ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 23 Март 1983 Апрель № 2

УДК 517.958:536.2

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СРЕДЕ

ЕЛЕНИН Г. Г., КУРДЮМОВ С. П., САМАРСКИЙ А. А.

(Москва)

Исследованы собственные функции нелинейной краевой задачи, определяющей нестационарные диссипативные структуры режимов с обострением в простейшей однокомпонентной теплопроводной среде. Исследована устойчивость диссипативных структур.

Проблема возникновения структур в нелинейных системах различной природы играет важную роль в современном естествознании, на что указывает быстро растущее число монографий, обзоров, международных симпозиумов [1]–[8]. Большой цикл работ (см. обзоры [5], [7]) посвящен изучению стационарных диссипативных структур и автоволновых процессов в системах диффузионных уравнений. Для соответствующих математических задач найдены глобальные решения, определенные при всех $t\geqslant 0$ (t – время).

Предлагаемая работа посвящена изучению нестационарных диссипативных структур, образующихся в нелинейной теплопроводной среде из-за режима с обострением. Режимы с обострением (см. определение 1 настоящей работы) изучались ранее, например в [9], как примеры несуществования решений в целом (решение существует только на ограниченном временно́м интервале $t\in[0, \tau)$, $\tau<+\infty$). В настоящей работе и в других, выполненных с участием авторов, режимы с обострением рассматриваются как промежуточная асимптотика [10] эволюционного процесса.

Интерес к режимам с обострением вызван рядом их необычных свойств. В работах [11]–[13] показано, что нагрев среды, вызываемый нелинейным источником тепла и происходящий в режиме с обострением, может иметь различный характер.

В S- и LS-режимах с обострением нагрев сопровождается локализацией тепла (см. определения 2, 3) на фундаментальной длине. При HS-режиме нагрев среды осуществляется волной. В работах [14], [15] найден спектр диссипативных структур LS-режима, показана устойчивость простой структуры, с помощью метода осреднения изучены особенности установления структур и тепловых волн HS-режима.

Эффект локализации тепла в S- и LS-режимах с обострением позволяет в течение конечного промежутка времени не только удерживать в ограниченной области пространства сколь угодно большие значения температуры и количества тепла, несмотря на наличие теплопроводности, но и приводит к существованию нестационарных диссипативных структур. Отметим, что эффект локализации другой физической природы имеет место в теплопроводной среде с поглощением [16], [17]. В этом случае, в связи с действием объемного стока тепла, в ограниченной области температура

и количество тепла ограничены в любой момент времени. К числу явлений локализации другой физической и математической природы следует отнести пример локализованных стационарных диссипативных структур, изучаемых в [3].

Настоящая работа содержит расширенную постановку задачи о диссипативных структурах, вызванных режимами с обострением, и тесно примыкает к [14]. Основное внимание уделяется задаче Коши для уравнения теплопроводности, в котором коэффициент теплопроводности и источник тепла являются степенными функциями температуры. Подробно анализируются автомодельные решения, которые, с одной стороны, имеют интересующие нас свойства, с другой — допускают сравнительно простые методы анализа. Такой подход — в духе современного вычислительного эксперимента, объединяющего как традиционные методы математического анализа, так и численные методы [18], — позволяет рельефно выделить основные черты рассматриваемой задачи, ввести ряд новых понятий, а затем наметить путь определения широких классов коэффициентов уравнений, сохраняющих интересующие нас свойства решений.

Автомодельные решения определяются путем интегрирования нелинейной краевой задачи на собственные значения. Ее собственные функции, соответствующие положительным собственным значениям, определяют конкретный вид различных автомодельных режимов с обострением. Собственные функции, соответствующие отрицательным собственным значениям, определяют решения, существующие в целом (обычные режимы). Особенность автомодельных решений LS-режима заключается в том, что краевая задача для любого собственного значения имеет определенное число качественно различных собственных функций. Эти функции определяют простые и сложные тепловые структуры.

Автомодельные режимы с обострением неустойчивы по отношению к малым возмущениям начальных данных, однако это, как показано ниже, не означает, что при произвольных начальных данных пространственная структура решений задачи на асимптотической стадии отличается от пространственной структуры автомодельных решений. На основе анализа структурной устойчивости, выполненного с помощью автомодельной обработки (определения 4, 5), выделяется класс автомодельных решений, асимптотически устойчивых в специальной норме, согласованной с их пространственно-временной структурой (см. пп. 7, 8).

