28
ПРЕПР
Д-27

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша,
Академии Наук СССР

В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов,
А.А. Самарский.

ДЕЙСТВИЕ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ С ОБОСТРЕНИЕМ НА СРЕДУ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

Препринт № 28 за 1979 г.

Москва.

A B S T R A C T

The problem of the action of aggravation regimes on the continious medium with constant coefficient of heat conduction is investigated. It is shown that effect of localization ("inertia") of heat exists as well as in nonlinear case. The class of localisating regimes and the dynamics of process of heat conduction are determined. The analysis is made by three methods: the investigation of intsgral representation of the solution of the problem, the investigation of the solutions of the specific "degenerate" equation and the investigation by means of numerical calculations.

It is shown that localization of heat exists in multidimensional case. Some possible formes of localization domain are determined.

Key words and phrases: integral representation, "degenerate" equation, localization of heat.

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

Введение 7

§ I. Классификация граничных режимов с обострением на основе анализа предельных распределений температуры 11

I.I. Постановка задачи и основные определения 11

I.2. Определение класса локализованных и нелокализованных граничных режимов 12

I.3. Различные виды предельных кривых 14

I.4. Вторая краевая задача 18

§ 2. Анализ однопараметрического семейства степенных режимов с обострением 22

2.I. Постановка автомодельной задачи 22

2.2. Существование и единственность автомодельного решения 23

2.3. Сравнение автомодельного и неавтомодельного решений 24

2.4. Динамические свойства степенного LS-режима 27

§ 3. Анализ однопараметрического семейства экспоненциальных режимов с обострением 33

3.I. Постановка усеченной автомодельной задачи 33

3.2. Существование и единственность решения усеченной задачи 35

3.3. "Выход" на автомодельное решение усеченной задачи 38

3.4. Динамические характеристики экспоненциальных LS , S , HS-режимов 49

§ 4. Форма области локализации в многомерной геометрии 54

4.I. Тепловые потенциалы в многомерном случае 54

4.2. Определение локализации возмущений 57

4.3. Аналитические примеры областей локализации в двумерном случае 59

Литература 65

ВВЕДЕНИЕ

I. Изучаются необычные свойства процессов диффузии на примере задачи о распространении тепла в среде с постоянной теплопроводностью в условиях, когда на границе среды температура или поток тепла растут в так называемом режиме с обострением, то есть обращается в бесконечность за конечное время обострения.

Процессы с обострением, возникающие в среде либо под действием граничных режимов [I - 6], либо из-за наличия в ней объемных источников тепла [7 - IO] и приводящие к метастабильной локализации ("инерции") тепла и горения, ранее подробно изучались при теплопроводности, зависящей от температуры.

В настоящей работе показано, что эффект "инерции" тепла, несмотря на бесконечную скорость распространения возмущений в задачах для уравнения линейной теплопроводности

$$T_t = T_{zz} \tag{I}$$

имеет место и в среде с постоянными теплофизическими свойствами, что значительно расширяет возможность его экспериментального исследования.

Выделен класс граничных режимов с обострением (S и LS-режимов), приводящих к эффективной локализации процесса диффузии тепла в течение времени обострения в области конечных размеров. Это означает, что, несмотря на неограниченное возрастание температуры в зоне локализации и количества поступающей в нее энергии, вне зоны локализации температура и количество тепла ограничены в течение всего процесса.

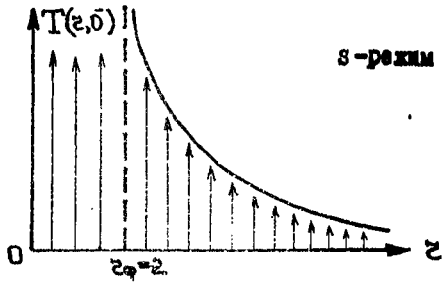
Показано, что при более быстром, чем в S и LS-режимах, нарастании температуры на границе (в так называемом HS-режиме) температура в любой точке среды неограниченно увеличивается и ло-

кализация тепла, также как и в случае режимов без обострения, отсутствует.

2. В § I проведено исследование структуры распределения в пространстве энергии, поступившей в среду в течение всего времени обострения. Из интегрального представления предельного распределения температуры (т.е. значений $T(r,0^-), 0<r<\infty$).
где $t_f = 0$ - момент обострения) выделено однопараметрическое семейство граничных режимов с обострением (n - параметр семейства)

$$T(0,t) = \exp[(-t)^n], n<0, t_0 \leq t<0, \qquad (2)$$

которое в зависимости от величины параметра обеспечивает существование локализации или ее отсутствие (определение эффективной локализации дано в § I). Показано, что в $S(n=-1)$ и LS-режимах ($-I < n < 0$),(см. фиг.I) имеет место локализация тепла и в HS-режиме ($n < -I$) она отсутствует. Аналогичное исследование проведено для второй краевой задачи, когда на границе задан изменяющийся в режиме обострения тепловой поток.



Фиг.I

3. В § 2 изучено воздействие степенных граничных режимов

$$T(0,t) = (-t)^\nu, \nu<0, t_0 \leq t<0 \qquad (3)$$

на среду с постоянной теплопроводностью.

Показано, что автомодельные представления решения задачи (I),

(3) на асимптотической стадии процесса сходятся к автомодельному представлению точных автомодельных решений поставленной задачи. Отсюда получены динамические свойства распространения тепла при $t \to 0^-$, в частности установлено, что эффективная глубина проникновения тепловой волны оценивается по формуле

$$z_{эф}(t) \sim (-t)^{1/2}, \; t \to 0^-. \tag{4}$$

4. В § 3 проведено исследование динамики процесса теплопроводности в задаче (I) - (2). Доказано, что главная часть асимптотики решения задачи при $t \to 0^-$ совпадает с решением усеченного вырожденного уравнения

$$T_t = \frac{T_z^2}{T} \tag{5}$$

с краевым условием (2). Установлено, что эффективная глубина LS, S и HS-режимов изменяется со временем по закону

$$z_{эф}(t) \sim (-t)^{\frac{1-h}{2}}, \; t \to 0^-. \tag{6}$$

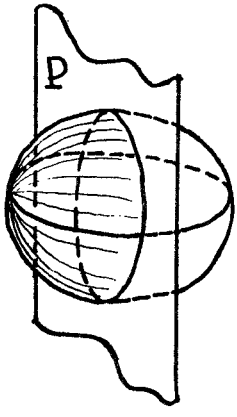
Заметим, что обычно применяемая оценка эффективной глубины проникновения тепловой волны по формуле (4) (она носит размерностный характер) в данном случае не описывает асимптотическую стадию процесса, ее реальное значение при $t \to 0^-$ определяется из (6).

В отличие от нелинейной среды, классификация граничных режимов по наличию или отсутствию локализации не совпадает с классификацией по характеру переноса автомодельных состояний тепловой волны (например, по характеру движения полуширины со временем). Заметим, что для уравнения линейной теплопроводности решению, сохраняющему постоянным автомодельное состояние температуры отвечает фун-

кция, которая развивается не в режиме обострения.

5. В § 5 установлено, что эффект локализации тепла существует в многомерном случае, причем справедливы основные результаты, полученные в одномерной геометрии (зависимость от времени граничного режима, температуры, полуширины).

Так же, как в [4], можно построить области локализации с границами, составленными из плоских поверхностей ("граней"). Показано, что в зависимости от граничных условий область локализации имеет весьма разнообразную форму, в двумерном случае аналитически построены области локализации, границами которых служат любые из кривых второго порядка. В трехмерном случае можно создать на плоскости P (см. фиг.2) такой режим с обострением, который обеспечит неограниченное возрастание температуры внутри некоторого эллипсоида, вне его она будет ограничена в течение всего процесса.



