УДК 517.956

Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. IV

Галактионов В. А., Самарский А. А.

В настоящей работе так же, как в статьях [1]—[3], исследуется асимптотическое поведение решений квазилинейных параболических уравнений нелинейной теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{A}(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1}$$

с коэффициентами теплопроводности $k(u)\in C^2((0, +\infty))\cap C([0, +\infty))$ достаточно произвольного (в частности, нестепенного) вида. Исследование проводится с помощью построения приближенных автомодельных решений (п. а. р.), которые исходному уровнению (1) не удовлетворяют, но тем не менее правильно описывают асимптотические свойства решений рассматриваемых задач.

В данной работе во всех случаях построение п. а. р. проводится единым методом, отличным от применяемых в [1]—[3]. Этот метод является более простым (хотя и не столь общим), и в ряде случаев его использование приводит к новым (по сравнению с [1]—[3]) результатам.

В §§ 9,10 рассматриваются краевые задачи для уравнения (1) в полупространстве $x\in\mathbf{R}^1_+$ с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x)\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^1_+;\ u_0\in C(\overline{\mathbf{R}}^1_+),\quad k(u_0)\frac{\partial u_0}{\partial x}\in C(\mathbf{R}^1_+) \tag{2}$$

и с одним из граничных режимов

$$u(t,0) = \varkappa_+(t) > 0,\ t>0;\quad \varkappa_+\in C^2(\mathbf{R}^1_+), \tag{3}$$

$$u(t,\ 0) = \varkappa_-(t) > 0,\ t\in(0,\ 1);\quad \varkappa_-\in C^2(0,\ 1), \tag{3'}$$

где монотонно возрастающие функции $\varkappa_\pm$ таковы, что $\varkappa_+(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$, $\varkappa_-(t)\to+\infty$ при $t\to 1^-$ (подчеркнем, что функция $\varkappa_-(t)$ растет в режиме с обострением).

В § 11 тем же, что и в §§ 9, 10, методом изучается асимптотическое поведение (при $t\to+\infty$) решения задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$u(0,\ x) = u_0(x)\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^1;\ u_0\in C(\overline{\mathbf{R}}^1)\cap L^1(\mathbf{R}^1). \tag{4}$$

Показано, что при достаточно широком выборе коэффициентов $k(u)$ существенно нестепенного вида асимптотические свойства решения этой задачи описываются п. а. р., построенными на основе хорошо известных автомодельных решений типа «мгновенного точечного источника» уравнений $u_t = (u^\sigma u_x)_x$, $\sigma = \mathrm{const}\geqslant 0$.

§ 9. Приближенные автомодельные решения уравнений, «близких» к линейному

В этом параграфе будут построены п. а. р. уравнений (1) с коэффициентами $k(u)$, удовлетворяющими условию

$$\left[\frac{k(u)}{k'(u)}\right]' \to \infty, \quad u \to +\infty. \tag{9.1}$$

Мы также будем считать, что[14]

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{k(\xi u)}{k(u)} = 1, \quad \xi \in (0, 1). \tag{9.2}$$

Некоторые коэффициенты k, удовлетворяющие (9.1), (9.2), приведены в таблице 15 (см. также таблицу 8 в [2]).

Таблица 15

$k(u)$
$\ln^{\alpha}\ln(3+u)$, $\alpha \in \mathbf{R}^1$
$\ln^{\alpha}(3+u)$, $\alpha \in \mathbf{R}^1$
$\ln(3+u)\ln^{\alpha}\ln(3+u)$, $\alpha \in \mathbf{R}^1$
$\exp[\ln^{\alpha}(1+u)]$, $0<\alpha<1$
$\exp\left[\dfrac{\ln(1+u)}{\ln^{\alpha}\ln(3+u)}\right]$, $\alpha>0$

Будет показано, что в сделанных предположениях п. а. р. рассматриваемых краевых задач могут быть построены на основе точных автомодельных (инвариантных) решений линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.3}$$

путем специального (определяемого видом коэффициента k) преобразования переменной t. Такой подход существенно отличается от применяемого в [2] (см. также [4]—[6]), где при выполнении условия (9.1) п. а. р. строятся на основе инвариантных решений уравнения первого порядка типа Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{k(v)}{v+1}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2. \tag{9.4}$$

Отметим, что в данной работе рассматриваются более общие, чем в [2], виды коэффициентов $k(u)$, поскольку здесь нет необходимости в ограничении

$$\int_0^{+\infty} \frac{k(\eta)}{\eta+1}\,d\eta = +\infty, \tag{9.5}$$

[14] Многочисленные частные примеры свидетельствуют о том, что условие (9.2) является следствием (9.1).

существенно используемом в [2]. Кроме того, подчеркнем, что ниже проведено исследование таких классов граничных режимов $\varkappa_{\pm}(t)$, для которых п. а. р. ранее вообще построены не были (см. § 4 [2, п. 3]).

Нам понадобятся следующие виды автомодельных решений линейного уравнения (9.3):

$$\text{I.} \qquad u_A(t,x) = (1+t)^m f_1(\zeta),\ \zeta = \frac{x}{(1+t)^{1/2}};\ m = \text{const} > 0; \tag{9.6}$$

$$\text{II.} \qquad u_A(t,x) = \exp t f_2(\zeta),\ \zeta = x; \tag{9.7}$$

$$\text{III.} \qquad u_A(t,x) = (1-t)^n f_3(\zeta),\ \zeta = \frac{x}{(1-t)^{1/2}};\ n = \text{const} < 0 \tag{9.8}$$

(отметим, что u_A в (9.8) изменяется в режиме с обострением). Функции f_1, f_2 и f_3 определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений, которые получаются после подстановки выражений u_A в уравнение (9.3). Кроме того, они удовлетворяют краевым условиям

$$f_i(0) = 1, \quad f_i(+\infty) = 0; \quad i = 1, 2, 3.$$

Конкретный вид f_1 и f_2 указан в [2] (см. § 5), функция f_3 определяется по формуле [4], [5]:

$$f_3(\zeta) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-n)} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\zeta^2 s}{4}\right) s^{-n-1} (1+s)^{n-1/2} ds.$$

Так же, как в [1]—[3], в каждом из рассматриваемых случаев п. а. р. $u_a(t, x)$ задачи (1)—(3) или (1)—(3′) будем искать в виде

$$u_a(t,x) = \varkappa_{\pm}(t)\,\theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}, \tag{9.9}$$

где неотрицательные и достаточно гладкие функции $\theta_a(\xi)$, $\varphi(t)$ подлежат в дальнейшем определению. Предполагается, что $\theta_a(0) = 1$. Поэтому п. а. р. (9.9) удовлетворяет граничным условиям (3) или (3′).

Через $\theta(t, \xi)$ обозначим автомодельное представление решения рассматриваемой задачи, определяемое по пространственно-временной структуре соответствующего п. а. р.

$$\theta(t,\xi) = \frac{1}{\varkappa_{\pm}(t)} u(t, \xi\varphi(t)), \quad \xi \in \mathbf{R}^1_+. \tag{9.10}$$

Будет показано, что при специальном выборе функций $\varkappa_{\pm}$, θ_a и φ имеет место сходимость $\theta(t, \xi)$ к $\theta_a(\xi)$ при $t \to +\infty$ или $t \to 1^-$, что обеспечивает асимптотическую «близость» решения исследуемой задачи и п. а. р. (9.9).

При доказательстве сформулированных ниже утверждений предполагается, что $u(t, \cdot) \in L^2(\mathbf{R}^1_+)$ при всех допустимых значениях $t \geqslant 0$. Норму в $L^2(\mathbf{R}^1_+)$ будем обозначать через $\| \ \|_2$. Кроме того, будем считать, что начальная функция $u_0(x)$ в (2) является невозрастающей в $\mathbf{R}^1_+$. Тогда в силу монотонности граничных режимов $\varkappa_{\pm}(t)$ этим же свойством обладают решения $u(t, x)$ рассматриваемых задач (см., например, [7]).

Прежде чем переходить к изложению основных результатов этого параграфа, докажем следующее утверждение.

Лемма 9.1. *Пусть коэффициент* $k \in C^2((0, +\infty)) \cap C([0, +\infty))$ *удовлетворяет условию* (9.1). *Фиксируем произвольное* $\alpha > 0$. *Тогда при всех достаточно больших* $u > 0$

$$u^{-\alpha} < k(u) < u^{\alpha}. \tag{9.11}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что из (9.1) вытекает справедливость предельного равенства

$$\frac{k'(u)\,u}{k(u)} \to 0, \quad u \to +\infty, \tag{9.12}$$

интегрирование которого приводит к оценкам (9.11).

1. Граничные режимы без обострения. В этом пункте будет рассматриваться задача (1)—(3) с граничным режимом, определенным при всех $t > 0$.

1.1. Приближенные автомодельные решения типа I.

Теорема 9.1. *Пусть выполняются условия* (9.1), (9.2) *и пусть при всех достаточно больших* $t > 0$

$$\varkappa_+(t) = (1+t)^m \{k[(1+t)^m]\}^m, \quad m > 0. \tag{9.13}$$

Тогда

$$\varphi(t) = (1+t)^{1/2} \{k[(1+t)^m]\}^{1/2}, \quad t > 0, \quad \theta_a(\xi) \equiv f_1(\xi) \tag{9.14}$$

и

$$\lim_{t \to +\infty} \| \theta(t, \xi) - \theta_a(\xi) \|_2 = 0. \tag{9.15}$$

Замечание 1. Конкретный вид оценки скорости сходимости будет получен в процессе доказательства теоремы.

Замечание 2. Из леммы 9.1 следует, что граничный режим (9.13) удовлетворяет условию $\varkappa_+(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Кроме того, нетрудно показать, что при всех достаточно больших $t > 0$ функция (9.13) является монотонной. Действительно, в силу (9.1) имеем

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{[\varkappa_+^{1/m}(t)]'}{k[(1+t)^m]} = 1 + m \lim_{t \to +\infty} \frac{(1+t)^m}{\dfrac{k[(1+t)^m]}{k'[(1+t)^m]}} = 1 + m \left\{ \lim_{u \to +\infty} \left[\frac{k(u)}{k'(u)} \right]' \right\}^{-1} = 1 > 0,$$

т. е. $\varkappa'_+(t) > 0$ при всех достаточно больших t.