1. Простейшей математической моделью нелинейной теплопроводной среды является уравнение

$$T_t=(K(T)T_x)_x+Q(T), \tag{1}$$

где коэффициент теплопроводности представляет собой дифференцируемую функцию и удовлетворяет условиям

$$K(T)>0,\quad T>0,\qquad K(0)=0,\qquad \int_0^1 K(x)x^{-1}dx<+\infty, \tag{2}$$

а источник тепла — выпуклая неотрицательная функция, обращающаяся в нуль при нулевой температуре и удовлетворяющая условию

$$\int_\delta^\infty Q^{-1}(x)\,dx<+\infty,\qquad \delta>0. \tag{3}$$

Для уравнения (1) ставится задача

$$T(x,0)=T_0(x), \qquad 0\leqslant x<+\infty, \qquad 0\leqslant T_0(x)<+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} T_0(x)=0,$$

$$T_x(0,t)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty} T(x,t)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty} [K(T)T_x]=0,$$

решение которой может не обладать вытекающей из уравнения гладкостью там, где $T(x, t)=0$ (см. [19]). В связи с этим будем различать два случая.

Задача А. Начальное распределение финитно:

$$T(x,0)=\begin{cases} T_0(x), & 0\leqslant x<a, \\ 0 & x\geqslant a. \end{cases}$$

Задача Б. Начальное распределение отлично от нуля во всем пространстве:

$$T(x, 0)=T_0(x)>0, \qquad 0\leqslant x<+\infty.$$

Задача А заключается в определении температуры $T(x, t)$ на отрезке переменной длины $l=x_\Phi(t)$ и закона движения его границы $x=x_\Phi(t)$, $x_\Phi(0)=a$ при условии непрерывности температуры и теплового потока:

$$T(x_\Phi(t), t)=0, \qquad K[T(x_\Phi(t), t)]\,T_x(x_\Phi(t), t)=0.$$

Возможность существования конечной скорости движения фронта тепловой волны указана в [20]. В работах [17], [21] и [22] установлено, что выполнение условий (2) обеспечивает существование конечной скорости фронта. Выделение задач А и Б не является принципиальным и проводится для удобства анализа.

Определение 1. Процесс нагрева происходит в режиме с обострением, если существуют $\tau>0$ и $x_0\geqslant 0$ такие, что

$$T(x,t)<+\infty \qquad \forall t\in[0,\tau) \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\tau} T(x_0,t)=+\infty.$$

Величина τ является временем обострения [11], [12], (3) — необходимое условие существования режима с обострением.

Определение 2. В задаче А имеет место локализация тепла, вызванная режимом с обострением, если существует такое $x_0\geqslant a$, что

$$\lim_{t\to\tau} x_\Phi(t)<x_0 \text{ и } T(x,t)=0 \qquad \forall x>x_0, \quad t\in[0,\tau].$$

Минимальное значение x_0 является глубиной локализации.

Очевидно, локализация невозможна при бесконечной скорости распространения фронта тепловой волны, т. е. при нарушении условия (2). Явление локализации, определенное выше, не имеет места в задаче Б, однако в ней может существовать эффективная локализация.

Определение 3. В задаче Б имеет место эффективная локализация тепла, вызванная режимом с обострением, если существуют такие $T_0>0$ и $x_0>0$, что при любых $t\in[0, \tau]$ и $x>x_0$ выполняется неравенство $T(x, t)\leqslant T_0$. Минимальное значение x_0 при заданном T_0 является глубиной эффективной локализации.

Продемонстрируем особенности режимов с обострением на классе степенных функций:

$$K(T)=T^\sigma, \qquad Q(T)=T^\beta, \qquad \sigma>0, \quad \beta>1. \tag{4}$$

Условия (2), (3) в этом случае выполнены. Степенные функции допускают существование автомодельных решений. Заметим, что в [23] найдены все классы функций $K(T)$, $Q(T)$, допускающих существование инвариантных решений [24], частным случаем которых являются автомодельные решения.