§ I. Классификация граничных режимов с обострением на основе анализа предельных распределений температуры

п.I.I. Постановка задачи и основные определения

Рассмотрим в $Q_0 = \{(t,x): -\infty \leq t_0 \leq t < 0, 0 \leq z < \infty\}$ первую краевую задачу для уравнения

$$T_t = K_0 T_{zz} \tag{I.I}$$

с краевыми условиями

$$T(0,t) = \varphi(t), \quad t_0 \leq t < 0, \tag{I.2}$$

$$T(z,t_0) = 0, \quad 0 < z < \infty. \tag{I.3}$$

Здесь K_0 - некоторая положительная константа, а функция $\varphi(t)$ такова, что

$$\varphi(t) \longrightarrow +\infty, \quad t \longrightarrow 0^-. \tag{I.4}$$

Задача (I.I) - (I.3) описывает распространение тепла ($T(z,t)$ - температура) в среде с постоянной теплопроводностью (K_0 - коэффициент теплопроводности), когда на границе среды $z = 0$ задан закон изменения температуры в режиме с обострением.

Распространение тепла идет в первоначально холодную среду (условие (I.3)), что не является существенным для линейной задачи в силу принципа суперпозиции решений. По той же причине не принципиальным является согласование краевых данных (т.е. условие $\varphi(t_0) = T(0,t_0)$).

Будем считать, что для любого $\tau \in (t_0, 0)$ в $Q_\tau = \{(t,x): t_0 \leq t \leq \tau, 0 \leq z < \infty\}$ существует классическое решение сформулированной задачи [14].

Определение. Будем говорить, что в задаче (I.I) - (I.3) существует метастабильная локализация тепла, если найдется $z_\varphi = const < \infty$ такое, что

(A) для всех $z > z_\varphi$ $\lim\limits_{t \to 0^-} \int\limits_z^\infty T(\eta,t)d\eta < \infty$,

(B) если $z_\varphi > 0$, то для всех $0 \leq z < z_\varphi$ $\lim\limits_{t \to 0^-} T(z,t) = \infty$.

Если $z_\varphi = 0$, то $T(0,t) \to \infty$, $t \to 0^-$ по определению граничного режима с обострением (см. (I.4)).

Величину $z_\varphi \geqslant 0$ будем называть глубиной локализации, а множество $0 \leq z \leq z_\varphi$ областью локализации.

Если же такой z_φ не существует (т.е. как следует из условий (A), (B) $T(z,t) \to \infty$, $t \to 0^-$ для всех $0 \leq z < \infty$), то будем говорить, что локализация тепла в задаче отсутствует.

Отметим, что в задаче (I.I) - (I.3) возмущения распространяются с бесконечной скоростью, то есть для всех $t \in (t_0, 0)$ $mes\, \Omega_0(t) = 0$, где $\Omega_0(t) = \{(t,z) : 0 \leq z < \infty, T(z,t) = 0\}$.

Локализация тепла отражает тот факт, что действие граничного режима (I.2), растущего в режиме с обострением, обеспечивает неограниченное увеличение температуры и быть может количества тепла в конечной области $0 \leq z \leq z_\varphi$. Вне области локализации ($z > z_\varphi$) температура и количество тепла ограничены равномерно по t в течение всего процесса.

п.I.2. Определение класса локализованных и нелокализованных граничных режимов

Решение первой краевой задачи (I.I) - (I.3) представляется в виде потенциала двойного слоя [13]

$$T(z,t) = -2\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial z}\Gamma(z,t-\tau)\varphi(\tau)d\tau, \ (t,z)\in Q_0, \quad (I.5)$$

где $\Gamma(z,\eta)$ - фундаментальное решение оператора линейной теплопроводности

$$\Gamma(z,\eta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_0 \eta}} \exp\left(-\frac{z^2}{4K_0\eta}\right). \quad (I.6)$$

В развернутом виде интегральное представление решения (I.5), (I.6) имеет вид

$$T(z,t) = \frac{z}{2\sqrt{K_0\pi}} \int_{t_0}^{t} \exp\left[-\frac{z^2}{4K_0(t-\tau)}\right] \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}. \quad (I.7)$$

Как следует из определения, локализация тепла или ее отсутствие определяется асимптотическим поведением решения при $t \to 0^-$ Переходя в (I.7) к пределу при $t \to 0^-$ получим интегральное представление решения при $t = 0^-$, которое мы будем называть <u>предельной кривой</u>

$$T(z,0^-) = \frac{z}{2\sqrt{K_0\pi}} \int_{t_0}^{0} \exp\left[-\frac{z^2}{4K_0(-\tau)}\right] \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(-\tau)^{3/2}}, \ 0 \leq z < \infty. \quad (I.8)$$

В тех точках $0 < z < \infty$, в которых интеграл в правой части (I.8) расходится, температура неограниченно возрастает. Если же интеграл сходится, то температура в этих точках ограничена сверху равномерно по t в течение всего процесса (собственно, именно в этом случае существует предельное распределение). Множество точек z таких, что интеграл в (I.8) сходится, будем называть областью определения предельной кривой (I.8) (при фиксированном граничном режиме $\varphi(t)$).

Предельная кривая (I.8) будет использована для выяснения вопроса о том, какие граничные режимы обеспечивают выполнение пунктов

(А) и (В) определения локализации тепла.

Из структуры фундаментального решения (I.6) видно, что границу между локализованными и нелокализованными режимами следует искать в классе экспоненциально растущих при $t \to 0^-$ функций. Поэтому будем исследовать двупараметрическое семейство функций

$$\varphi(t) = T_0(-t)^{\nu} \exp[R_0(-t)^n], \quad t_0 \leq t < 0, \qquad (I.9)$$

где T_0, R_0 - положительные константы, а n, ν - параметры семейства, $-\infty < n \leq 0$, $-\infty < \nu < \infty$.

п.I.3. Различные виды предельных кривых

С помощью интегрального представления для предельной кривой (см. (I.8)) определим характер распределения в пространстве тепла, поступившего в среду за все время процесса нагрева при воздействии на нее граничных режимов (I.9). Подставив (I.9) в (I.8), получим

$$T(z,0^-) = \frac{T_0 z}{2\sqrt{K_0 \pi}} \int_{t_0}^{0} \exp\left[-\frac{z^2}{4K_0(-\tau)} + R_0(-\tau)^n\right] \frac{d\tau}{(-\tau)^{-\nu+3/2}}. \qquad (I.10)$$

С помощью этого выражения определим при каких значениях параметров семейства (I.9) возможна локализация возмущений и при каких она отсутствует.

Существуют в зависимости от параметра n три вида предельных распределений, которые различаются своими областями определения.

I. Пусть $-1 < n \leq 0$. Интеграл в (I.10) существует при всех $0 < z \leq \infty$, то есть температура ограничена во всем полупространстве за исключением граничной точки $z = 0$. Область определения предельной кривой состоит из всего полупространства $0 < z < \infty$.

Условия (А) и (В) выполнены, как следует из (I.10), при всех

$z > 0$, поэтому при $-1 < n \leq 0$ существует метастабильная локализация тепла. Предельную кривую можно в результате преобразования $u = z^2/4K_0(-\tau)$ привести к виду

$$T(z,0^-) = \frac{T_0 z^{2\nu}}{2^{2\nu}\sqrt{\pi}} K_0^{-\nu} \int\limits_{\frac{z^2}{4K_0(-t_0)}}^{\infty} \exp\left[-u + \frac{R_0 z^{2n}}{(4K_0)^n} u^{-n}\right] u^{-\nu-\frac{1}{2}} du, \quad (I.11)$$

откуда получаем асимптотику предельной кривой при $z \to \infty$

$$T(z,0^-) \simeq \frac{T_0(-t_0)^{\nu}}{\sqrt{\pi K_0(-t_0)}} \frac{1}{z} \exp\left[-\frac{z^2}{4K_0(-t_0)}\right].$$

Тепловой поток $W(z,t) = -K_0 T_z(z,t)$ также имеет при $t = 0^-$ предельное распределение, которое определяется из (I.10) или (I.11).

Заметим, что при $n = 0$ должно быть $\nu < 0$, чтобы выполнялось условие (I.4).