Доказательство теоремы. Сделаем в исходном уравнении (1) преобразование временной координаты $t \to \mu(t)$, где гладкая монотонно возрастающая функция μ: $\overline{\mathbf{R}}^1_+ \to \overline{\mathbf{R}}^1_+$ такова, что

$$\varkappa_+(\mu(t)) = (1+t)^m, \quad t > 0. \tag{9.16}$$

После этого преобразования решение задачи (1)—(3) — функция $u(\mu(t), x)$ — будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu'(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

и в силу (9.16) — граничному условию

$$u(\mu(t), 0) = (1+t)^m, \quad t > 0.$$

Из (9.16) также следует, что

$$\varphi(\mu(t)) = (1+t)^{1/2}, \quad t > 0,$$

и поэтому п. а. р. (9.9) и автомодельное представление (9.10) после преобразования принимают соответственно вид

$$u_a(\mu(t), x) = (1+t)^m \theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(1+t)^m},$$
$$\theta(\mu(t), \xi) = \frac{1}{(1+t)^m} u(\mu(t), \xi(1+t)^{1/2})$$

(отметим, что $u_a(\mu(t), x)$ в точности совпадает с автомодельным решением (9.6) уравнения (9.3)).

Положим $w(t, x) = u(\mu(t), x) - u_a(\mu(t), x)$. Тогда $w(t, 0) = w(t, +\infty) = 0$, $w(t, \cdot) \in L^2(\mathbf{R}^1_+)$ при всех $t > 0$. Из (1) и (9.3) следует, что функция w удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu'(t) k(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_a}{\partial x}\right]. \tag{9.17}$$

Умножим скалярно обе части (9.17) на w. В результате после интегрирования по частям получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t, x)\|_2^2 = -\left(\mu'(t) k(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_a}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right). \tag{9.18}$$

Обозначим через $G(s; t)$ функцию

$$G(s; t) = \int_0^s \{[\mu'(t) k(\eta)]^{1/2} - 1\}^2 d\eta, \quad s > 0, t > 0.$$

Тогда, используя тождество

$$\left(\mu'(t) k(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_a}{\partial x}\right) =$$
$$= \left\{[\mu'(t) k(u)]^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_a}{\partial x}\right\}^2 - \frac{\partial u_a}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x}(u; t),$$

из (9.18) выводим оценку

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_2^2 \leqslant \left(\frac{\partial u_a}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} G(u; t)\right). \tag{9.19}$$

Поскольку $\partial u_a/\partial x < 0$ и $\partial u/\partial x \leqslant 0$ при любых $t > 0$ и $x \in \mathbf{R}^1_+$, правая часть (9.19) не превосходит выражения

$$-\sup_x \left|\frac{\partial}{\partial x} u_a(t, x)\right| \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} G(u; t)\, dx = q_a (1+t)^{m-\frac{1}{2}} G((1+t)^m; t),$$

где $q_a = \max|\theta_a'(\xi)| < +\infty$. Тогда из (9.19) заключаем, что

$$\|w(t, x)\|_2^2 \leqslant \|w(0, x)\|_2^2 + 2q_a \int_0^t (1+\tau)^{m-1/2} G((1+\tau)^m; \tau)\, d\tau.$$

Отсюда в силу равенства

$$\|w(t, x)\|_2^2 = (1+t)^{2m+1/2} \|\theta(\mu(t), \xi) - \theta_a(\xi)\|_2^2$$

получаем

$$\|\theta(\mu(t), \xi) - \theta_a(\xi)\|_2^2 \leqslant (1+t)^{-2m-1/2} \|w(0, x)\|_2^2 +$$
$$+ 2q_a (1+t)^{-2m-1/2} \int_0^t (1+\tau)^{m-1/2} G((1+\tau)^m; \tau)\, d\tau. \tag{9.20}$$

Покажем, что правая часть (9.20) стремится к нулю при $t\to+\infty$. Предварительно установим справедливость асимптотического равенства

$$\mu'(t)\cong[k((1+t)^m)]^{-1},\quad t\to+\infty. \tag{9.21}$$

Действительно, из (9.13), (9.16) с помощью леммы 9.1 получаем

$$\mu(t)\cong\frac{(1+t)}{k[(1+t)^m]},\quad t\to+\infty,$$

и поэтому

$$\mu'(t)\cong\frac{1}{k[(1+t)^m]}-m\frac{k'[(1+t)^m]}{k^2[(1+t)^m]}(1+t)^m.$$

Отсюда

$$\lim_{t\to+\infty}\mu'(t)k[(1+t)^m]=1-m\left\{\lim_{u\to+\infty}\left[\frac{k(u)}{k'(u)}\right]'\right\}^{-1}=1.$$

Теперь мы можем раскрыть неопределенность (при $t\to+\infty$) в правой части (9.20). Получим

$$\lim_{t\to+\infty}\|\theta-\theta_a\|_2^2=\frac{2q_a}{2m+\frac{1}{2}}\lim_{t\to+\infty}(1+t)^{-m}\int_0^{(1+t)^m}\{[\mu'(t)k(\eta)]^{1/2}-1\}^2d\eta. \tag{9.22}$$

В результате замены переменной $\eta=(1+t)^m\zeta$ под знаком интеграла правая часть (9.22) с учетом (9.21) приводится к виду

$$\frac{2q_a}{2m+\frac{1}{2}}\lim_{t\to+\infty}\int_0^1\left\{\left[\frac{k(\zeta(1+t)^m)}{k((1+t)^m)}\right]^{1/2}-1\right\}^2d\zeta$$

и в силу предположения (9.2) стремится к нулю при $t\to+\infty$, что доказывает справедливость (9.15). Теорема доказана.

Замечание 3. Для случая $k(u)\to1$, $u\to+\infty$, теорема 9.1 аналогичным методом доказана в [5].

Рассмотрим один конкретный случай применения доказанной теоремы.

Пример 15. Пусть в (1) $k(u)=\ln^\alpha(2+u)$ (см. таблицу 15). Тогда, как следует из (9.13) и (9.14), граничный режим

$$\varkappa_+(t)\cong m^{\alpha m}t^m\ln^{\alpha m}t,\quad t\to+\infty$$

приводит к возникновению тепловой волны, полуширина которой движется при $t\to+\infty$ по закону

$$x_{\text{эф}}(t)\cong\xi^*m^{\frac{\alpha}{2}}t^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{\alpha}{2}}t,$$

где постоянная $\xi^*<+\infty$ такова, что $f_1(\xi^*)={}^1/_2$.

1.2. Приближенные автомодельные решения типа II. Следующая теорема доказывается так же, как предыдущая.

Теорема 9.2. *Пусть выполняются условия* (9.1), (9.2) *и, кроме того,*

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\eta}{k[\exp\eta]}=+\infty. \tag{9.23}$$

Пусть при всех достаточно больших $t>0$

$$\varkappa_+(t)=\exp[\mu^{-1}(t)], \tag{9.24}$$

где через μ^{-1} *обозначена функция, обратная к*

$$\mu(t)=\int_0^t \frac{d\eta}{k[\exp\eta]}, \quad t>0 \tag{9.25}$$

(*в силу* (9.23) μ^{-1} *определена при любых* $t>0$).

Тогда $\varphi(t)\equiv 1$, $\theta_a(\xi)\equiv f_2(\xi)$ *и справедливо равенство* (9.15).

Замечание 1. Условию (9.23) удовлетворяют $k(u)$ из первой строки таблицы 15, а также из второй и третьей строки, если $\alpha\leqslant 1$.

Замечание 2. В предположениях теоремы граничный закон (9.24) приводит к возникновению тепловой волны с постоянной полушириной (т. к. $\varphi(t)\equiv 1$). Тем самым, условие (9.23) обеспечивает принадлежность таких функций $\varkappa_+(t)$ к классу граничных режимов без обострения. Ниже будет показано, что сходимость интеграла в (9.23) приводит к тому, что указанным выше свойством будут обладать только специального вида граничные режимы с обострением. Отметим, также, что условие (9.23) можно привести к следующему эквивалентному виду:

$$\int_1^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta k(\eta)}=+\infty. \tag{9.23'}$$

Для иллюстрации возможностей теоремы 9.2 рассмотрим

Пример 16. Пусть $k(u)=\ln(1+u)$. Тогда, как следует из (9.25),

$$\mu(t)\cong\ln t, \quad \mu^{-1}(t)\cong\exp t, \quad t\to+\infty.$$

Поэтому при данном коэффициенте $k(u)$ к тепловой волне с постоянной глубиной проникновения приводит действие граничного режима (см. (9.24))

$$\varkappa_+(t)\cong\exp(\exp t), \quad t\to+\infty.$$

2. Граничные режимы с обострением. В этом пункте будет рассматриваться краевая задача (1)—(3′).

2.1. Приближенные автомодельные решения типа II.

Теорема 9.3. *Пусть выполняются условия* (9.1), (9.2) *и, кроме того,*

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{k[\exp\eta]}<+\infty. \tag{9.26}$$

Пусть при всех t, *достаточно близких к* 1^-,

$$\varkappa_-(t)=\exp[\mu^{-1}(t)], \tag{9.27}$$

где μ^{-1}: $(0, 1)\to\mathbf{R}^1_+$ — *функция, обратная к монотонно возрастающей функции* $\mu(\tau)$: $\mathbf{R}^1_+\to(0, 1)$, *определяемой при достаточно больших* τ *по формуле*

$$\mu(\tau)=1-\int_\tau^{+\infty} \frac{d\eta}{k[\exp\eta]} \tag{9.28}$$

(*в силу* (9.26) $\mu^{-1}(t)\to+\infty$ *при* $t\to 1^-$).