2. Выражение $T(x, t)=g(t, \tau)\theta(\xi, \tau)$, $\xi=x\varphi^{-1}(t, \tau)$, является частным решением исходной задачи при условии (4), если $g(t, \tau)=(1-t\tau^{-1})^{-\gamma}$, $\varphi(t, \tau)=(1-t\tau^{-1})^{\alpha}$, $\gamma=(\beta-1)^{-1}$, $\alpha=0.5\gamma(\beta-\sigma-1)$, а функция $\theta(\xi, \tau)$ — нетривиальное решение краевой задачи для уравнения

$$(\theta^{\sigma}\theta_{\xi}')_{\xi}'-\frac{\alpha}{\tau}\xi\theta_{\xi}'-\frac{\gamma}{\tau}\theta+\theta^{\beta}=0. \tag{5}$$

Граничные условия в случае задачи А имеют вид

$$\theta_{\xi}'(0)=0, \qquad \theta(a)=0, \qquad \theta^{\sigma}(a)\theta_{\xi}'(a)=0, \tag{6}$$

а в случае задачи Б — вид

$$\theta_{\xi}'(0)=0, \qquad \lim_{\xi\to+\infty}\theta(\xi)=0. \tag{7}$$

Задачи (5), (6) и (5), (7) являются задачами на собственные значения τ и определяют собственные функции $\theta(\xi, \tau)$.

Положительное собственное значение и соответствующая ему собственная функция определяют автомодельное решение режима с обострением. Отрицательное значение τ вместе с собственной функцией определяют автомодельное решение, существующее в целом (для любого $t>0$).

3. Задача (5), (7) имеет решение $\theta(\xi, \tau)$ при любом τ, если существует решение $\theta(\xi, \tau_1)$ для некоторого τ_1 такого, что $\tau\tau_1>0$. При этом

$$\theta(\xi, \tau)=(\tau\tau_1^{-1})^{-\gamma}\theta((\tau\tau_1^{-1})^{-\alpha}\xi, \tau_1). \tag{8}$$

Если задача (5), (6) имеет решение на отрезке $\xi\in[0, a_1]$, $\beta\neq\sigma+1$, то существует решение, определяемое по формуле (8), на любом другом отрезке $\xi\in[0, a]$ и

$$\tau=\tau_1(aa_1^{-1})^{\omega}, \qquad \omega=\alpha^{-1}. \tag{9}$$

В справедливости этих утверждений можно убедиться непосредственной проверкой.

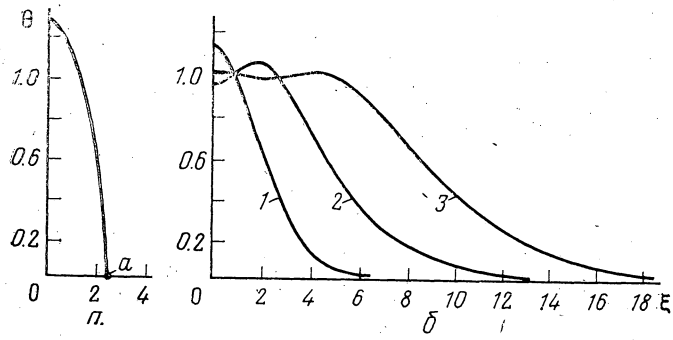
4. Для существования решений задачи (5), (6) необходимо выполнение условий $1<\beta\leqslant\sigma+1$, $\tau>0$ и $\beta>\sigma+3$, $\tau<0$.

Действительно, с одной стороны, главный член асимптотики ($\beta\neq\sigma+1$) при $\xi\to a: \theta(\xi)\sim[-\alpha\tau\sigma^{-1}(a-\xi)]^{1/\sigma}$ имеет смысл при выполнении условия $\tau(\beta-\sigma-1)<0$; с другой стороны, проинтегрировав (5) с учетом (6), получаем неравенство

$$-0.5(\beta-\sigma-3)(\beta-1)^{-1}\tau^{-1}=\int_0^a\theta^{\beta}(\xi, \tau)d\xi\left[\int_0^a\theta(\xi, \tau)d\xi\right]^{-1}>0.$$

При $\beta=\sigma+1$ решение задачи находится непосредственным интегрированием (5) (см. [11]):

$$\theta(\xi, \tau)=\begin{cases}\theta_0\cos^{2/\sigma}\left(\dfrac{\pi}{L_s}\xi\right), & 0\leqslant\xi<0.5L_s,\\ 0, & \xi>0{,}5L_s,\end{cases} \tag{10}$$



Фиг. 1

где $L_s=2\pi\sigma^{-1}(\sigma+1)^{1/2}$, $\theta_0=[2(\sigma+1)\sigma^{-1}\tau^{-1}(\sigma+2)^{-1}]^{1/\sigma}$. Величина L_s называется фундаментальной длиной.