2. Пусть $n = -1$. Тогда (I.10) можно записать в виде

$$T(z,0^-) = \frac{T_0 z}{2\sqrt{K_0\pi}} \int\limits_{t_0}^{0} \exp\left[\frac{z_\varphi^2 - z^2}{4K_0(-\tau)}\right] \frac{d\tau}{(-\tau)^{-\nu+3/2}}, \quad (I.12)$$

где введено обозначение

$$z_\varphi = 2\sqrt{K_0 R_0}. \quad (I.13)$$

Из (I.12) получаем, что при $0 \leq z < z_\varphi$ интеграл в правой части расходится, то есть в этой области температура со временем неограниченно возрастает. При $z > z_\varphi$ интеграл сходится и существует предельная кривая

$$T(z,0^-) = \frac{T_0 z^{2\nu}}{2^{2\nu}\sqrt{\pi}} K_0^{-\nu} \left[1 - \left(\frac{z_\varphi}{z}\right)^2\right]^{\nu-\frac{1}{2}} \int\limits_{\frac{z^2 - z_\varphi^2}{4K_0(-t_0)}}^{\infty} \exp(-u) u^{\nu-\frac{1}{2}} du, \quad (I.14)$$

которая имеет при больших z асимптотику

$$T(z,0^-) \cong \frac{T_0(-t_0)^{\nu}}{\sqrt{\pi K_0(-t_0)}} \frac{1}{z} \exp\left[\frac{z_\varphi^2 - z^2}{4K_0(-t_0)}\right].$$

Область определения предельной кривой (I.I2) состоит из всех точек $z_\varphi < z \leq \infty$, для которых также выполняются условия (A) и (B), так что при $n = -1$ существует локализация тепла с глубиной, вычисляемой по формуле (I.I3).

В области $z > z_\varphi$ существует предельное распределение и для теплового потока, которое мы определим из (I.I2) в следующем виде

$$W(z,0^-) = \frac{T_0 K_0^{1/2}}{2\pi^{1/2}} \int_{t_0}^{0} \exp\left[\frac{z_\varphi^2 - z^2}{4K_0(-\tau)}\right] \left[\frac{z^2}{2K_0}(-\tau)^{\nu-5/2} - (-\tau)^{\nu-3/2}\right] d\tau. \tag{I.I5}$$

Величина параметра ν определяет характер изменения температуры и потока в точке $z = z_\varphi$ при $t \to 0^-$. Из (I.I4) следует, что при $\nu > 1/2$

$$T(z_\varphi,0^-) = T_0\left(\frac{R_0}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(-t_0)^{\nu-1/2}}{\nu - 1/2} < \infty. \tag{I.I6}$$

Если $\nu \leq 1/2$, то $T(z_\varphi,t) \to \infty$ при $t \to 0^-$.

Аналогичный анализ можно провести и для теплового потока. Из (I.I5) получаем, что при $\nu > 3/2$

$$W(z_\varphi,0^-) = \frac{T_0}{2}\left(\frac{K_0}{\pi}\right)^{1/2} (-t_0)^{\nu-3/2} \left[\frac{2R_0}{\nu-3/2} + \frac{t_0}{\nu-1/2}\right]. \tag{I.I7}$$

Если же $\nu \leq 3/2$, то $W(z_\varphi,t) \to \infty$ при $t \to 0^-$.

Таким образом, при $\nu > 3/2$ предельная кривая в точке $z = z_\varphi$ разрывна и не имеет непрерывной производной. При $1/2 < \nu \leq 3/2$ производная непрерывна, при $\nu \leq 1/2$ непре-

рывна также и сама функция. Хотя предельное распределение в точках $0 \leq z < z_\varphi$ не оуществует, его непрерывноость и разрывноость в точке $z = z_\varphi$ определяется в обычном смысле. Например, разрыв первой производной при $\nu > 3/2$ определяется как условие $T_z(z_\varphi^+, 0^-) \neq T_z(z_\varphi^-, 0^-)$, поскольку

$$T_z(z_\varphi^+, 0^-) = -\frac{T_0}{2\sqrt{K_0 \pi}}(-t_0)^{\nu - 3/2}\left[\frac{2R_0}{\nu - 3/2} + \frac{t_0}{\nu - 1/2}\right],$$

$$T_z(z_\varphi^-, 0^-) = -\infty .$$

Заметим, что производная $T_z(z_\varphi^+, 0^-)$ может принимать значение разных знаков, в зависимости от величины t_0. Возможны следующие случаи ($\nu > 3/2$):

$$t_0 < t_* = -\frac{2R_0(\nu - 1/2)}{\nu - 3/2} < 0, \; T_z(z_\varphi^+, 0^-) > 0,$$

$$t_0 = t_*, \; T(z_\varphi^+, 0^-) = 0,$$

$$t_0 > t_*, \; T(z_\varphi^+, 0^-) < 0.$$

Как следует из первого неравенства, при $t_0 < t_*$ предельная кривая в области $z > z_\varphi$ не является монотонной, что связано с немонотонным характером изменения температуры на границе. Нетрудно установить, что функции (I.9) при $n = -1$ и $\nu > 0$ имеют минимум при $t^* = -R_0/\nu$ и $t^* < t_*$ при $\nu > 3/2$.

3. Пусть $n < -1$. Тогда интеграл в правой части (I.10) не определен для всех $z \geq 0$. Таким образом, температура неограниченно возрастает во всем пространстве и метастабильная локализация тепла при $n < -1$ отсутствует, поскольку условия (A) и (B) не выполняются ни при каких $0 \leq z_\varphi < \infty$.

На рис. I схематически представлены возможные типы предельных кривых ($n = -1$).

Следуя определениям, введенным в работах [1 - 6], будем называть граничные режимы (I.9) при $-I < n \leq 0$ (если $n = 0$, то должно быть $\nu < 0$) LS -режимами, при $n = -I$ - S -режимами и при $n < -I$ -HS-режимами.

Вопрос о динамике распространения тепла в экспоненциальных LS, S и HS -режимах будет рассмотрен в § 3 без использования интегрального представления решения в виде теплового потенциала, поскольку непосредственное выделение асимптотики решения задачи (I.I) - (I.3), (I.9) из потенциала (I.8) весьма затруднительно.

п. I.4. Вторая краевая задача

Рассмотрим в Q_0 для уравнения (I.I) вторую краевую задачу с заданным на границе $z = 0$ тепловым потоком, растущим в режиме с обострением:

$$W(0,t) = -K_0 T_z(0,t) = \psi(t), \; t_0 \leq t < 0 \qquad (I.I9)$$

и начальным распределением (I.3). Так же как и в случае первой краевой задачи не будем требовать гладкого согласования краевых условий (I.3), (I.I9) и будем предполагать, что для всех $\tau \in (t_0, 0)$ в Q_τ существует классическое решение сформулированной задачи [13].

Пусть кривые условия (I.3), (I.I9) обеспечивают неограниченное возрастание температуры на границе при $t \to 0^-$. Тогда воспользуемся определением метастабильной локализации тепла, введенным для первой краевой задачи, и определим классы локализованных и нелокализованных граничных режимов.

Решение второй краевой задачи (I.I), (I.3), (I.I9) можно

представить в виде потенциала простого слоя

$$T(z,t)=2K_0\int_{t_0}^{t}\Gamma(z,t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\,,\ (t,\tau)\in Q_0\,. \qquad (I.20)$$

В развернутом виде решение выглядит таким образом

$$T(z,t)=\sqrt{\frac{K_0}{\pi}}\int_{t_0}^{t}\exp\left[-\frac{z^2}{4K_0(t-\tau)}\right]\frac{\psi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}\,. \qquad (I.21)$$

Отсюда следует, что для второй краевой задачи так же надо исследовать класс функций $\psi(t)$ экспоненциально растущих при $t\to 0^-$.

Рассмотрим двупараметрическое семейство

$$\psi(t)=W_0(-t)^{\nu_1}\exp\left[R_0(-t)^n\right],\ t_0\le t<0, \qquad (I.22)$$

где n, ν_1 – параметры семейства, $-\infty<n\le 0$, $-\infty<\nu_1<\infty$.