Тогда $\varphi(t)\equiv 1$, $\theta_a(\xi)\equiv f_2(\xi)$ *и*

$$\lim_{t\to 1^-}\|\theta(t,\xi)-\theta_a(\xi)\|_2=0. \tag{9.29}$$

Замечание. В условиях теоремы 9.3 п. а. р. (9.9) имеет вид

$$u_a(t, x) = \exp[\mu^{-1}(t) - x]$$

(напомним, что $f_2(x) = \exp(-x)$), причем $u_a(t, x) \to +\infty$ при $t \to 1^-$ всюду в $\mathbf{R}^1_+$. Из (9.29) следует, что этим же свойством обладает решение $u(t, x)$, т. е. в задаче (1)—(3′) локализация тепла отсутствует. Другими словами, в сделанных предположениях граничный режим с обострением (9.27) является HS-режимом (см. по этому поводу [6], [8], [9] и приведенную там библиографию).

Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства теоремы 9.1. Устанавливается справедливость следующей оценки:

$$\|\theta(\mu(t), \xi) - \theta_a(\xi)\|_2^2 \leqslant \|u(0, x) - u_a(0, x)\|_2^2 \exp(-2t) + \\ + 2\exp(-2t) \int_0^t \exp\tau \left[\int_0^{\exp\tau} \{[\mu'(\tau) k(\eta)]^{1/2} - 1\}^2 d\eta \right] d\tau, \tag{9.30}$$

из которой в силу (9.2) вытекает (9.29):

$$\lim_{t \to 1^-} \|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_2^2 = 2 \lim_{t \to 1^-} \int_0^1 \left\{ \left[\frac{k(\varkappa_-(t)\zeta)}{k(\varkappa_-(t))} \right]^{1/2} - 1 \right\}^2 d\zeta = 0 \tag{9.30′}$$

(чтобы из (9.30) получить (9.30′) достаточно воспользоваться равенством (9.28) и, учитывая (9.27), сделать обратное преобразование $\mu(t) \to t$). Отметим, что условию (9.26) удовлетворяют коэффициенты k из четвертой и пятой строк таблицы 15, а при $\alpha > 1$ также из второй и третьей строк. Рассмотрим теперь следующий

Пример 17. Пусть $k(u) = \ln(1+u) \ln^2 \ln(3+u)$. Условие (9.26) при этом выполняется и, как следует из (9.28),

$$\mu(\tau) \cong 1 - \frac{1}{\ln \tau}, \quad \tau \to +\infty,$$

т. е.

$$\mu^{-1}(t) \cong \exp[(1-t)^{-1}], \quad t \to 1^-.$$

Поэтому из теоремы 9.3 следует, что граничный режим с обострением

$$\varkappa_-(t) \cong \exp\{\exp[(1-t)^{-1}]\}, \quad t \to 1^-,$$

порождает решение с постоянной (при $t \to 1^-$) полушириной.

2.2. Приближенные автомодельные решения типа III.

Теорема 9.4. *Пусть выполняются условия* (9.1), (9.2) *и пусть при всех t, достаточно близких к* 1^-,

$$\varkappa_-(t) = (1-t)^n k^n[(1-t)^n], \quad n < -1/4. \tag{9.31}$$

Тогда

$$\varphi(t) = (1-t)^{1/2} k^{1/2}[(1-t)^n], \quad t \to 1^-, \tag{9.32}$$

$\theta_a(\xi) \equiv f_3(\xi)$ *и справедливо предельное равенство* (9.29).

Замечание 1. Неограниченность и монотонность режима (9.31) при $t \to 1^-$ вытекают из леммы 9.1.

Замечание 2. Ограничение $n < -1/4$ в (9.31) фактически связано с необходимостью включения $f_3 \in L^2(\mathbf{R}^1_+)$. Поскольку [4]

$$f_3(\xi) \cong \frac{\Gamma(1/2 - n)}{2^{2n} \pi^{1/2}} \xi^{2n}, \quad \xi \to +\infty,$$

при $n \in [-1/4, 0)$ оно не имеет места.

Отметим, что в условиях теоремы 9.4 $\varphi(t)\to 0$, $t\to 1^-$. Поэтому пространственно-временная структура п. а. р. (9.9) указывает на то, что решение $u(t, x)$ неограниченно возрастает при $t\to 1^-$ только в одной точке $x=0$. Это означает (см. [6], [8], [9]), что в задаче (1)—(3′) существует локализация тепла и (9.31) является LS-режимом с обострением.

§ 10. Приближенные автомодельные решения уравнений с коэффициентами «почти» степенного вида

В этом параграфе строятся п. а. р. уравнений 1 с коэффициентами k, удовлетворяющими следующему условию:

$$\left[\frac{k(u)}{k'(u)}\right]' \to \frac{1}{\sigma},\ u\to+\infty;\ \sigma=\mathrm{const}>0 \tag{10.1}$$

(отметим, что при $\sigma=0^+$ (10.1) совпадает с (9.1)). Мы также будем предполагать, что

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{k(\xi u)}{\xi^\sigma k(u)}=1,\ \xi\in(0,1). \tag{10.2}$$

Кроме того, функцию $k(\xi u)/\xi^\sigma$ будем считать ограниченной при $\xi\to 0^+$ для всех $u>0$. Перечисленным требованиям удовлетворяют коэффициенты вида $k(u)=u^\sigma\ln^\alpha(2+u)$, $-\infty<\alpha<+\infty$; $k(u)=u^\sigma\exp[\ln^\alpha(1+u)]$, $0<\alpha<1$; $k(u)=u^\sigma\exp[\ln(1+u)/\ln\ln(3+u)]$ (см. также таблицы 6 и 7 в [1]).

П. а. р. рассматриваемых краевых задач (1)—(3) и (1)—(3′) будут построены на основе точных автомодельных решений уравнения со степенной нелинейностью

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{10.3}$$

которые имеют вид

А. $$u_A(t,x)=(1+t)^m g_1(\zeta),\ \zeta=\frac{x}{(1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}}};\ m=\mathrm{const}>0; \tag{10.4}$$

Б. $$u_A(t,x)=\exp t\, g_2(\zeta),\ \zeta=\frac{x}{\exp\left(\frac{\sigma}{2}t\right)}; \tag{10.5}$$

В. $$u_A(t,x)=(1-t)^n g_3(\zeta),\ \zeta=\frac{x}{(1-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}}};\ n=\mathrm{const}<0 \tag{10.6}$$

(решение (10.6) растет при $t\to 1^-$ в режиме с обострением). Конкретный вид функций g_1, g_2 и g_3, удовлетворяющих краевым условиям

$$g_i(0)=1,\ g_i(+\infty)=0;\ i=1,2,3,$$

определяется из обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных после подстановки выражений u_A в (10.3) (см., например, [1], [2]).

В каждом из рассматриваемых случаев п. а. р. будем искать в виде (9.9) и через $\theta(t, \xi)$ (см. (9.10)) обозначим соответствующее автомодельное представление решения $u(t, x)$ исходной задачи. Сходимость $\theta(t, \xi)\to\theta_a(\xi)$ при $t\to+\infty$ или $t\to 1^-$ будем определять в норме гильбертова пространства $H^{-1}(\mathbf{R}^1_+)$ (см. [1], [5]). В связи с этим всюду в дальнейшем будем считать, что $u(t, \cdot)\in H^{-1}(\mathbf{R}^1_+)$ при всех допустимых значениях $t\geqslant 0$. Норму в $H^{-1}(\mathbf{R}^1_+)$ обозначим через $\|\ \|_{-1}$.

Нам понадобится следующее утверждение, справедливость которого проверяется непосредственно.

Лемма 10.1. *Пусть коэффициент* $k \in C^2((0, +\infty)) \cap C([0, +\infty))$ *удовлетворяет условию* (10.1). *Фиксируем произвольное* $\alpha \in (0, \sigma]$. *Тогда при всех достаточно больших* $u > 0$ *выполняются неравенства*

$$u^{\sigma-\alpha} < k(u) < u^{\sigma+\alpha}. \tag{10.7}$$

1. Граничные режимы без обострения. В этом пункте рассматривается задача (1)—(3).

1.1. Приближенные автомодельные решения типа А.

Теорема 10.1. *Пусть выполняются условия* (10.1), (10.2) *и пусть при всех достаточно больших* $t > 0$

$$\varkappa_+(t) = (1+t)^m \{(1+t)^{-m\sigma} k[(1+t)^m]\}^m, \quad m > 0. \tag{10.8}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \{(1+t)^{\frac{1}{2}} (1+t)^{-m\sigma} k[(1+t)^m]\}^{\frac{1+m\sigma}{2}}, \quad t > 0, \tag{10.9}$$

$\theta_a(\xi) \equiv g_1(\xi)$ *и*

$$\lim_{t \to +\infty} \|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_{-1} = 0. \tag{10.10}$$

Замечание 1. Монотонность и неограниченность функции $\varkappa_+(t)$ в (10.8) при $t \to +\infty$ вытекают из (10.1) и леммы 10.1.

Доказательство. Сделаем в уравнении (1) преобразование временной координаты $t \to \mu(t)$, где монотонная гладкая функция μ: $\mathbf{R}^1_+ \to \mathbf{R}^1_+$ такова, что

$$\varkappa_+(\mu(t)) = (1+t)^m, \quad t > 0. \tag{10.11}$$

Тогда

$$\varphi(\mu(t)) = (1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}}, \quad t > 0,$$

и поэтому

$$u_a(\mu(t), x) = (1+t)^m \theta_a(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}}},$$

$$\theta(\mu(t), \xi) = \frac{1}{(1+t)^m} u(\mu(t), \xi(1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}})$$

(отметим, что $u_a(\mu(t), x)$ является автомодельным решением уравнения (10.3)).