Задача (5), (7) не имеет решений при $1<\beta\leqslant\sigma+1$. Необходимым условием существования решений таких, что

$$\int_0^\infty \theta(\xi,\tau)\,d\xi<+\infty,$$

является выполнение неравенства $\sigma+3>\beta>\sigma+1$, $\tau>0$. Действительно, асимптотика решений при $\xi\to+\infty$ имеет вид

$$\theta(\xi,\tau)=c\xi^{-2(\beta-\sigma-1)^{-1}},\qquad c=\mathrm{const}>0, \tag{11}$$

и

$$\int_c^\infty \theta^\beta(\xi,\tau)\,d\xi\left[\int_0^\infty \theta(\xi,\tau)\,d\xi\right]^{-1}=-(\beta-\sigma-3)(\beta-1)^{-1}\tau^{-1}>0.$$

5. Качественный и численный анализ показывает, что при $1<\beta<\sigma+1$ для любого значения $a>0$ задача (5), (6) имеет единственное нетривиальное решение $\theta(\xi,\tau)$, соответствующее единственному собственному значению $\tau=\tau(a)$. Время τ убывает при возрастании a в соответствии с (9). Собственная функция $\theta(\xi,\tau)$ монотонна для любого фиксированного значения $\tau>0$ (см. фиг. 1, *а*). При $\beta=\sigma+1$ задача (5), (6) имеет однопараметрическое семейство нетривиальных решений, существующих на единственном отрезке $a=0.5L_s$ (см. (10)). Свободным параметром семейства является время обострения $\tau>0$. При $\sigma+1>\beta>\sigma+3$ задача (5), (6) не имеет нетривиальных решений. В этом же диапазоне задача (5), (7) для каждого положительного τ имеет определенное число N собственных функций $\theta_i(\xi,\tau)$, $i=1,2,\ldots,N$. Их число равно числу нулей в решении $y(x)$ следующей линейной задачи (установлено с помощью численного эксперимента):

$$y''-0.5(\beta-\sigma-1)xy'+(\beta-1)y=0,\qquad y'(0)=0. \tag{12}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$y(x)=c_0\Phi(-(\beta-\sigma)(\beta-\sigma-1)^{-1},\,0.5,\,0.25(\beta-\sigma-1)x^2),\qquad c_0\neq0, \tag{13}$$

где $\Phi(a,b,\xi)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [25], c_0 — произвольная постоянная. Число нулей решения (13) определяется с помощью функции $[z]$ (целая часть числа z) по формуле

$$N=[z-[[z]z^{-1}]]+1,\qquad z=(\beta-1)(\beta-\sigma-1)^{-1}.$$

Собственные функции таковы, что

$$\int_0^\infty \theta_i(\xi, \tau)\, d\xi < +\infty.$$

На фиг. 1, *б* приведены три собственные функции для случая $\beta=3.67$. $\sigma=2.0$ и $\tau=(2.67)^{-1}$ ($\theta_1(\xi, \tau)$ — кривая *1*, $\theta_2(\xi, \tau)$ — кривая *2*, $\theta_3(\xi, \tau)$ — кривая *3*). При $\beta>\sigma+3$ существуют решения задачи (5), (7) для любого $\tau>0$: $\theta_i(\xi, \tau)$, $i=1, 2, \ldots, N$. В этом случае

$$\lim_{\xi\to+\infty} \int_0^\xi \theta(\eta, \tau)\, d\eta = +\infty$$

(см. (11)). Кроме того, в этом же диапазоне параметров β, σ задача (5), (6) имеет единственное нетривиальное решение $\theta(\xi, \tau)$, соответствующее единственному числу $\tau=\tau(a)$. При возрастании a величина $|\tau|$ возрастает в соответствии с (9). Собственная функция монотонна.