Так же как и в случае первой краевой задачи будем анализировать предельную кривую

$$T(z,0^-)=\frac{W_0\sqrt{K_0}}{\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{0}\exp\left[-\frac{z^2}{4K_0(-\tau)}+R_0(-\tau)^n\right]\frac{d\tau}{(-\tau)^{-\nu_1+1/2}}. \qquad (I.23)$$

Рассмотрим три случая.

I. Пусть $-1<n\le 0$. Тогда, для всех $z>0$ температура ограничена сверху предельным распределением

$$T(z,0^-)=\frac{W_0 z^{2\nu_1+1}}{2^{2\nu_1+1}\sqrt{\pi}}K_0^{-\nu_1}\int_{\frac{z^2}{4K_0(-t_0)}}^{\infty}\exp\left[-u+\frac{R_0 z^{2n}}{(4K_0)^n}u^{-n}\right]u^{-\nu_1-3/2}du, \qquad (I.24)$$

с асимптотикой

$$T(z,0^-)\simeq\frac{W_0(-t_0)^{\nu_1+1}}{\sqrt{\pi K_0(-t_0)}}\frac{1}{z^2}\exp\left[-\frac{z^2}{4K_0(-t_0)}\right]\quad \text{при } z\to\infty\,.$$

Интеграл в правой части (I.23) неограничен при $z = 0^+$ для всех $-1 < n < 0$ и $-\infty < \nu_1 < \infty$, т.е. для этих значений краевое условие (I.19), (I.22) обеспечивает рост температуры на границе в режиме с обострением. При $n = 0$ таким свойством обладают функции (I.22) при $-\infty < \nu_1 < -1/2$, что следует из (I.24).

При $n \in (-I, 0]$ имеет место метастабильная локализация тепла, причем $z_\varphi = 0$ (не трудно видеть, что условия (А) и (В) выполняются при всех $z > 0$).

2. Пусть $n = -I$. Тогда при $0 \leq z < z_\varphi$, где z_φ вычисляется по формуле (I.13), температура неограниченно возрастает. При $z > z_\varphi$ температура ограничена сверху предельной кривой

$$T(z,0^-) = \frac{W_0 z^{2\nu_1+1}}{2^{2\nu_1+1}\sqrt{\pi}} K_0^{-\nu_1}\left[1-\left(\frac{z_\varphi}{z}\right)^{\nu_1}\right]^{\nu_1+\frac{1}{2}} \int\limits_{\frac{z^2-z_\varphi^2}{4K_0(-t_0)}}^{\infty} \exp(-u)\, u^{-\nu_1-\frac{3}{2}}\, du \qquad (I.25)$$

с асимптотикой при больших z

$$T(z,0^-) \simeq \frac{1}{z^3}\exp\left[-\frac{z^2}{4K_0(-t_0)}\right].$$

При $n = -I$ и при всех $z > z_\varphi$ выполнено условие (А), при всех $0 \leq z < z_\varphi$ выполнено условие (В), так что в задаче существует метастабильная локализация тепла с глубиной (I.13).

Параметр ν_1 определяет характер изменения температуры и потока в точке $z = z_\varphi$. При $\nu_1 > -I/2$ температура ограничена сверху

$$T(z_\varphi^+,0^-) = W_0\left(\frac{K_0}{\pi}\right)^{1/2}\frac{(-t_0)^{\nu_1+1/2}}{\nu_1+1/2} < \infty. \qquad (I.26)$$

Если $\nu_1 \leq -1/2$, то $T(z_\varphi^+, t) \to \infty$ при $t \to 0^-$. Если $\nu_1 > 1/2$, то в этой точке ограничен тепловой поток

$$W(z_\varphi^+, 0^-) = \frac{W_0 K_0}{\sqrt{\pi}} R_0^{1/2} \frac{(-t_0)^{\nu_1 - 1/2}}{\nu_1 - 1/2}. \qquad (1.27)$$

Если $\nu_1 \leq 1/2$, то $W(z_\varphi^+, t) \to \infty$ при $t \to 0^-$.

Таким образом, предельное распределение (1.25) разрывно и имеет разрывную производную в точке $z = z_\varphi$, если $\nu_1 > 1/2$. Если $-1/2 < \nu_1 \leq 1/2$, то в этой точке производная непрерывна. Если $\nu_1 < -1/2$, то при $z = z_\varphi$ непрерывна и сама функция (1.25). Так же, как и в случае первой краевой задачи, разрывность производной в точке $z = z_\varphi$ при $\nu_1 > 1/2$ означает, что

$$T_z(z_\varphi^+, 0^-) = -\frac{W_0}{\sqrt{\pi}} R_0^{1/2} \frac{(-t_0)^{\nu_1 - 1/2}}{\nu_1 - 1/2} \neq T_z(z_\varphi^-, 0^-) = -\infty.$$

3. Пусть $n < -1$. Интеграл в правой части (1.23) расходится при всех $z \geq 0$, условие (А) не выполнено ни при каких $z \geq 0$, поэтому температура неограниченно возрастает во всем пространстве, метастабильная локализация тепла отсутствует.

Во второй краевой задаче граничные режимы (1.22) при $-1 < n \leq 0$ (если $n = 0$, то должно быть $\nu_1 < -1/2$) будем называть LS-режимами, при $n = -1$ – S-режимами, при $n < -1$ – HS-режимами.

§ 2. Анализ однопараметрического семейства степенных режимов с обострением

В этом параграфе путем построения точных автомодельных решений уравнения (I.I), соответствующих степенному по времени граничному режиму (LS -режиму), установлена динамика распространения тепла на асимптотической стадии развития процесса с обострением.

п.2.I. Постановка автомодельной задачи.

Пусть в задаче (I.I)-(I.3) на границе $z=0$ граничный режим степенного вида

$$\varphi(t) = T_0(-t)^{\nu},\ \nu<0,\ t_0 \leq t < 0. \qquad (2.I)$$

Функции (2.I) можно получить из (I.9) при $h=0$, если, без потери общности, положить $R_0=0$ (или переобозначить $T_0 \exp R_0 \longrightarrow T_0$).

Мы покажем, что динамика распространения тепла на асимптотической отадии развития режимов с обострением (2.I) $(t \to 0^-)$ при всех $\nu<0$ описывается со все улучшающейся при $t \to 0^-$ относительной точностью соответствующим автомодельным решениям.

Задача (I.I)-(I.3, (2.I), как следует из теории размерностей [6] , имеет автомодельное решение, если $t_0=-\infty$. Температуру и тепловой поток автомодельного решения, оледует искать в виде

$$T_a(z,t) = T_0(-t)^{\nu} f(\xi),\ (t,z)\in Q_0^a, \qquad (2.2)$$

$$W_a(z,t) = T_0 k_0^{\frac{1}{2}}(-t)^{\frac{2\nu-1}{2}}\omega(\xi),\ (t,z)\in Q_0^a, \qquad (2.3)$$

где автомодельная координата

$$\xi = z(k_0(-t))^{-\frac{1}{2}},\ (t,z)\in Q_0^a,\ 0\leq\xi<\infty. \qquad (2.4)$$

Здесь $Q_0^a = \{(t,z): -\infty<t<0,\ 0\leq z<\infty\}$. Индекс "$a$" в (2.2), (2.3) у функций, стоящих в левой части, подчеркивает их

автомодельный характер.