Из (1) и (10.3) следует, что функция $w(t, x) = u(\mu(t), x) - u_a(\mu(t), x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu'(t) k(u) \frac{\partial u}{\partial x} - u_a^\sigma \frac{\partial u_a}{\partial x}\right], \tag{10.12}$$

причем $w(t, 0) = w(t, +\infty) = 0$, $w(t, \cdot) \in H^{-1}(\mathbf{R}^1_+)$ при всех $t > 0$. Умножим скалярно обе части уравнения (10.12) на $(-\partial^2/\partial x^2)^{-1} w$. Тогда получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t, x)\|_{-1}^2 = \left(\mu'(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_k(u) - \frac{1}{\sigma+1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_a^{\sigma+1}, \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w\right), \tag{10.13}$$

где $F_k(u) = \int_0^u k(\eta) d\eta$. Правую часть (10.13) запишем в следующем

эквивалентном виде:

$$\mu'(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(F_k(u)-F_k(u_a)),\ \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}w\right)+$$
$$+\left(\mu'(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_k(u_a)-\frac{1}{\sigma+1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_a^{\sigma+1},\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}w\right)=$$
$$=-\mu'(t)(F_k(u)-F_k(u_a),\ u-u_a)+$$
$$+\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}(\mu'(t)k(u_a)-u_a^{\sigma}),\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}w\right).$$

Применяя теперь в последнем члене неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{-1}^2\leqslant\|w\|_{-1}\left\|\frac{\partial u_a}{\partial x}[\mu'(t)k(u_a)-u_a^{\sigma}]\right\|_2,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{-1}\leqslant\left\|\frac{\partial u_a}{\partial x}[\mu'(t)k(u_a)-u_a^{\sigma}]\right\|_2. \tag{10.14}$$

Оценим правую часть (10.14). Имеем

$$\left\|\frac{\partial u_a}{\partial x}[\mu'(t)k(u_a)-u_a^{\sigma}]\right\|_2=\left\{\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial u_a}{\partial x}\right)^2[\mu'(t)k(u_a)-u_a^{\sigma}]^2\,dx\right\}^{1/2}=$$
$$=\left\{\int_0^{+\infty}u_a^{\sigma}\frac{\partial u_a}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u_a;t)\,dx\right\}^{1/2},$$

где через $\Phi(s;t)$ обозначена функция

$$\Phi(s;t)=\int_0^s\left[\mu'(t)\frac{k(\eta)}{\eta^{\sigma}}-1\right]^2\eta^{\sigma}d\eta,$$

определенная при всех $s>0$, $t>0$. Учитывая монотонность по x функции u_a, окончательно имеем

$$\left\|\frac{\partial u_a}{\partial x}[\mu'(t)k(u_a)-u_a^{\sigma}]\right\|_2\leqslant\left\{-\sup_x\left|u_a^{\sigma}\frac{\partial u_a}{\partial x}\right|\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u_a;t)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}=$$
$$=q_a^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{m(\sigma+2)-1}{4}}\Phi^{\frac{1}{2}}((1+t)^m;t),$$

где

$$q_a=\max_{\xi}\left|\theta_a^{\sigma}\frac{d\theta_a}{d\xi}\right|<+\infty.$$

Из (10.14) тогда получаем

$$\|w(t,x)\|_{-1}\leqslant\|w(0,x)\|_{-1}+q_a^{\frac{1}{2}}\int_0^t(1+\tau)^{\frac{m(\sigma+2)-1}{4}}\Phi^{\frac{1}{2}}((1+\tau)^m;\tau)\,d\tau.$$

Поскольку

$$\|w(t,x)\|_{-1}=(1+t)^{m+\frac{3}{4}(1+m\sigma)}\|\theta(\mu(t),\xi)-\theta_a(\xi)\|_{-1},$$

из последнего неравенства выводим оценку

$$\|\theta(\mu(t),\xi)-\theta_a(\xi)\|_{-1}\leqslant\|w(0,x)\|_{-1}(1+t)^{-m-\frac{3}{4}(1+m\sigma)}+$$
$$+q_a^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-m-\frac{3}{4}(1+m\sigma)}\int_0^t(1+\tau)^{\frac{m(\sigma+2)-1}{4}}\Phi^{\frac{1}{2}}((1+\tau)^m;\tau)\,d\tau.$$

Отсюда, раскрывая неопределенность в правой части, получаем

$$\lim_{t\to+\infty}\|\theta(\mu(t),\xi)-\theta_a(\xi)\|_{-1}^2=\frac{q_a^{1/2}}{m+\frac{3}{4}(1+m\sigma)}\lim_{t\to+\infty}\frac{\Phi((1+t)^m;\,t)}{(1+t)^{m(\sigma+1)}}.$$

Из (10.1) и леммы 10.1 следует, что

$$\mu'(t)\cong\frac{(1+t)^{m\sigma}}{k[(1+t)^m]},\quad t\to+\infty,$$

и поэтому

$$\lim_{t\to+\infty}\|\theta-\theta_a\|_{-1}^2=\frac{q_a^{1/2}}{m+\frac{3}{4}(1+m\sigma)}\lim_{t\to+\infty}\int_0^1\left[\frac{k(\zeta t^m)}{\zeta^\sigma k(t^m)}-1\right]^2\zeta^2 d\zeta. \qquad (10.15)$$

В силу предположения (10.2) подынтегральное выражение в (10.15) стремится к нулю при $t\to+\infty$ в любой точке отрезка $\zeta\in[0,1]$. Отсюда $\|\theta(t,\xi)-\theta_a(\xi)\|_{-1}\to 0$ при $t\to+\infty$. Теорема доказана.

Замечание 2. В частном случае $u^{-\sigma}k(u)\to 1$ при $u\to+\infty$, когда можно положить $\mu(t)\equiv 1$, теорема 10.1 доказана в [5].

Замечание 3. При рассматриваемых в теореме 10.1 коэффициентах k и граничных режимах п. а. р. уравнения (1) другим способом построены в [1].

1.2. Приближенные автомодельные решения типа Б.

Теорема 10.2. *Пусть выполняются условия* (10.1), (10.2) *и, кроме того,*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\exp(\sigma\eta)}{k[\exp\eta]}d\eta=+\infty. \qquad (10.16)$$

Пусть при всех достаточно больших $t>0$

$$\varkappa_+(t)=\exp[\mu^{-1}(t)], \qquad (10.17)$$

где через μ^{-1} *обозначена функция, обратная к*

$$\mu(t)=\int_0^t\frac{\exp(\sigma\eta)}{k[\exp\eta]}d\eta,\quad t>0 \qquad (10.18)$$

(*в силу* (10.16) μ^{-1} *определена при всех* $t>0$).

Тогда

$$\varphi(t)=\exp\left\{\frac{\sigma}{2}\mu^{-1}(t)\right\},\quad t>0, \qquad (10.19)$$

$\theta_a(\xi)\equiv g_2(\xi)$ *и справедливо равенство* (10.10).

Замечание. Условие (10.16) (вместе с (10.1) и (10.2)) обеспечивает принадлежность п. а. р., полученного из (10.5) в результате трансформации коэффициента $u^\sigma\to k(u)$, к классу функций, определенных при всех $t>0$.

Сформулированная теорема доказывается так же, как предыдущая. Для иллюстрации ее возможностей рассмотрим следующий

Пример 18. Пусть $k(u)=u^\sigma\ln(2+u)$. Условия (10.1), (10.2) и (10.16) здесь выполняются и, как следует из (10.18),

$$\mu(t)\cong\ln t,\quad \mu^{-1}(t)\cong\exp t,\quad t\to+\infty.$$

Тогда из теоремы получаем, что граничный режим (см. (10.17))

$$\varkappa_+(t) \cong \exp\ (\exp t),\ t \to +\infty,$$

приводит к образованию волны, движущейся при $t \to +\infty$ по закону

$$x_{эф}(t) \cong \xi^* \exp\left(\frac{\sigma}{2} \exp t\right).$$

Здесь $\xi^* \in \mathbf{R}^1_+$ такова, что $g_2(\xi^*) = 1/2$.

2. Граничные режимы с обострением. Ниже будет рассматриваться задача (1)—(3′) с заданным при $x=0$ режимом с обострением.

2.1. Приближенные автомодельные решения типа Б.

Теорема 10.3. *Пусть выполняются условия* (10.1), (10.2) *и, кроме того,*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(\sigma\eta)}{k[\exp\eta]}\, d\eta < +\infty. \tag{10.20}$$

Пусть при всех t, достаточно близких к 1^-,

$$\varkappa_-(t) = \exp\left[\mu^{-1}(t)\right], \tag{10.21}$$

где μ^{-1}: $(0,\ 1) \to \mathbf{R}^1_+$ — функция, обратная к монотонно возрастающей функции $\mu(\tau)$: $\mathbf{R}^1_+ \to (0,\ 1)$, определяемой при достаточно больших $\tau > 0$ по формуле

$$\mu(t) = 1 - \int_\tau^{+\infty} \frac{\exp(\sigma\eta)}{k[\exp\eta]}\, d\eta \tag{10.22}$$

(из (10.20) *следует, что $\mu^{-1}(t) \to +\infty$ при $t \to 1^-$).*

Тогда

$$\varphi(t) = \exp\left\{\frac{\sigma}{2}\mu^{-1}(t)\right\},\ t \in (0, 1), \tag{10.23}$$

$\theta_a(\xi) \equiv g_2(\xi)$ *и*

$$\lim_{t \to +\infty} \|\theta(t, \xi) - \theta_a(\xi)\|_{-1} = 0. \tag{10.24}$$

Замечание. Из (10.23) следует, что в условиях теоремы граничный закон (10.21) приводит к отсутствию локализации в задаче (1)—(3′) и поэтому является HS-режимом.