6. Выражение $T(x, t)=g(t, \tau)\theta(\xi, \tau)$ — точное решение поставленных задач, если начальные данные являются автомодельными: $T(x, 0)=\theta(x, \tau)$. При $1<\beta<\sigma+1$ для любого $a>0$ существует единственное начальное распределение температуры $\theta(x, \tau(a))$, определяющее единственную автомодельную тепловую волну так называемого *HS*-режима с обострением. Время обострения определяется длиной отрезка a. При $\beta=\sigma+1$ на единственном отрезке $a=0.5L_s$ существует однопараметрическое семейство начальных данных $\theta(x, \tau)$, определяющее нестационарные диссипативные структуры *S*-режима с обострением, локализованные на фундаментальной длине. Время обострения структуры определяется амплитудой начального распределения θ_0 (см. (10)).

Автомодельные начальные данные $T(x, 0)=\theta_i(x, \tau)$, $\tau>0$, $\beta>\sigma+1$, определяют N автомодельных решений режима с обострением, имеющих качественно различную пространственную структуру и существующих в течение одного промежутка времени $\tau>0$. Автомодельное решение, соответствующее $\theta_1(\xi, \tau)$, имеет максимум при $\xi=0$. Полуширина такого решения $x_h(t)$: $T(0, t)=2T(x_h(t), t)$ при $t\to\tau$ монотонно стремится к нулю. Автомодельные решения, соответствующие $\theta_i(\xi, \tau)$, $i\geqslant 2$, имеют i локальных экстремумов. В таких решениях все локальные экстремумы движутся к центру симметрии $x=0$ и в момент $t=\tau$ фокусируются в нем, оставляя в пространстве след — предельное распределение температуры

$$T_i(x) = \lim_{t\to\tau} T(x, t) = c_i x^{-2(\beta-\sigma-1)^{-1}}, \tag{14}$$

где $c_i>0$ — постоянная, зависящая от $\tau>0$ и от i — номера собственной функции. Существование предельного распределения (14) указывает на эффективную локализацию в автомодельных решениях так называемого *LS*-режима с обострением [14]. Автомодельные решения, соответствующие первой собственной функции, определяют простую диссипативную структуру, старшие собственные функции определяют сложные диссипативные структуры.

При $\beta>\sigma+3$ наряду с простыми и сложными тепловыми структурами режима с обострением имеется автомодельная тепловая волна, существующая для любого $t>0$. Амплитуда тепловой волны убывает со временем. Для

любого $a>0$ существует единственное начальное распределение $\theta(x, \tau(a))$ и единственное значение $\tau(a)<0$, определяющее такую волну.

Задача	$1<\beta<\sigma+1$	$\beta=\sigma+1$	$\sigma+1<\beta<\sigma+3$	$\beta>\sigma+3$
А	*HS*-режим с обострением	*S*-режим с обострением		Обычный *HS*-режим
Б			*LS*-режим с обострением	*LS*-режим с обострением

В таблице приведена классификация решений задач А и Б как по характеру изменения температуры во времени (обычные режимы, существующие в целом, и режимы с обострением), так и по характеру изменения полуширины во времени. Согласно [11], [12], автомодельные решения с монотонно убывающей, неизменной, монотонно возрастающей полушириной называются, соответственно, *LS*-, *S*-, *HS*-режимами.

7. Автомодельные решения режимов с обострением неустойчивы по начальным данным. Малое возмущение начального распределения приводит к малому изменению времени обострения. Это, в свою очередь, приводит к сколь угодно большому различию между решениями начиная с некоторого момента времени, близкого к моменту обострения. Такого рода неустойчивость не означает, что всегда при неавтомодельных начальных данных пространственная структура решений задачи на асимптотической стадии отличается от пространственной структуры автомодельного решения.

Определение 4. Пусть $T(x, t)$ — решение исходной задачи. Преобразование решения по формуле

$$\bar{\theta}(\xi, t)=T_m^{-1}(t)T(\xi f(T_m(t)), t), \tag{15}$$

где $f(z)=z^{-0.5(\beta-\sigma-1)}$,

$$T_m(t)=\begin{cases} \text{либо} & T(0, t), \\ \text{либо} & \max\limits_{0\leqslant x<+\infty} T(x, t), \end{cases}$$

называется автомодельной обработкой, $\bar{\theta}(\xi, t)$ — автомодельным представлением решения [14].