Функция $f(\xi)$ (и, следовательно, $\omega(\xi) = -f'_\xi(\xi)$) является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$f''_{\xi\xi} - \frac{1}{2} f'_\xi \xi + \nu f = 0, \; 0 \leq \xi < \infty \tag{2.5}$$

с граничными условиями

$$f(0) = 1, \tag{2.6}$$

$$f(\infty) = 0. \tag{2.7}$$

п.2.2. Существование и единственность автомодельного решения

В уравнении (2.5) сделаем замену независимой переменной $\xi = 2z$ и введем обозначение $\tilde{\nu} = 2\nu$. Тогда (2.5) примет вид

$$f''_{zz} - 2 f'_z z + 2\tilde{\nu} f = 0, \; 0 \leq z < \infty. \tag{2.8}$$

Как известно [15], уравнению (2.8) удовлетворяют первая и вторая функции Эрмита. Граничному условию (2.7), которое остается без изменения в результате преобразования независимой переменной, подчиняется первая функция. Поэтому, решение задачи (2.8), (2.6), (2.7) (граничное условие при $z=0$ также не изменилось) следует искать в виде

$$f(z) = C_{\tilde{\nu}} G\left(-\frac{\tilde{\nu}}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right), \tag{2.9}$$

где $C_{\tilde{\nu}}$ – некоторая положительная константа, а G – вырожденная гипергеометрическая функция, с помощью которой записана первая функция Эрмита. Константа $C_{\tilde{\nu}}$ находится из условия (2.6) и равна

$$C_{\tilde{\nu}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\tilde{\nu}}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}. \tag{2.10}$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям (ξ, ν) получим

$$f(\xi)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{\sqrt{\pi}}G\left(-\nu,\frac{1}{2},\frac{\xi^2}{4}\right),\ 0\le\xi<\infty. \qquad (2.11)$$

Функцию $f(\xi)$ можно записать в виде интеграла

$$f(\xi)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2 s}{4}\right)s^{-\nu-1}(1+s)^{\nu-\frac{1}{2}}ds, \qquad (2.12)$$
$$0\le\xi<\infty.$$

Опишем некоторые свойства автомодельного решения. Функция $f(\xi)$ положительно и монотонно убывающая. Поток на границе равен

$$\omega(0)=-f'_\xi(0)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{\Gamma(-\nu)}. \qquad (2.13)$$

Асимптотическое разложение функции при больших ξ имеет вид

$$f(\xi)\simeq\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{2^{2\nu}\sqrt{\pi}}\left(\xi^{2\nu}-2\nu(2\nu-1)\xi^{2\nu-2}\right),\ \xi\to\infty. \qquad (2.14)$$

На рис.2 представлены результаты численного расчета автомодельной задачи (2.5)-(2.7) при различных ν. Там же приведена таблица основных характеристик построенных решений (величины $\xi_{эф}$ и $\xi_{эн}$ определяются в п.2.4).

При $\nu=-1/2$ уравнение (2.5) допускает первый интеграл, интегральное представление решения и его свойства существенно упрощаются

$$f(\xi)=\exp\left(\frac{\xi^2}{4}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right)ds\right),\ 0\le\xi<\infty, \qquad (2.12')$$

$$\omega(0)=-f'_\xi(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \qquad (2.13')$$

$$f(\xi)\simeq\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\xi^{-1}-2\xi^{-3}\right),\ \xi\to\infty. \qquad (2.14')$$

п.2.3. Сравнение автомодельного и неавтомодельного решений

Решение неавтомодельной задачи (1.1)-(1.3), (2.1) с $t_0\neq-\infty$ можно представить в виде теплового потенциала двойного слоя (1.7),

который в данном случае имеет вид

$$T(z,t)=\frac{z\,T_0}{2\sqrt{K_0\pi}}\int_{t_0}^{t}\exp\left[-\frac{z^2}{4K_0(t-\tau)}\right]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}(-\tau)^{-\nu}}. \qquad (2.15)$$

Автомодельное решение сформулированной задачи при $t_0=-\infty$ можно предотавить в аналогичном виде

$$T_a(z,t)=\frac{T_0\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{\sqrt{K_0\pi}\,\Gamma(-\nu)}\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\frac{z^2}{4K_0(t-\tau)}\right]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}(-\tau)^{-\nu+1/2}}. \qquad (2.16)$$

Здесь $(t,z)\in Q_0^a$. При $t_0=-\infty$ (2.15) совпадает с автомодельным решением (2.16). В этом можно убедиться, применив к (2.16) функциональное соотношение для вырожденной гипергеометрической функции. Дейотвительно, пусть в (2.15) $t_0=-\infty$ и для простоты положим $K_0=T_0=1$. Тогда (2.15) приводится к виду

$$T(z,t)=(-t)^{\nu}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\xi\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi^2 s}{4}\right)s^{-\frac{1}{2}-\nu}(1+s)^{\nu}\,ds. \qquad (2.17)$$

Здесь $\xi=z(-t)^{-1/2}$ – безразмерная автомодельная координата. Выразив (2.16), (2.17) через вырожденную гипергеометрическую функцию, получим

$$T_a(z,t)=(-t)^{\nu}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)G\left(-\nu,\frac{1}{2},\frac{\xi^2}{4}\right),$$

$$T(z,t)=(-t)^{\nu}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{2\sqrt{\pi}}\,\xi\,G\left(-\nu+\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\xi^2}{4}\right).$$

Два последних выражения тождественно совпадают при $-\infty<t<0$, поскольку они связаны основным функциональным соотношением для G

$$z\,G\left(\frac{1}{2}-\nu,\frac{3}{2},z^2\right)=G\left(-\nu,\frac{1}{2},z^2\right),\quad z=\xi/2.$$

Определим максимально возможное отличие неавтомодельного решения (2.15) от соответствующего автомодельного (2.16).

Лемма I. При всех $(t,z)\in Q_0$

$$T_a(z,t)-T(z,t)\geq 0, \tag{2.18}$$

$$T_a(z,t)-T(z,t)\leq T_a(0,t_0)=T_0(-t_0)^{\nu}. \tag{2.19}$$

Доказательство. Положим

$$T_a(z,t)-T(z,t)=Z(z,t),\ (t,z)\in Q_0.$$

Функция Z удовлетворяет в Q_0 уравнению

$$Z_t=K_0 Z_{zz} \tag{2.20}$$

и краевым условиям

$$Z(0,t)=0,\ t_0\leq t<0, \tag{2.21}$$

$$Z(z,t_0)=T_a(z,t_0)-T(z,t_0)\geq 0,\ 0\leq z<\infty. \tag{2.22}$$

Из принципа максимума для задачи (2.20)-(2.22) [13] получаем, с учетом (I.3), утверждение леммы.

Непосредственное сравнение (2.I5) и (2.I6) весьма затруднительно ввиду достаточной сложности указанных интегральных представлений:

Для описания характера "выхода" неавтомодельного решения $T(z,t)$ на автомодельное решение $T_a(z,t)$ нам понадобится следующее определение

Определение 2. Будем называть функцию $f_T^{\alpha,\beta}(\xi,t)$ автомодельным представлением функции $T(z,t)$, если

$$f_T^{\alpha,\beta}(\xi,t)=A(-t)^{-\alpha}T\left(\xi B(-t)^{\frac{1+\beta}{2}},t\right),\ (t,\xi)\in Q_0, \tag{2.2}$$

где A и B – некоторые фиксированные положительные постоянные величины.

Пусть $f(\xi)$ – автомодельный профиль функции $T_a(z,t)$, опре-

деленный в (2.12). Согласно (2.2), (2.4) фиксируем $A = T_0^{-1}$ и $B = K_0^{1/2}$. Обозначим $\|\cdot\|_C$ – норму в C. Следующая теорема определяет скорость сходимости в C при $t \to 0^-$ автомодельного представления решения задачи (1.1)–(1.3), (2.1) (т.е. функции (2.15)) к решению задачи (2.5)–(2.7) – функции (2.12).

<u>Теорема 1.</u> При каждом фиксированном $t_0 < t < 0$

$$\| f_T^{\nu,0}(\xi,t) - f(\xi)\|_C \leq T_0 (-t_0)^{\nu} (-t)^{\nu}. \tag{2.24}$$

Доказательство. Из неравенств (2.18)–(2.19), доказанных в лемме 1, следует, что

$$|T(z,t) - T_a(z,t)| \leq T_0 (-t_0)^{\nu}, \ (t,z) \in Q_0.$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

<u>Следствие.</u> Из оценки (2.24) следует сходимость в C при $t \to 0^-$ автомодельного представления функции $T(z,t)$ к $f(\xi)$

$$\lim_{t \to 0^-} \| f_T^{\nu,0}(\xi,t) - f(\xi)\|_C = 0. \tag{2.25}$$

Сходимость (2.25) продемонстрирована на рис.3, на котором представлены результаты численного расчета задачи (2.1) с $\nu = -0.5$.