В процессе доказательства теоремы, которое аналогично доказательству теорему 10.1, устанавливается справедливость следующей оценки:

$$\|\theta(\mu(t), \xi) - \theta_a(\xi)\|_{-1} \leqslant \|w(0, x)\|_{-1} \exp\left[-\left(1 + \frac{3\sigma}{4}\right)t\right] +$$

$$+ q_a^{1/2} \exp\left[-\left(1 + \frac{3\sigma}{4}\right)t\right] \int_0^t \exp\left[\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)\frac{\tau}{2}\right] \times$$

$$\times \left\{\int_0^{\exp\tau} \left[\mu'(\tau)\frac{k(\eta)}{\eta^\sigma} - 1\right]^2 \eta^\sigma\, d\eta\right\}^{1/2} d\tau,\ t \to +\infty,$$

из которой в силу равенства

$$\mu'(t) = \frac{\exp(\sigma t)}{k[\exp t]}, \quad t \to +\infty,$$

и условия (10.2) получаем

$$\lim_{t\to+\infty} \|\theta(t,\xi) - \theta_a(\xi)\|^2_{-1} = q_a \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \left[\frac{k(\varkappa_-(t)\zeta)}{\zeta^\sigma k(\varkappa_-(t))} - 1\right]^2 \zeta^\sigma d\zeta = 0.$$

Пример 19. Пусть $k(u) = u^\sigma \ln^2(1+u)$. Условие (10.20) выполнено, и поэтому из (10.22) получаем

$$\mu(\tau) \cong 1 - \frac{1}{\tau}, \quad \tau \to +\infty, \quad \mu^{-1}(t) \cong (1-t)^{-1}, \quad t \to 1^-.$$

Отсюда граничный режим (см. (10.21))

$$\varkappa_-(t) \cong \exp[(1-t)^{-1}], \quad t \to 1^-,$$

порождает тепловую волну с глубиной проникновения

$$x_{\text{эф}}(t) \cong \xi^* \varphi(t) \cong \xi^* \exp\left[\frac{\sigma}{2}(1-t)^{-1}\right], \quad t \to 1^-.$$

2.2. Приближенные автомодельные решения типа Б.

Теорема 10.4. *Пусть выполняются условия* (10.1), (10.2) *и пусть при всех t, достаточно близких к* 1^-,

$$\varkappa_-(t) = \{(1-t)^{(1-n\sigma)} k[(1-t)^n]\}^n, \quad n < -\frac{3}{3\sigma+4}. \tag{10.25}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \{(1-t)^{(1-n\sigma)} k[(1-t)^n]\}^{\frac{1+n\sigma}{2}}, \quad t \to 1^-, \tag{10.26}$$

$\theta_a(\xi) \equiv g_3(\xi)$ *и справедливо предельное равенство* (10.24).

Замечание 1. То, что (10.25) является режимом с обострением, прямо следует из леммы 10.1.

Замечание 2. Ограничение $n < -3/(3\sigma+4)$ фактически связано с необходимостью включения $\theta_a \equiv g_3 \in H^{-1}(\mathbf{R}^1_+)$. При $n \in [-3/(3\sigma+4), 0)$ оно не имеет места, поскольку (см. [10])

$$g_3(\xi) \cong C\xi^{\frac{2n}{1+n\sigma}}, \quad \xi \to +\infty; \quad C = C(n,\sigma) > 0.$$

Замечание 3. Из (10.26) и леммы 10.1 следует, что свойства решения рассматриваемой задачи существенно зависят от соотношения между величинами σ и n. Так, $\varphi(t) \to +\infty$ при $n < -1/\sigma$, $t \to 1^-$, и поэтому решение неограниченно возрастает при $t \to 1^-$ во всем полупространстве $x \in \mathbf{R}^1_+$ (HS-режим, локализация отсутствует). Напротив, $\varphi(t) \to 0$ при $n > -1/\sigma$, $t \to 1^-$ (LS-режим), и решение локализовано. Значению $n = -1/\sigma$ (S-режим) отвечает локализованное решение с постоянной полушириной $\varphi(t) \equiv 1$. Подставляя в (10.25) $n = -1/\sigma$, получаем, что в условиях (10.1), (10.2) локализованный граничный S-режим имеет вид

$$\varkappa_-(t) \cong \{(1-t)^2 k[(1-t)^{-\frac{1}{\sigma}}]\}^{-\frac{1}{\sigma}}, \quad t \to 1^-,$$

или, что то же самое,

$$\varkappa_-(t) \cong k^{-1}[(1-t)^{-1}], \quad t \to 1^-,$$

где k^{-1} — функция, обратная к k. П. а. р. при $n=-1/\sigma$ имеет вид

$$u_a(t,x)=\varkappa_-(t)\left[\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^+\right]^{\frac{2}{\sigma}},\quad x_0=\left[2\,\frac{\sigma+2}{\sigma}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Пример 2б. Пусть $k(u)=u^\sigma/\ln(2+u)$. Тогда, как следует из (10.25), локализованному решению с постоянной полушириной отвечает следующий граничный режим с обострением (S-режим):

$$\varkappa_-(t)\cong\left\{\frac{1}{\sigma}(1-t)^{-1}\,|\ln(1-t)|\right\}^{\frac{1}{\sigma}},\quad t\to 1^-.$$

§ 11. Приближенные автомодельные решения задачи Коши

В этом параграфе изучается асимптотическое поведение решения задачи Коши для уравнения (1) с начальной функцией (4), обладающей конечной «энергией»

$$E_0=\|u_0\|_{L^1(\mathbf{R}^1)}<+\infty\quad(E_0>0). \tag{11.1}$$

Хорошо известно (см. [11], [12]), что в случае $k\in C^2((0,+\infty))\cap C([0,+\infty))$ существует единственное неотрицательное (быть может, обобщенное) решение задачи (1), (4), причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x)\,dx=E_0\quad\text{при всех}\quad t>0. \tag{11.2}$$

Понятно, что функция $u_m(t)=\max\limits_x u(t,x)$ стремится к нулю при $t\to+\infty$ и поэтому асимптотические свойства решения задачи $u(t,x)$ определяются характером поведения коэффициента $k(u)$ при малых $u>0$.

П. а. р. задачи Коши (1), (4) с коэффициентом $k(u)$, изменяющимся при $u\to 0$ существенно нестепенным образом, будем искать в следующем (привычном для нас) виде:

$$u_a(t,x)=\frac{1}{\varphi(t)}\,\theta_a(\xi),\quad \xi=\frac{x}{\varphi(t)}, \tag{11.3}$$

где $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая положительная функция, $\varphi(t)\to+\infty$, $t\to+\infty$, а четная функция $\theta_a(\xi)\geqslant 0$ ($\theta_a\in L^1(\mathbf{R}^1_+)$) такова, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_a(\xi)\,d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}u_a(t,x)\,dx=E_0. \tag{11.4}$$

Будет показано, что при специальном выборе функций φ и θ_a автомодельное представление $\theta(t,\xi)$ решения $u(t,x)$, определяемое видом соответствующего п. а. р. (11.3)

$$\theta(t,\xi)=\varphi(t)\,u(t,\xi\varphi(t)),\quad t>0, \tag{11.5}$$

сходится при $t\to+\infty$ к функции $\theta_a(\xi)$. Это обеспечивает достаточно хорошее совпадение свойств решения задачи и п. а. р. (11.3) при больших t. Отсюда, например, вытекают следующие асимптотически точные

оценки:

$$u_m(t) = \max_x u(t, x) \cong \frac{\theta_a(0)}{\varphi(t)}, \quad t \to +\infty; \tag{11.6}$$

$$|x_{эф}(t)| \cong |\xi^*| \varphi(t), \quad t \to +\infty \, (|\theta_a(\xi^*)| = 1/2) \tag{11.7}$$

(эффективная глубина проникновения волны $x_{эф}$ определяется при больших t из равенства $u(t, x_{эф}(t)) = u_m(t)/2$).

При доказательстве сформулированных ниже утверждений мы будем пользоваться пространством $H^{-1}(\mathbf{R}^1)$, которое является сопряженным к пространству Соболева $H^1(\mathbf{R}^1)$ [13]. К $H^{-1}(\mathbf{R}^1)$ (точнее к некоторому его подпространству) отнесем все функции $w(x) \in C(\overline{\mathbf{R}}^1) \cap L^1(\mathbf{R}^1)$, удовлетворяющие условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\, dx = 0, \tag{11.8}$$

$$\left| \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} w(y)\, dy \right| < +\infty, \quad \left| \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^x w(y)\, dy \right| < +\infty. \tag{11.9}$$

На указанном множестве функций из $H^{-1}(\mathbf{R}^1)$ обычным образом вводится скалярное произведение

$$\langle v, w \rangle = \left(v, \left(-\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} w \right),$$

где функция $W = \left(-\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} w$ является решением задачи

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = -w, \quad x \in \mathbf{R}^1; \quad |W(\pm\infty)| < \infty. \tag{11.10}$$

Нетрудно убедиться, что в силу (11.8) и (11.9) решение задачи (11.10) существует. Через $\| \ \|_{-1}$ обозначим норму в $H^{-1}(\mathbf{R}^1)$

$$\|w\|_{-1} = \langle w, w \rangle^{1/2} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \left[\left(-\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} w \right](x)\, dx \right\}^{1/2}.$$

Справедливо равенство

$$\|w\|_{-1} = \left\| \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} w \right\|_2 = \left\| \int_x^{+\infty} w(y)\, dy \right\|_2.$$

1. Уравнения с «почти постоянными» коэффициентами. В этом пункте рассматриваются уравнения (1) с коэффициентами k, для которых

$$\left[\frac{k(u)}{k'(u)} \right]' \to +\infty, \quad u \to 0. \tag{11.11}$$

Также будем считать, что

$$\lim_{u \to 0} \frac{k(\xi u)}{k(u)} = 1 \quad \text{при любых } \xi > 0. \tag{11.12}$$

Отметим, что эти условия выполнены при $k(u) \equiv 1$. Некоторые другие коэффициенты, удовлетворяющие (11.11), (11.12), приведены в таблице 16. Считается, что они определены только при достаточно малых $u > 0$.

Таблица 16.

$k(u)$	$\varphi(t)$
$\ln^{-\alpha}\lvert\ln u\rvert,\ \alpha>0$	$\cong t^{\frac{1}{2}}\ln^{-\frac{\alpha}{2}}\ln t$
$\lvert\ln u\rvert^{-\alpha},\ \alpha>0$	$\cong 2^{-\frac{\alpha}{2}}t^{\frac{1}{2}}\ln^{-\frac{\alpha}{2}}t$
$\exp[-\lvert\ln u\rvert^{\alpha}],\ 0<\alpha<1$	$\cong t^{\frac{1}{2}}\exp[-2^{-(\alpha+1)}\ln^{-\alpha}t]$
$u^{-\frac{1}{\ln^{\alpha}\lvert\ln u\rvert}},\quad \alpha>0$	$\cong t^{\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}\ln^{-\alpha}\left(\frac{1}{2}\ln t\right)\right]}$

В рассматриваемом случае п. а. р. будем строить на основе фундаментального (автомодельного) решения линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{11.13}$$

которое имеет вид

$$u_A(t,x)=(1+t)^{-1/2}f_A(\zeta),\ \zeta=\frac{x}{(1+t)^{1/2}}, \tag{11.14}$$

где

$$f_A(\zeta)=\frac{E_0}{(2\pi)^{1/2}}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right),\ \zeta\in\mathbf{R}^1. \tag{11.15}$$

Отметим, что функция (11.14) при всех $t>0$ удовлетворяет условию (11.2).