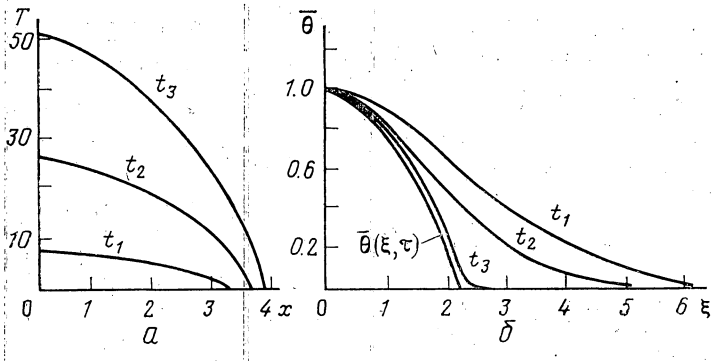
Применяя преобразование (15) к автомодельному решению, получаем нормированные собственные функции

$$\bar{\theta}(\xi)=\begin{cases} \text{либо} & \theta^{-1}(0)\theta(\xi, \tau), \\ \text{либо} & [\max\limits_{0\leqslant\xi<+\infty} \theta(\xi, \tau)]^{-1}\theta(\xi, \tau). \end{cases}$$

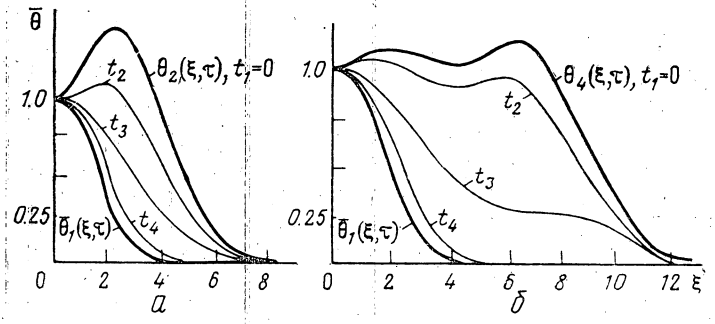
Нормированная собственная функция является стационаром автомодельной обработки (15).

Определение 5. Будем говорить, что автомодельное решение режима с обострением имеет устойчивую пространственную структуру, если нормированная собственная функция, определяющая это решение, является устойчивым стационаром среди автомодельных представлений решений $\bar{\theta}(\xi, t)$.

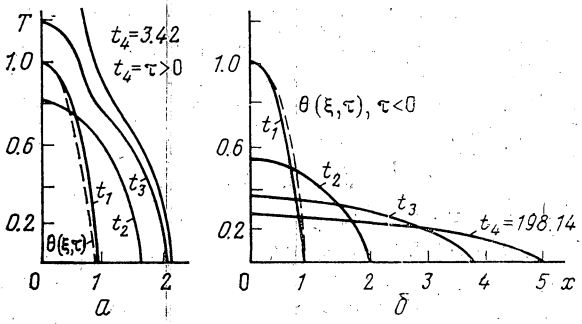
8. Аналитические методы и численный эксперимент [14], [26] показали, что в диапазоне $1<\beta<\sigma+1$ автомодельные решения устойчивы



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

в смысле определения 5. На фиг. 2 ($0<t_1<t_2<t_3<\tau$) приведены результаты численного расчета с автомодельной обработкой. Нагрев осуществляется автомодельной тепловой волной *HS*-режима с обострением. При $\beta=\sigma+1$ автомодельное решение *S*-режима устойчиво. На фундаментальной длине образуется симметричная устойчивая нестационарная диссипативная структура режима с обострением и имеет место эффект локализации тепла. В диапазоне параметров $\sigma+3>\beta>\sigma+1$ простая тепловая структура устойчива. Сложные структуры сохраняются в течение почти всего времени обострения. В течение достаточно короткого времени непосредственно перед моментом обострения происходит вырождение сложной структуры в простую (см. фиг. 3). При $\beta>\sigma+3$ существуют два типа автомодельных решений: тепловая волна обычного *HS*-режима и тепловые структуры *LS*-режима с обострением (см. таблицу). Автомодельное решение обычного *HS*-режима неустойчиво. Численный эксперимент показал, что если начальное распределение минорируется распределением температуры автомодельного решения обычного *HS*-режима, то имеет место *LS*-режим с обострением, если мажорируется — то достаточно долго существует затухаю-

щая волна. В обоих случаях максимальные температуры в начальном и автомодельном распределении совпадают (см. фиг. 4).