п.2.4. <u>Динамические свойства степенного LS-режима.</u>

Доказанное в теореме 1 предельное равенство (2.25) обеспечивает совпадение физических свойств решения задачи (1.1)–(1.3),(2.1 со свойствами автомодельного решения $T_a(z,t)$ на асимптотической стадии развития степенного режима с обострением. Поэтому для динамического (при $t \to 0^-$) описания распределения в пространстве поступившего с границы тепла будем использовать построенное автомодельное решение.

1. Эффективная глубина (полуширина) проникновения тепла $z_{эф}(t)$ определяется в каждый момент времени так, чтобы

$$T(z_{эф}(t),t)=\frac{1}{2}T(0,t)=\frac{1}{2}T_0(-t)^{\nu},\ t_0<t<0. \tag{2.26}$$

Для приближенного решения уравнения (2.26) воспользуемся утверждениями леммы I.

Из неравенства (2.18) получаем

$$f\left(\frac{z_{эф}(t)}{(K_0(-t))^{1/2}}\right)\geqslant\frac{1}{2}. \tag{2.27}$$

Из неравенства (2.19) следует, что

$$f\left(\frac{z_{эф}(t)}{(K_0(-t))^{1/2}}\right)\leqslant\frac{1}{2}+(-t_0)^{\nu}(-t)^{-\nu}. \tag{2.28}$$

Пусть f^{-1} – функция обратная к f (она существует и дифференцируема в силу монотонности и гладкости f). Пусть $f^{-1}(1/2)=\xi_{эф}<\infty$. Тогда из (2.27), (2.28) получаем

$$\xi_{эф}(-t)^{1/2}+(-t_0)^{\nu}f^{-1\prime}(\lambda)(-t)^{-\nu+1/2}\leqslant z_{эф}(t)\leqslant\xi_{эф}(-t)^{1/2}, \tag{2.29}$$

где λ зависит от t, причем

$$1/2\leqslant\lambda(t)\leqslant 1/2+T_0(-t_0)^{\nu}(-t)^{-\nu}.$$

Неравенства (2.29) означают, что

$$z_{эф}(t)=\xi_{эф}(-t)^{1/2}+O\left((-t)^{-\nu+1/2}\right). \tag{2.30}$$

Таким образом, полуширина тепловой волны сокращается при $t\to 0^-$ по закону (2.30).

Заметим, что формула (2.30) определяет приближенное при $t\to 0$ решение интегрального уравнения

$$\frac{z_{эф}(t)}{2\sqrt{K_0\pi}}\int_{t_0}^{t}\exp\left[-\frac{z^2_{эф}(t)}{4K_0(t-\tau)}\right](t-\tau)^{\nu-\frac{3}{2}}d\tau=\frac{1}{2}(-t)^{\nu},\ t_0<t<0,$$

причем относительная точность решения улучшается при $t \to 0^-$, поскольку

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{z_{эф}(t)}{\xi_{эф}(-t)^{1/2}} = 1 .$$

2. Введем еще одну динамическую характеристику процесса. Пусть за время от t до $t + \Delta t \, (-\Delta t / t \ll 1)$ в среду поступило количество тепла ΔQ. Энергетическая полуширина $z_{эн}(t)$ определяет ту точку пространства, по обе стороны от которой лежат равные количества вновь поступившей энергии ΔQ. Если $\Delta t \to 0$, то энергетическая полуширина определяется из уравнения

$$W(z_{эн}(t), t) = \frac{1}{2} W(0, t) , \quad t_0 < t < 0 .$$

Пусть $\xi_{эн} < \infty$ – решение уравнения

$$f'(\xi) = \frac{1}{2} f'(0) = -\frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)}{2\,\Gamma(-\nu)} .$$

Тогда можно установить, что энергетическая полуширина со временем изменяется по закону

$$z_{эн}(t) = \xi_{эн} (-t)^{1/2} + O\left((-t)^{-\nu + 1/2}\right) . \qquad (2.31)$$

Отсюда следует, что на асимптотической стадии режима с обострением поступившее с границы тепло концентрируется во все сокращающейся по закону (2.31) области вблизи границы.

На рис.4 представлены результаты численного расчета задачи при $\nu = -1$. Пунктирной линией изображена траектория движения полуширины, штрих-пунктирной энергетической полуширины. Установлено, что установление временной автомодельной закономерности ($\pm$ 5%) движения полуширины происходит при росте температуры на границе в 5 ÷ 10 раз по сравнению с начальной (этот вывод справедлив для всех ν из интервала $(-\frac{1}{4}, -6)$.

3. Определим $Q(t)$ – количество поступившего с границы тепла к моменту времени t, $t_0 < t < 0$. Тогда, как следует из интегрального представления (I.8), получаем

$$Q(t) = T_0\left(\frac{K_0}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(-\tau)^{\nu+1/2}}{\nu+1/2}\Bigg|_{t}^{t_0}, \quad \nu \neq 1/2,$$

$$Q(t) = T_0\left(\frac{K_0}{\pi}\right)^{1/2} \ln(-\tau)\Bigg|_{t}^{t_0}, \quad \nu = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда заключаем, что за все время обострения в среду поступает при $\nu > -1/2$ конечное количество энергии

$$Q(0^-) = T_0\left(\frac{K_0}{\pi}\right)^{1/2} \frac{(-t_0)^{\nu+1/2}}{\nu+1/2}.$$

Если $\nu \leq -1/2$, то количество поступившей энергии бесконечно, причем в силу условия (2.31) почти вся эта энергия сконцентрирована в узкой области вблизи границы.

4. Температура в течение всего времени обострения ограничена предельным распределением (см. (I.10))

$$T(z,t) < T(z,0^-) = \frac{T_0 z^{2\nu}}{2^{2\nu}\sqrt{\pi}} K_0^{-\nu} \int\limits_{\frac{z^2}{4K_0(-t_0)}}^{\infty} \exp(-s)\, s^{-\nu-1/2}\, ds, \qquad (2.32)$$

асимптотика которого при $z \to 0^+$ совпадает с предельным распреде-

лением автомодельного решения

$$T_a(z,0^-) = \frac{T_0}{K_0^{\nu}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{2^{2\nu}\sqrt{\pi}} z^{2\nu}. \qquad (2.33)$$

Нетрудно видеть, что при всех $z>0$ кривая $T(z,0^-)$ лежит ниже предельной кривой автомодельного решения, поскольку, как следует из (2.32)

$$T(z,0^-) = T_a(z,0^-) - \frac{T_0 z^{2\nu}}{2^{2\nu}\sqrt{\pi}} K_0^{-\nu} \int_0^{\frac{z^2}{4K_0(-t_0)}} \exp(-s)\, s^{-\nu-1/2}\, ds.$$

При $z \to \infty$ асимптотики (2.32) и (2.33) различны, предельное распределение неавтомодельного решения имеет экспоненциальную асимптотику (см. п.I.3). Происходит своеобразное обрезание "хвоста" температурного профиля неавтомодельной задачи по сравнению с автомодельным за счет конечности времени начала процесса (см. работы [1-3,5], в которых аналогичный вывод сформулирован для задачи с нелинейным коэффициентом теплопроводности).

Тепловой поток в течение всего времени обострения также ограничен предельным распределением (см. п.I.3). При больших z функция $W(z,0^-)$ имеет экспоненциальную асимптотику, поэтому лежит ниже предельной кривой автомодельного теплового потока, являющегося степенной функцией радиуса

$$W_a(z,0^-) = -\frac{2\nu T_0}{K_0^{\nu-1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{2^{2\nu}\sqrt{\pi}} z^{2\nu-1}. \qquad (2.34)$$

При $z \to 0^+$ кривая $W(z,0^-)$ лежит выше предельного распределения (2.34).