В дальнейшем будем предполагать, что $u_0(x)=O(\exp(-x^2))$ при $x\to\infty$. Тогда $u(t,x)=o(|x|^{-\lambda})$, $x\to\infty$, при произвольных $\lambda>0$.

Теорема 11.1. *Пусть выполняются условия* (11.11), (11.12) *и начальная функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет* (11.1).

Тогда при всех достаточно больших $t>0$

$$\varphi(t)=(1+t)^{1/2}k^{1/2}[(1+t)^{-1/2}], \tag{11.16}$$

$\theta_a(\xi)\equiv f_A(\xi)$ (*см.* (11.15)) *и*

$$\lim_{t\to+\infty}\|\theta(t,\xi)-\theta_a(\xi)\|_{-1}=0. \tag{11.17}$$

Замечание 1. Из (11.11) следует, что функция $\varphi(t)$ в (11.16) является монотонной и неограниченно возрастает при $t\to+\infty$.

Доказательство. Сделаем в задаче (1), (4) преобразование $t\to\mu(t)$, где монотонную функцию μ: $\overline{\mathbf{R}}_+^1\to\overline{\mathbf{R}}_+^1$ определим из равенства

$$\varphi(\mu(t))=(1+t)^{1/2},\ t>0.$$

Тогда $u(\mu(t),x)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mu'(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

При этом п. а. р. (11.3) преобразуется в функцию (11.14) (т. е. $u_a(\mu(t), x) \equiv u_A(t, x)$).

Положим $w(t, x) = u(\mu(t), x) - u_a(\mu(t), x)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t, x)\, dx = 0, \quad t > 0,$$

и, как нетрудно проверить, в сделанных выше предположениях $w \in H^{-1}(\mathbf{R}^1)$ при всех $t > 0$. Функция w удовлетворяет уравнению (9.17). Умножая скалярно обе части (9.17) на $(-\partial^2/\partial x^2)^{-1} w$ и производя справа необходимые преобразования (см. доказательство теоремы 9.1), получим

$$\frac{d}{dt} \| w \|_{-1} \leqslant \left\| \frac{\partial u_a}{\partial x} [\mu'(t) k(u_a) - 1] \right\|_2 .$$

Отсюда

$$\| w(t, x) \|_{-1} \leqslant \| w(0, x) \|_{-1} + (2q_a)^{\frac{1}{2}} \int_0^t (1 + \tau)^{\frac{-1}{2}} G^{\frac{1}{2}} (\theta_a(0)(1 + \tau)^{-\frac{1}{2}}; \tau)\, d\tau, \tag{11.18}$$

где функция G имеет вид

$$G(s; t) = \int_0^s [\mu'(t) k(\eta) - 1]^2\, d\eta.$$

Учитывая, что

$$\| w(t, x) \|_{-1} = (1 + t)^{1/4} \| \theta(\mu(t), \xi) - \theta_a(\xi) \|_{-1},$$

из (11.18) выводим оценку

$$\| \theta(\mu(t), \xi) - \theta_a(\xi) \|_{-1} \leqslant (1 + t)^{-1/4} \| w(0, x) \|_{-1} + \\ + (2q_a)^{1/2} (1 + t)^{-1/4} \int_0^t (1 + \tau)^{-1/2} G^{1/2} (\theta_a(0)(1 + \tau)^{-1/2}; \tau)\, d\tau. \tag{11.19}$$

Последовательно раскрывая в правой части (11.19) возникающие неопределенности, с помощью (11.12) и асимптотически точной оценки

$$\mu'(t) \cong \frac{1}{k[(1 + t)^{-1/2}]}, \quad t \to +\infty$$

(справедливость ее вытекает из (11.11)), получим

$$\lim_{t \to +\infty} \| \theta(t, \xi) - \theta_a(\xi) \|_{-1}^2 = \\ = 32 q_a \lim_{t \to +\infty} (1 + t)^{1/2} \int_0^{\theta_a(0)(1+t)^{-1/2}} [\mu'(t) k(\eta) - 1]^2\, d\eta = \\ = 32 q_a \lim_{t \to +\infty} \int_0^{\theta_a(0)} \left\{ \frac{k[\zeta(1 + t)^{-1/2}]}{k[(1 + t)^{-1/2}]} - 1 \right\}^2 d\zeta = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Если $k(u) \equiv 1$, то, полагая $\mu'(t) \equiv 1$, из (11.19) получаем следующую оценку скорости сходимости:

$$\| \theta(t, \xi) - f_A(\xi) \|_{-1} \leqslant C_0 (1 + t)^{-1/4} \to 0, \quad t \to +\infty, \\ C_0 = \| u_0(x) - f_A(x) \|_{-1} < +\infty.$$

Она выражает асимптотическую устойчивость автомодельного решения (11.14) линейного уравнения (11.13) относительно возмущений начальной функции. Отметим, что даже в случае $k(u)\equiv 1$ сходимость θ к f_A при $t\to+\infty$ в более сильной норме, например, $L^2(\mathbf{R}^1)$ (как это делалось в § 9) доказать не удается. Действительно, из (линейного) уравнения для разности $w=u-u_A$ нетрудно получить, что $\|w(t, x)\|_2\leqslant\|w(0, x)\|_2$, $t>0$. Отсюда получаем оценку $\|\theta-f_A\|_2\leqslant\|w(0, x)\|_2(1+t)^{1/4}$, которой явно недостаточно для доказательства сходимости. Некоторые другие результаты качественного изучения устойчивости решения (11.14) относительно возмущений начальной функции можно найти в [14], [15].

Для иллюстрации возможностей теоремы 11.1 рассмотрим следующий

Пример 21. Пусть $k(u)=|\ln u|^{-\alpha}$, $u\in(0, 1/2)$, где $\alpha=\mathrm{const}>0$, и $0\leqslant u_0(x)<1/2$. Тогда, поскольку условия (11.11) и (11.12) здесь выполняются, из теоремы 11.1 следует, что (см. (11.16))

$$\varphi(t)\cong 2^{\frac{\alpha}{2}}t^{\frac{1}{2}}\ln^{-\frac{\alpha}{2}}t,\quad t\to+\infty,$$

и поэтому п. а. р. (11.3), к которому сходится решение рассматриваемой задачи, имеет вид

$$u_a(t, x)\cong\left(2^{\alpha+1}\pi\frac{t}{\ln^{\alpha}t}\right)^{-1/2}E_0\exp\left(-\frac{x^2}{2^{\alpha+2}t\ln^{-\alpha}t}\right),$$

где $E_0=\|u_0\|_{L^1(\mathbf{R}^1)}$. Отсюда, например, вытекает такая оценка:

$$\max_x u(t, x)\cong(2^{\alpha+1}\pi)^{-1/2}E_0\left(\frac{\ln^{\alpha}t}{t}\right)^{1/2},\quad t\to+\infty.$$

П. а. р. некоторых других уравнений можно построить, исходя из данных, приведенных в таблице 16.

Замечание 3. Рассмотрим класс «сингулярных» коэффициентов $k(u)$, неограниченно возрастающих ($k(u)\to+\infty$) при $u\to 0^+$ и удовлетворяющих условию

$$\left[\frac{k(u)}{k'(u)}\right]'\to-\infty,\quad u\to 0^+. \tag{11.20}$$

К нему относятся, например, функции $k(u)=\ln^{\alpha}|\ln u|$, $k(u)=|\ln u|^{\alpha}$, $\alpha>0$; $k(u)=\exp[|\ln u|^{\alpha}]$, $0<\alpha<1$ и т. д. Из условия (11.20), в частности, следует, что $k(u)\ll u^{-\alpha}$, $u\to 0^+$ при любых $\alpha>0$. Отсюда функция

$$F_k(u)=\int_0^u k(\eta)\,d\eta$$

определена при всех $u\geqslant 0$ и $F_k(0)=0$. Поэтому в рассматриваемом случае решение задачи Коши (1), (4) существует и единственно (см. [16], [17] и приведенную там библиографию). Более того, из результатов [16] следует, что решение удовлетворяет «закону сохранения» (11.2) (см. также [18], [19]). При этом можно показать, что для всех $t>0$ $u(t, x)=o(|x|^{-\lambda})$, $x\to\infty$ при любых $\lambda>0$.

Таким образом, теорема 11.1 остается справедливой в случае «сингулярных» коэффициентов k, удовлетворяющих условиям (11.20) и (11.12).

2. Уравнения с «почти степенными» коэффициентами. В этом пункте считаются выполненными следующие условия:

$$\left[\frac{k(u)}{k'(u)}\right]' \to \frac{1}{\sigma}, \quad u \to 0^+; \quad \sigma = \text{const} > 0, \tag{11.21}$$

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{k(\xi u)}{\xi^\sigma k(u)} = 1 \text{ при любых } \xi > 0. \tag{11.22}$$

Этим условиям [15] удовлетворяет $k(u) = u^\sigma$, а также коэффициенты $k(u) = u^\sigma \ln^\alpha |\ln u|$, $k(u) = u^\sigma |\ln u|^\alpha$, $-\infty < \alpha < +\infty$; $k(u) = u^\sigma \exp[\pm |\ln u|^\alpha]$, $0 < \alpha < 1$, и т. д.