9. Выше было показано, что задача А не имеет автомодельных решений режимов с обострением в диапазоне $\beta>\sigma+1$. Однако с помощью метода осреднения [14], [26], теорем сравнения [27] – [30] и вычислительного эксперимента [11] показано, что в решениях задачи А, несмотря на отсутствие автомодельных решений, имеет место эффект локализации тепла в смысле определения 2. Существуют локализованные на фундаментальной длине LS-режима нестационарные и диссипативные структуры. Многочисленные численные эксперименты [14] показывают, что распределение температуры в структурах задачи А почти всюду внутри области локализации, за исключением окрестности фронта $x=x_\Phi(t)$: $T(x_\Phi(t),\ t)=0$ ($x_\Phi(\tau)$ – фундаментальная длина LS-режима), совпадает с распределением температуры в автомодельном режиме задачи Б. Оценка для фундаментальной длины LS-режима с обострением дана в [13].

10. Дальнейшие исследования показали, что режимы с обострением и локализация тепла характерны для широких классов коэффициента теплопроводности и объемного источника тепла. Важную роль в определении таких классов играют теоремы сравнения параболических уравнений, в том числе вырождающихся [27] – [36], а также построение приближенных автомодельных режимов [37]. Один из важных результатов этих работ заключается в способе построения по заданному $Q(T)$ коэффициента $K(T)$, приводящего к локализации тепла в режиме с обострением. Приложения эффекта локализации обсуждаются в [38] – [44]. Взаимодействие тепловых структур в многомерном случае было исследовано численно в [45], [46]. При изучении выхода на автомодельный режим оказался полезным метод осреднения, предложенный в [14], [26]. Диссипативные структуры режимов с обострением в средах с распределенными параметрами рассмотрены в [47], [48]. Цикл работ [49] – [54] посвящен исследованию нестационарных структур в различных математических моделях нелинейных сред, в том числе многокомпонентных. Эффекты локализации тепла в задачах с граничными режимами рассмотрены в [55], где и содержится наиболее полная библиография.

Литература

1. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
2. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флюктуаций. М.: Мир, 1973.
3. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
4. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математические модели в биологии. М.: Наука, 1975.
5. *Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах.– Успехи физ. наук, 1979, т. 128, вып. 4, с. 625–666.
6. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.– Препринт ИПМатем. АН СССР, М., 1979, № 29.
7. *Диканский А. С.* Уравнения диффузии с нелинейной кинетикой.– Деп. в ВИНИТИ, 1980, № 1405-80 ДЕП.
8. *Haken H.* Synergetics.– Berlin etc.: Springer, 1980.
9. *Levine H. A.* Some nonexistence and instability theorems for solutions of formaly parabolic equations of the form $Pu_t=-Au+F(u)$.– Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1973, v. 51, p. 371–386.
10. *Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б.* Промежуточные асимптотики в математической физике.– Успехи матем. наук, 1971, т. 26, вып. 2 (158), с. 115–129.
11. *Самарский А. А. и др.* Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла.– Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 321–324.
12. *Змитренко Н. В. и др.* Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1976, № 74.