5. Полуширина и энергетическая полуширина характеризуют пространственное перемещение точек тепловой волны, соответствующих некоторым фиксированным состояниям автомодельного представления решения $T(z,t)$. Действительно, полуширина $z_{эф}(t)$ на асимптотической стадии степенного режима описывает перенос

физического состояния, соответствующего постоянному значению автомодельного представления, поскольку, как следует из (2.25)

$$\lim_{t\to 0^-} f_T^{\nu,0}\left(z_{эф}(t)/(K_0(-t))^{1/2}, t\right) = 1/2 .$$

Энергетическая полуширина $z_{эн}(t)$ определяет пространственное положение физического состояния, которое при $t\to 0^-$ соответствует постоянному значению производной автомодельного представления функции $T(z,t)$, т.е. постоянному значению автомодельного представления теплового потока

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{d}{d\xi}\left[f_T^{\nu,0}\left(z_{эн}(t)/(K_0(-t))^{1/2}\right), t\right) - \frac{1}{2} f_T^{\nu,0}(0,t)\right] = 0 .$$

Определим законы изменения пространственного положения реальных физических состояний – температуры T и теплового потока W. Будем говорить, что функция $z_T(t)$ описывает перенос фиксированной температуры $T^0 = const > 0$, если

$$T(z_T(t), t) \equiv T^0. \tag{2.35}$$

Аналогично определим $z_W(t)$ – перенос фиксированного потока $W^0 = const > 0$ из уравнения

$$W(z_W(t), t) \equiv W^0. \tag{2.36}$$

Следует учитывать, что в зависимости от краевых данных и фиксированных величин T^0, W^0 уравнения (2.35)–(2.36) могут иметь решения не при всех $t_0 < t < 0$.

Решая уравнение (2.35) при $t = 0^-$, получим в силу (2.32), что степенные LS -режимы производят ограниченный по пространству перенос фиксированной температуры. Из (2.33) нетрудно получить, что для любого $T^0 > 0$

$$z_T(t) < z_T(0) < 2K_0^{1/2}\left[\frac{T^0}{T_0\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-\nu)}\right]^{1/2\nu}.$$

Аналогично, пространственный перенос фиксированного теплового потока ограничен при всех $W^0 > 0$. Например, при достаточно больших z справедлива оценка (ом. (2.34))

$$z_W(t) < z_W(0) < \left[\frac{K_0^{\nu-1}2^{2\nu}\sqrt{\pi}\,W^0}{T_0(-2\nu)\Gamma(1/2-\nu)}\right].$$

Таким образом, степенные LS -режимы с обострением характеризуются тем, что они осуществляют ограниченный по пространству перенос реальных физических состояний фиксированных температуры и теплового потока.

§ 3. Анализ однопараметрического семейства экспоненциальных режимов с обострением.

В этом параграфе показано, что динамику распространения тепла на асимптотической стадии развития экспоненциальных режимов с обострением описывают автомодельные решения "усеченного" уравнения, построенного в результате преобразования исходного (I.I).

п. 3.I. Постановка усеченной автомодельной задачи.

Рассмотрим в Q_0 задачу (I.I)-(I.3) с заданным при $z=0$ граничным режимом с обострением экспоненциального типа

$$\varphi(t) = T_0\{\exp[R_0(-t)^n]-1\},\ n<0,\ t_0 \le t < 0. \tag{3.I}$$

При $t\to 0^-$ режим (3.I) эквивалентен (I.9), если $\nu=0$. По сравнению с семейством (I.9), $\nu=0$ режим (3.I) содержит дополнительную константу, которая введена для удобства дальнейших выкладок. Это различие не является принципиальным в силу суперпо-

зиции решений.

Перейдем к построению усеченной задачи. Замена

$$V(z,t) = T_0 \ln\left[1 + T(z,t)/T_0\right], \ (t,z) \in Q_0 \tag{3.2}$$

преобразует задачу (I.I)-(I.3), (3.I) к виду

$$V_t = K_0 V_{zz} + K_0/T_0 (V_z)^2, \ (t,z) \in Q_0, \tag{3.3}$$

$$V(0,t) = T_0 R_0 (-t)^n, \ t_0 \leq t < 0, \tag{3.4}$$

$$V(z,t_0) = 0, \ 0 < z < \infty. \tag{3.5}$$

Задача (3.3)-(3.5), так же как и исходная, ни при каких нетривиальных значениях входящих в нее параметров не имеет в Q_0^a автомодельных решений. Рассмотрим автомодельные решения усеченной задачи

$$V_{a_t} = K_0/T_0 (V_{az})^2, \ (t,z) \in Q_0^a, \tag{3.6}$$

$$V_a(0,t) = T_0 R_0 (-t)^n, \ -\infty \leq t < 0, \tag{3.7}$$

$$V_a(z,-\infty) = 0, \ 0 < z < \infty. \tag{3.8}$$

Уравнение (3.6) получено из (3.3) в результате отбрасывания первого члена в правой части (3.3) (Поэтому мы называем сформулированную задачу усеченной по отношению к исходной). Краевые условия (3.7)-(3.8) тождественно совпадают с (3.4)-(3.5), если в формулировке последних положить $t_0 = -\infty$.

Автомодельное решение усеченной задачи имеет вид

$$V_a(z,t) = T_0 R_0 (-t)^n \theta(\xi), \tag{3.9}$$

где ξ – автомодельная координата

$$\xi = z/(K_0 R_0)^{1/2} (-t)^{(1+n)/2}, \tag{3.10}$$

а функция $\theta(\xi)$ является решением краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$(\theta'_\xi)^2 - \frac{1+n}{2}\theta'_\xi \xi + n\theta = 0, \quad 0 < \xi < \infty \tag{3.11}$$

с граничными условиями

$$\theta(0) = 1, \tag{3.12}$$

$$\theta(\infty) = 0. \tag{3.13}$$

Мы покажем, что асимптотическую стадию режима с обострением (3.1) описывает построенное автомодельное решение усеченной задачи, т.е. при $t \to 0^-$ первый член в правой части уравнения (3.3) становится несущественным по сравнению со вторым. Это непосредственно можно увидеть, используя временные закономерности автомодельного решения (3.9)-(3.10). Действительно

$$V_{zz} \sim (-t)^{-1}\theta''_{\xi\xi}, \quad V_z^2 \sim (-t)^{n-1}(\theta'_\xi)^2,$$

поэтому $(V_z)^2 \gg |V_{zz}|$ при $t \to 0^-$.

п.3.2. <u>Существование и единственность автомодельного решения усеченной задачи.</u>

Уравнение (3.11) инвариантно относительно преобразования подобия

$$\bar{\xi} = \mu_1 \xi, \quad \bar{\theta}(\bar{\xi}) = \mu_2 \theta(\xi), \quad \mu_2 = \mu_1^2$$

и приводится к автономному виду с помощью замены

$$\eta = \ln \xi, \quad -\infty < \eta < \infty, \quad \theta(\xi) = \xi^2 \varphi(\eta), \quad \varphi(\eta) \geq 0.$$

Для функции $\varphi(\eta)$ получаем уравнение

$$(\varphi'_\eta)^2 + \left(4\varphi - \frac{1+n}{2}\right)\varphi'_\eta + 4\varphi^2 - \varphi = 0. \tag{3.14}$$

Нетрудно видеть, что для уравнения (3.6) справедлив принцип максимума. Поэтому решение задачи (3.6)-(3.8) монотонно, откуда заключаем, что $\theta'_\xi(\xi) \leq 0, 0 < \xi < \infty$. Поскольку

$$\varphi'_\eta = \frac{1}{\xi}[\theta'_\xi - 2\xi^{-1}\theta],$$

то получаем, что $\varphi'_\eta < 0$, $-\infty < \eta < \infty$. Тогда из (3.14) следует, что

$$\varphi'_\eta(\eta) = \frac{1+n}{4} - 2\varphi(\eta) - \sqrt{\left(\frac{1+n}{4}\right)^2 - n\varphi(\eta)}. \qquad (3.15)$$

