffs, New Jercey: Prentice-Hall, 1967.
26. *Walter W.* Differential and integral inequalities. Berlin/New York: Srringer-Verlag, 1970.
27. *Maddalena L.* Existence of global solution for reaction-diffusion systems with density dependent diffusion//Nonlinear Anal. Theory. Meth. Appl. 1984. V. 8. P. 1383—1394.
28. *Kishimoto K., Weinberger H. F.* The spatial homogeneity of stable equilibria of some reaction-diffusion systems on convex domain//J. Differ. Equat. 1985. V. 58. P. 15—21.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
29.VI.1988