13. *Змитренко Н. В. и др.* Нелинейные процессы в плотной плазме и особенности термодинамики режимов обострения.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1976, № 109.
14. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П.* Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1977, № 106.
15. *Самарский А. А. и др.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур.– Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330–1333.
16. *Мартинсон А. К., Павлов К. Б.* К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 4, с. 1048–1053.
17. *Калашников А. С.* О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 3, с. 689–696.
18. *Самарский А. А.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.– Вестн. АН СССР, 1979, № 5, с. 38–49.
19. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу-Юй-Линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации.– Изв. АН СССР, Сер. матем., 1958, т. 22, № 5, с. 667–704.
20. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* Теория распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.– В кн.: Сб., посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1951, с. 61–67.
21. *Калашников А. С.* О квазилинейных вырождающихся параболических уравнениях с конечной скоростью распространения возмущений.– В кн.: Дифференц. ур-ния с частными производными. Новосибирск: Наука, 1980, с. 80–83.
22. *Галактионов В. А.* О некоторых свойствах бегущих волн в среде с нелинейной теплопроводностью и источником тепла.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 4, с. 980–989.
23. *Дородницын В. А.* Групповые свойства и инвариантные решения уравнения теплопроводности с источником или стоком.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1979, № 57.
24. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства и инвариантные решения уравнений нелинейной теплопроводности.– Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 3, с. 492–495.
25. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965.
26. *Еленин Г. Г., Плохотников К. Э.* Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1977, № 91.
27. *Галактионов В. А. и др.* О сравнении решений параболических уравнений.– Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 3, с. 586–589.
28. *Галактионов В. А. и др.* Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 6, с. 1451–1461.
29. *Галактионов В. А.* Условия ψ-критичности и методы сравнения решений параболических уравнений.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1979, № 151.
30. *Галактионов В. А.* Два метода сравнения решений параболических уравнений.– Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 832–835.
31. *Галактионов В. А. и др.* О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1979, № 161.
32. *Галактионов В. А. и др.* Асимптотическая стадия режимов с обострением и эффективная локализация тепла в задачах нелинейной теплопроводности.– Дифференц. ур-ния, 1980, т. 16, № 7, с. 1196–1204.
33. *Галактионов В. А.* Некоторые свойства решений квазилинейных параболических уравнений.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1981, № 16.
34. *Галактионов В. А. и др.* О неорганических решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t=\nabla(u^\sigma\nabla u)+u^\beta$.– Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 6, с. 1362–1364.
35. *Галактионов В. А.* Об одной краевой задаче для нелинейного параболического уравнения $u_t=\Delta u^{\sigma+1}+u^\beta$.– Дифференц. ур-ния, 1981, т. 17, № 5, с. 836–842.
36. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений.– Дифференц. ур-ния, 1980, т. 26, № 11, с. 1925–1935.
37. *Самарский А. А.* О новых методах исследования асимптотических свойств параболических уравнений.– Тр. Матем. ин-та АН СССР. М., 1981, т. 158, с. 153–162.

38. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Возможность использования локализации тепла в режимах сжатия θ-пинча с обострением.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1980, № 153.
39. *Еленин Г. Г. и др.* Инерция тепла и диссипативные структуры.– В кн.: Изучение гидродинамич. неустойчивости числ. методами. М.: ИПМ АН СССР, 1980, с. 5–27.
40. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.* *N*- и *S*-режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением.– Прикл. механ. и техн. физ., 1977, т. 1, с. 3–18.
41. *Змитренко Н. В. и др.* Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью.– Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, вып. 9, с. 620–623.
42. *Самарский А. А., Курдюмов С. П.* Нелинейные процессы в плотной плазме и их роль в проблеме лазерного УТС.– В кн.: Волновая и газовая динамика. № 3. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 18–28.
43. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.* Режимы сжатия и разрежения конечной массы, допускающие обращение времени в диссипативной среде.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1981, № 39.
44. *Samarskij A. A.* Numerical simulation in plasma physics.– In: Comput. Methods Appl. Sci. and Engng. North Holland Publ. Co. INRIA, 1980, p. 285–303.
45. *Курдюмов С. П. и др.* Взаимодействие тепловых структур.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1978, № 77.
46. *Курдюмов С. П. и др.* Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах.– Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 836–839.
47. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г.* Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1979, № 16.
48. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г.* Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горящей среде.– Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 3, с. 587–591.
49. *Галактионов В. А. и др.* Влияние выгорания на локализацию горения и образование структур в нелинейной среде.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1979, № 27.
50. *Курдюмов С. П. и др.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных двухкомпонентных средах с объемными источниками.– Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 5, с. 1084–1088.
51. *Малинецкий Г. Г.* Об одном классе математических моделей, связанных с самоорганизацией.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1980, № 192.
52. *Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г.* Некоторые эффекты самоорганизации в физике плазмы.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1980, № 122.
53. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г.* Согласованные режимы горения в одной диссипативной среде с переносом.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1980, № 125.
54. *Змитренко Н. В., Михайлов А. П.* Аналитические методы исследования некоторых нелинейных задач физики плазмы. Учебно-методич. пособие. М.: ЦНИИ-атоминформ, 1981.
55. *Галактионов В. А. и др.* Локализация тепла в нелинейных средах.– Дифференц. ур-ния, 1981, т. 17, № 10, с. 1826–1841.

Поступила в редакцию 18.XII.1981