П. а. р. будем строить на основе хорошо известного [20], [15] автомодельного решения типа «мгновенного точечного источника» уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{11.23}$$

Оно имеет вид

$$u_A(t, x) = (1+t)^{-\frac{1}{\sigma+2}} f_A(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(1+t)^{\frac{1}{\sigma+2}}}, \tag{11.24}$$

где

$$f_A(\xi) = \left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}(\xi_0^2 - \xi^2)^+\right]^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \xi \in \mathbf{R}^1, \tag{11.25}$$

и постоянная ξ_0 вычисляется по формуле

$$\xi_0 = \left[\frac{2(\sigma+2)}{\sigma}\right]^{\frac{1}{\sigma+2}} \left[\frac{\sigma}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)} E_0\right]^{\frac{\sigma}{\sigma+2}}. \tag{11.26}$$

При таком выборе величины ξ_0 функция (11.24) удовлетворяет «закону сохранения» (11.2).

В дальнейшем для простоты функцию $u_0(x)$ в (4) будем считать финитной. Тогда из (11.21) и результатов работы [11] следует, что $\operatorname{mes} \operatorname{supp} u(t, x) < +\infty$ при любых $t > 0$.

Теорема 11.2. *Пусть выполняются условия* (11.21), (11.22) *и начальная функция* u_0 *удовлетворяет* (11.1).

Тогда при всех достаточно больших $t > 0$

$$\varphi(t) = (1+t)^{\frac{1}{\sigma+2}} \left[\frac{k\left((1+t)^{-\frac{1}{\sigma+2}}\right)}{(1+t)^{-\frac{\sigma}{\sigma+2}}}\right]^{\frac{1}{\sigma+2}}, \tag{11.27}$$

$\theta_\alpha(\xi) \equiv f_A(\xi)$ (*см.* (11.25)) *и выполняется предельное равенство* (11.17).

Доказательство сформулированной теоремы проводится в принципе тем же способом, что и предыдущей. Определяя монотонную функцию μ: $\overline{\mathbf{R}}_+^1 \to \overline{\mathbf{R}}_+^1$ из равенства

$$\varphi(\mu(t)) = (1+t)^{\frac{1}{\sigma+2}}, \quad t > 0, \tag{11.28}$$

из уравнения для разности $w(t, x) = u(\mu(t), x) - u_a(\mu(t), x)$ (отметим, что $u_a(\mu(t), x)$ в точности совпадает с автомодельным решением

[15] По-видимому (11.22) является следствием (11.21).

(11.24)) получим оценку (см. доказательство теоремы 10.1)

$$\|w(t,x)\|_{-1} \leqslant \|w(0,x)\|_{-1} + (2q_a)^{\frac{1}{2}} \int_0^t (1+\tau)^{-\frac{1}{2}} \Phi^{\frac{1}{2}} (\theta_a(0)(1+\tau)^{-\frac{1}{\sigma+2}}; \tau)\, d\tau, \tag{11.29}$$

где $q_a = \max |\theta_a{}^\sigma \theta_a{}'| < +\infty$ и функция Φ имеет вид

$$\Phi(s;t) = \int_0^s \left[\mu'(t)\frac{k(\eta)}{\eta^\sigma} - 1\right]^2 \eta^\sigma\, d\eta, \quad s > 0.$$

Из (11.29) вытекает следующая оценка:

$$\|\theta(\mu(t),\xi) - \theta_a(\xi)\|_{-1} \leqslant \|w(0,x)\|_{-1}(1+t)^{-\frac{1}{2(\sigma+2)}} +$$
$$+ (2q_a)^{\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2(\sigma+2)}} \int_0^t (1+\tau)^{-\frac{1}{2}} \Phi^{\frac{1}{2}} (\theta_a(0)(1+\tau)^{-\frac{1}{\sigma+2}}; \tau)\, d\tau. \tag{11.29'}$$

Далее для доказательства сходимости используется предположение (11.22), а также вытекающее из (11.21), (11.28) асимптотически точное равенство $\mu'(t) \cong \dfrac{(1+t)^{-\frac{\sigma}{\sigma+2}}}{k[(1+t)^{-\frac{1}{\sigma+2}}]}, \quad t \to +\infty.$

Тогда, переходя в (11.29′) к пределу при $t \to +\infty$, получаем $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\theta(\mu(t),\xi) -$

$$- \theta_a(\xi)\|_{-1}^2 = 8q_a(\sigma+2)^2 \lim_{t\to+\infty} \int_0^{\theta_a(0)} \left[\frac{k(\zeta t^{-\frac{1}{\sigma+2}})}{\zeta^\sigma k(t^{-\frac{1}{\sigma+2}})} - 1\right]^2 \zeta^\sigma\, d\zeta = 0.$$

Замечание 1. Если $k(u) \equiv u^\sigma$ $(\sigma > 0)$, то, полагая $\mu'(t) \equiv 1$, из (11.29) получим следующую оценку:

$$\|\theta(t,\xi) - f_A(\xi)\|_{-1} \leqslant C_0(1+t)^{-\frac{1}{2(\sigma+2)}} \to 0, \quad t \to +\infty,$$
$$C_0 = \|u_0(x) - f_A(x)\|_{-1} < +\infty, \tag{11.30}$$

которая характеризует асимптотическую устойчивость автомодельного решения (11.24) уравнения (11.23) относительно возмущений начальной функции. Качественное исследование устойчивости этого автомодельного решения (в том числе в многомерном случае) проводилось в [14], [21].

Замечание 2. В условиях, близких к предположениям теоремы 11.2, сходимость $\theta(t,\xi)$ к $\theta_a(\xi)$ при $t \to +\infty$ в норме $C(\mathbf{R}^1)$ доказана в работе [22] другим, более сложным способом. Отметим, что методика доказательства, представленного в [22], не позволяет получить важную с физической точки зрения оценку скорости сходимости. Укажем также близкую [22] работу [18], в которой установлена устойчивость автомодельного решения типа (11.24) многомерного аналога уравнения (11.23).

Для иллюстрации теоремы 11.2 рассмотрим следующий

Пример 22. Пусть $k(u) = u^\sigma |\ln u|$, $u \in (0, 1/2)$ и $0 \leqslant u_0(x) < 1/2$. Тогда из (11.27) следует, что функция $\varphi(t)$ в выражении (11.3) имеет вид

$$\varphi(t) \cong \frac{1}{\sigma+2} t^{\frac{1}{\sigma+2}} \ln t, \quad t \to +\infty,$$

и поэтому, например,

$$\max_x u(t, x) \cong (\sigma+2) \left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \xi_0^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}} t^{-\frac{1}{\sigma+2}} \ln^{-1} t, \quad t \to +\infty.$$

Замечание 3. Утверждение теоремы 11.2 остается справедливым в случае «сингулярных» коэффициентов $k(u)$, неограниченно возрастающих при $u \to 0^+$ и удовлетворяющих условию (11.21) при отрицательном значении $\sigma \in (-1, 0)$. Решение задачи Коши (1), (4) тогда существует, единственно и подчиняется «закону сохранения» (11.2) (см. [16]—[19]). П. а. р. здесь строятся на основе инвариантного решения (11.24), где функция f_A имеет вид

$$f_A(\xi) = \left[-\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} (\xi_0^2 + \xi^2) \right]^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \xi \in \mathbf{R}^1. \tag{11.31}$$

Постоянная $\xi_0 > 0$ определяется из условия «энергетической» нормировки. Отметим, что функция (11.31) существует и является ограниченной при любых отрицательных $\sigma > -2$ (при «критическом» значении $\sigma = -2$ уравнение (11.23) (и только оно) инвариантно относительно преобразований Ли — Бэклунда и сводится к линейному уравнению теплопроводности [23]). Нетрудно показать, что для проведения доказательства сходимости по используемой выше схеме достаточно, чтобы $\sigma > -4/3$. Это следует из характера поведения функции (11.31) при $\xi \to \infty$. При $\sigma \leqslant -1/3$ необходимое включение $u - u_a \in H^{-1}(\mathbf{R}^1)$, вообще говоря, отсутствует (отметим, что при $\sigma = -4/3$ квазилинейное уравнение (11.23) допускает самую широкую (пятипараметрическую) группу Ли точечных преобразований [24]).

§ 12. Заключение

В работах [1]—[3] показано, что в зависимости от величины предела $b_k = \lim\limits_{u \to +\infty} \left[\frac{k(u)}{k'(u)} \right]'$ асимптотическое поведение решений уравнений (1) с достаточно произвольной нелинейностью описываются преобразованными инвариантными (автомодельными) решениями трех типов уравнений, которые, вообще говоря, отличны от исходного. Типы уравнений, а также «законы» преобразования их инвариантных решений, существенно различаются в случаях $b_k = 1/\sigma \in \mathbf{R}_+^1$ [1], $b_k = \infty$ [2] и $b_k = 0$ [3]. В первом и третьем случаях «определяющими» являются уравнения соответственно со степенной и экспоненциальной нелинейностями. Автомодельные решения этих уравнений хорошо известны (см. библиографию в [1]). Тот факт, что с их помощью удастся описать асимптотическое поведение решений широкого класса уравнений типа (1) с достаточно произвольными граничными режимами, свидетельствует об эффективности групповых методов исследования процессов нелинейной диффузии. Эти методы позволяют, в частности, найти все виды частных решений, инвариантных относительно некоторых групп преобразований (например, группы Ли [24] или Ли — Бэклунда [23]). Исследование таких решений сводится к анализу обыкновенных дифференциальных уравнений. Разумеется, при этом необходимо сначала определить вид искомых преобразований, ко-

торые переводят упомянутые инвариантные решения в соответствующие (желательно полные) системы п. а. р., а затем строго обосновать законность этих преобразований, т. е. доказать сходимость к п. а. р., построенным этим способом. Такое исследование проведено в [1], [3].

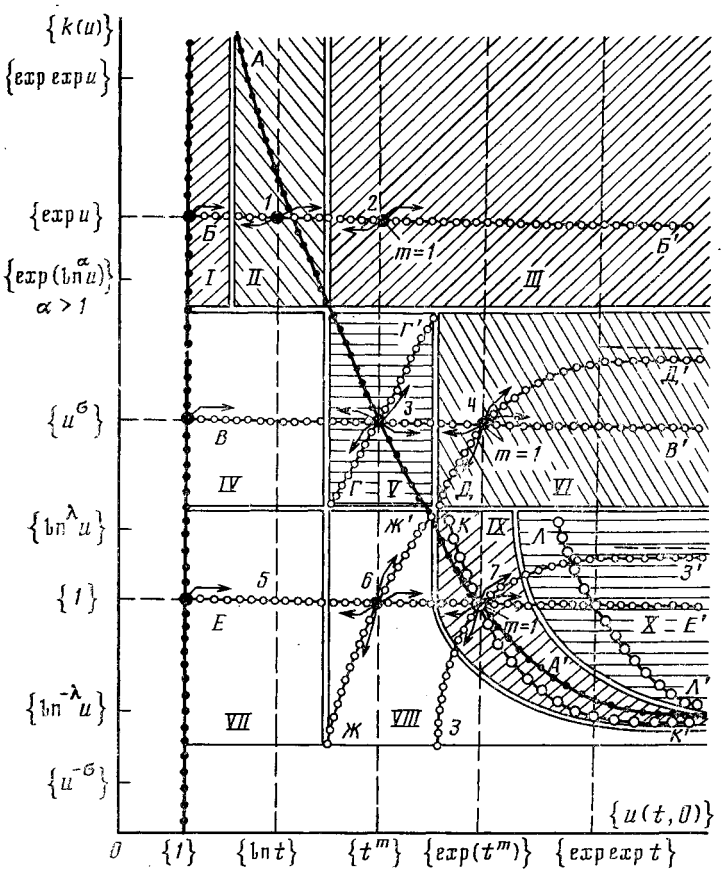
Довольно любопытная ситуация возникает в случае $b_k=\infty$ (она реализуется, например, при $k(u)=\ln^\lambda(1+u)$, $\lambda>0$). В [2] показано, что здесь замкнутые системы п. а. р. строятся на основе инвариантных решений нелинейного уравнения первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k(u)}{u+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{12.1}$$

Подчеркнем, что при $b_k=0$ уравнение (1) с коэффициентом $k\not\equiv 1$ не имеет никаких подходящих инвариантных решений (за исключением довольно специфического решения типа «бегущей волны»). Поэтому здесь групповой анализ уравнения (1) не может привести к нужному результату, поскольку здесь вместо (1) необходимо исследовать совсем другое уравнение (12.1). Надо сказать, что случай $b_k=\infty$ является наиболее сложным. Например, как показано в настоящей работе, здесь существуют также различные «ветви» невырожденных п. а. р., строящихся на основе автомодельных решений линейного уравнения теплопроводности, а при $k(u)\equiv 1$ полные системы п. а. р. можно построить двумя различными способами (см. [2]).

В целях систематизации полученных результатов ниже приводится схематическое изображение «плоскости рассматриваемых краевых задач». Оно довольно наглядно показывает соотношение между точными инвариантными решениями уравнения (1) и п. а. р., удовлетворяющими обычным граничным режимам (такую же «плоскость» можно изобразить и в случае граничных режимов с обострением). На рисунке по оси абсцисс откладываются классы граничных режимов, упорядоченных по характеру роста функций $u(t, 0)$ при $t\to+\infty$. Вдоль оси ординат отложены упорядоченные по тому же принципу (по характеру роста при $u\to+\infty$) классы коэффициентов теплопроводности $k(u)$. Каждой точке плоскости $(\{u(t, 0)\}, \{k(u)\})$ ставится в соответствие некоторый класс решений задач (1)—(3), точнее, класс асимптотических пространственно-временных распределений, отвечающих этим решениям (известно, что их вид практически не зависит от начальной функции $u_0(x)$). Например, точке с координатами $(\{t^m\}, \{u^\sigma\})$ отвечает класс автомодельных решений вида $u_A=t^m f_A(x/t^{(1+m\sigma)/2})$ уравнения со степенным коэффициентом $k(u)=u^\sigma$ при произвольных значениях параметров $m>0$ и $\sigma>0$. Наличие в фиксированной точке плоскости какого-либо точного инвариантного решения или п. а. р. полностью определяет асимптотические свойства решений всех задач (1)—(3) с данными $u(t, 0)$ и $k(u)$. Цель проведенного исследования состояла в возможно полном «покрытии» «плоскости краевых задач» различными п. а. р. (поскольку, как видно из рисунка, точные инвариантные решения существуют в весьма редких случаях). Области, которым отвечают построенные более или менее полные системы п. а. р., отмечены на рисунке штриховкой. Некоторые «ветви» п. а. р. указаны отдельно.

Дадим краткое описание «плоскости». Вертикальной линии $\{u(t, 0)\}=\{1\}$ отвечает «ветвь» точных автомодельных решений уравнения (1) вида $u_A=f_A(x/t^{1/2})$, «ветвь» A—A' — «след» автомодельных ре-



«Плоскость краевых задач» (1)—(3).
● ● — инвариантные (автомодельные) решения уравнения (1); ○ ○ — п. а. р.; ● — инвариантные решения, порождающие системы п. а. р. (отдельные порождаемые «ветви» п. а. р. указаны стрелками); ○ — инвариантные решения уравнения первого порядка (12.1), порождающие полные системы п. а. р.

шений типа «бегущей волны» $u_A = f_A(x-t)$. Эти решения образуют «ветви», поскольку существуют при произвольных $k(u)$ (см. § 1).

Решение 1 — это $u_A = m \ln t + f_A(x/t^{(1+m)/2})$, 2—$u_A = t + f_A(x/\exp(t/2))$; прямая *Б—Б'* ($\{k(u)\} = \{\exp u\}$) — полная система п. а. р. уравнения $u_t = (\exp u\, u_x)_x$ (§ 7).

Решение 3 — $u_A = t^m f_A(x/t^{(1+m\sigma)/2})$, 4—$u_A = \exp t\, f_A(x/\exp(\sigma t/2))$ (см. § 1); прямая *В—В'* — полная система п. а. р. уравнения $u_t = (u^\sigma u_x)_x$ (§ 2); «ветви» п. а. р. *Г—Г'*, *Д—Д'* указаны в § 10 (теоремы 10.1, 10.2).

Решение 5—$u_A = \ln t + f_A(x/t^{1/2})$, 6— $u_A = t^m f_A(x/t^{1/2})$, 7—$u_A = \exp t\, f_A(x)$ (см. § 5); прямая *Е—Е'* — полная система п. а. р. уравнения $u_t = u_{xx}$ (§ 5), «ветвь» *Ж—Ж'* построена в § 9 (теорема 9.1), *З—З'* — в § 9 (теорема 9.2), «ветви» п. а. р. *К—К'* и *Л—Л'*, удовлетворяющих уравнению (12.1), указаны в § 4 (на их основе в § 4 строятся полные системы п. а. р. в областях IX и X).

Достаточно «разветвленные» системы п. а. р. пока не построены в областях IV, VII и VIII, где необходимо дополнительное исследование.

В результате замены $t \to (T-t)^{-1}$, $m \to n < 0$ в обозначениях на оси $\{u(t, 0)\}$ приведенная схема преобразуется в «плоскость краевых задач» (1)—(3′), отвечающих граничным режимам с обострением. При этом

точные инвариантные решения 2 и 4 будут отсутствовать (их заменят соответствующие п. а. р.), на рисунке также не будет «ветви» A—A' инвариантных решений типа «бегущей волны».

В заключение отметим, что системы п. а. р. могут быть построены для других уравнений нелинейной диффузии, например, в случае, когда коэффициент теплопроводности k зависит от градиента решения u_x.

Литература

1. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I.— Матем. сб., 1982, т. 118(160), с. 292—322.
2. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. II.— Матем. сб., 1982, т. 118(160), с. 435—455.
3. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. III.— Матем. сб., 1983, т. 120(162), с. 3—21.
4. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянной теплопроводностью. Препринт № 28, М.: ИПМ АН СССР, 1979.
5. *Галактионов В. А.* О приближенных автомодельных решениях уравнений типа нелинейной теплопроводности.— Дифф. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1660—1676.
6. *Самарский А. А.* О новых методах исследования асимптотических свойств параболических уравнений.— Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1981, т. 158, с. 153—162.
7. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений.— ЖВМ и МФ, 1979, т. 19, № 6, с. 1451—1461.
8. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Локализация тепла в нелинейных средах.— Дифф. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1826—1841.
9. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.— В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217—243.
10. *Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— ДАН АН СССР, 1975, т. 223, № 6, с. 1344—1347.
11. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу-Юй-Линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации.— Изв. АН СССР. Серия матем., 1958, т. 22, с. 667—704.
12. *Фридман А.* Уравнения в частных производных параболического типа. М.: Мир, 1968.
13. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
14. *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И.* Об асимптотических свойствах автомодельных решений уравнений нестационарной фильтрации газа.— ДАН АН СССР, 1958, т. 118, № 4, с. 671—674.
15. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
16. *Benilan P., Crandall M. G.* The continuous dependence on of solutions for $u_t-(u)=0$.— Indiana Univ. Math. J., 1981, v. 30, p. 161—177.
17. *Brezis H., Crandall M. G.* Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t-(u)=0$.— J. Math. Pure Appl., 1979, v. 58, p. 153—163.
18. *Friedman A., Kamin S.* The asymptotic behavior of gas in an n-dimensional porous medium.— Trans. Amer. Math. Soc., 1980, v. 262, p. 551—563.
19. *Aronson D. G., Benilan P.,* Régularité des solutions de l'equation des milieux poreux dan R^N.— Comp. Rendus Acad. Sci. Paris, 1979, v. 288, sect. A, p. 103—105.
20. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.— В кн.: Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950, с. 61—71.
21. *Андрианкин Э. И., Рыжов О. С.* Распространение тепловой волны, близкой к сферической.— ДАН СССР, 1957, т. 115, № 5, с. 882—885.
22. *Kamin S.* Similar solutions and the asymptotics of filtration equations.— Arch. Rat Mech. Anal., 1976, v. 60, p. 171—183.
23. *Bluman G., Kumei S.* On the remarkable nonlinear diffusion equation $(u/x)a(u+b)^{-2}(u/x)-(u/t)=0$.— J. Math. Phys., 1980, v. 21, p. 1019—1023.
24. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности.— ДАН АН СССР, 1959, т. 125, № 3, с. 492—495.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
20.IX.1982