Уравнение (3.15) интегрируется с помощью подстановки

$$P(\varphi) = \sqrt{\left(\frac{1+n}{4}\right)^2 - n\varphi}.$$

Получаем

$$\frac{1+n}{2}\ln\left|P(\varphi) - \frac{1+n}{4}\right| + \frac{1-n}{2}\ln\left|P(\varphi) + \frac{1-n}{4}\right| = -\eta + C_0.$$

Константа интегрирования C_0 определяется из граничного условия (3.12), которое в новых обозначениях выглядит так

$$\lim_{\eta \to -\infty} \exp(2\eta)\varphi(\eta) = 1.$$

В результате получаем, что

$$C_0 = \frac{1}{2}\ln(-n).$$

В первоначальных обозначениях решение задачи (3.11)-(3.12) имеет вид

$$\left[\sqrt{\left(\frac{1+n}{4}\right)^2 - n\theta\xi^{-2}} - \frac{1+n}{4}\right]^{\frac{1+n}{2}}\left[\sqrt{\left(\frac{1+n}{4}\right)^2 - n\theta\xi^{-2}} + \frac{1-n}{4}\right]^{\frac{1-n}{2}} = (-n)^{\frac{1}{2}}\xi^{-1}. \qquad (3.16)$$

При выводе решения (3.16) было использовано только одно краевое условие. В дальнейшем будет показано, что ограниченная и

непрерывная функция $\theta(\xi)$ удовлетворяет и второму краевому условию.

В зависимости от величины параметра n, то есть в LS, S и HS-режимах, пространственные профили решения (3.16) существенно различаются.

1. Пусть $-1<n<0$ (LS - режим). Тогда $\theta(\xi)>0$ при всех $0\leq\xi<\infty$. При $\xi\to\infty$ решение имеет асимптотику

$$\theta(\xi)\simeq C(n)\,\xi^{\frac{2n}{1+n}}, \tag{3.17}$$

где константа разложения

$$C(n)=-\frac{1+n}{2n}\,2^{-\frac{2n}{1+n}}\,(-n)^{\frac{1}{1+n}}. \tag{3.18}$$

2. Пусть $n=-1$ (S-режим). Тогда из (3.16) решение можно выделить в аналитическом виде

$$\theta(\xi)=\begin{cases}(1-\xi/2)^2, & 0\leq\xi\leq 2\\ 0, & 2<\xi<\infty.\end{cases} \tag{3.19}$$

3. Пусть $n<-1$ (HS-режим). Тогда, так же как и в случае S-режима, решение имеет конечный фронт, то есть

$$\theta(\xi)=\begin{cases}\tilde{\theta}(\xi)>0, & 0\leq\xi<\xi_\varphi(n)<\infty\\ 0, & \xi_\varphi(n)\leq\xi<\infty,\end{cases}$$

где $\tilde{\theta}(\xi)$ - определяется из (3.16), а константа $\xi_\varphi(n)$ равна

$$\xi_\varphi(n)=2(-n)^{\frac{n}{2}}(-1-n)^{-\frac{1+n}{2}}. \tag{3.20}$$

Асимптотика решения вблизи точки фронта линейная

$$\theta(\xi)\simeq-\frac{1+n}{2}\,\xi_\varphi\,(\xi_\varphi-\xi)\ \text{при}\ \xi\to\xi_\varphi^-. \tag{3.21}$$

При $n=-3$ формула (3.16) допускает аналитическое представление

$$\theta(\xi)=\begin{cases}\frac{\xi^2}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\xi+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\xi\right)\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\xi\right)}, & \xi\le\frac{4\sqrt{3}}{9}\\ 0\ , & \xi>\xi_\varphi(-3)=\frac{4\sqrt{3}}{9}\ .\end{cases} \qquad (3.22)$$

Заметим, что при $n<-1$, в отличие от двух предыдущих случаев решение не имеет непрерывной всюду производной, поскольку $\theta'_\xi(\xi)$ терпит разрыв в точке фронта

$$\theta'_\xi(\xi^-_\varphi)=\frac{1+n}{2}\xi_\varphi\neq\theta'_\xi(\xi^+_\varphi)=0\,.$$

Итак, доказано, что при всех $n<0$ решение задачи (3.II)-(3.I3), так же как и автомодельное решение (3.9)-(3.I0) усеченной задачи (3.6)-(3.8), существует и единственно.

В дальнейшем изложении понадобится одно дополнительное свойство функции $\theta(\xi)$. Покажем, что почти всюду $(\xi\neq\xi_\varphi(n), n\le-1)$

$$\theta''_{\xi\xi}(\xi)\geqslant 0\,. \qquad (3.23)$$

Действительно, из (3.II) получаем

$$\theta''_{\xi\xi}\left[2\theta'_\xi-\frac{1+n}{2}\xi\right]=\frac{1-n}{2}\theta'_\xi\,. \qquad (3.24)$$

Поскольку правая часть этого тождества неположительна $(\theta'_\xi(\xi)\le 0)$ и

$$2\theta'_\xi-\frac{1+n}{2}\xi=-2\sqrt{\left(\frac{1+n}{4}\right)^2\xi^2-n\theta}<0,\ 0\le\xi<\infty,$$

то из (3.24) следует неравенство (3.23).

Из (3.II) также нетрудно определить, что при всех $n<0$

$$\theta'_\xi(0)=-\sqrt{n}\,.$$

п.3.3. <u>"Выход" на автомодельное решение усеченной задачи.</u>

Проведем сравнение в Q_0 решений задачи (3.3)-(3.5) и автомодельного решения (3.9)-(3.I0) усеченной задачи (3.6)-(3.8). Сначала установим, каким может быть максимальное отличие в Q_0

решений этих задач, затем докажем сходимость автомодельного представления исходной задачи (3.3)-(3.5) к автомодельной функции (3.II)-(3.I3).

Лемма 2. При $-1 \leq n < 0$ всюду в Q_0 имеют место оценки

$$V(z,t) - V_a(z,t) \geq -T_0 R_0 (-t_0)^n, \tag{3.25}$$

$$V(z,t) - V_a(z,t) \leq T_0 \| \theta''_{\xi\xi}(\xi) \|_C \ln \frac{t_0}{t}. \tag{3.26}$$

Замечание. Из формулы (3.I6), определяющей решение задачи (3.II)-(3.I3), нетрудно показать, что при всех $n<0$

$$0 < \| \theta''_{\xi\xi}(\xi) \|_C < \infty .$$

Более того, из (3.24) определяется, что своего максимального значения функция $\theta''_{\xi\xi}(\xi)$ достигает при $\xi = 0$. Отсюда получаем что

$$\| \theta''_{\xi\xi}(\xi) \|_C = \frac{1-n}{4} .$$

Например, при $n = -1$ (S -режим) $\| \theta''_{\xi\xi}(\xi) \|_C = 1/2$.

Доказательство леммы 2. Положим

$$Z(z,t) = V(z,t) - V_a(z,t), \quad (t,z) \in Q_0 .$$

Функция Z удовлетворяет в Q_0 уравнению

$$Z_t = K_0 Z_{zz} + K_0 V_{a_{zz}} + \frac{K_0}{T_0}(Z_z)^2 + 2\frac{K_0}{T_0} V_{a_z} Z_z . \tag{3.27}$$

Очевидно, что

$$Z(z,t) \leq 0, \quad (t,z) \in \Gamma_0, \tag{3.28}$$

$$Z(z,0) \geq -T_0 R_0 (-t_0)^n, \quad 0 < z < \infty . \tag{3.29}$$

Поскольку при $-1 \leq n < 0$ $\theta(\xi) \in C^1([0,\infty))$ функция $V_a(z,t)$ принадлежит классу $C^{1,1}(Q_0)$. Следовательно,

функция $z(\tau,t)$ в силу достаточной гладкости $V(\tau,t)$ принадлежит этому классу. Отсюда в точках экстремума функции z, не принадлежащих Γ_0, выполнено

$$z_\tau = 0,$$

и в этих точках уравнение (3.27) принимает вид

$$z_t = K_0 z_{\tau\tau} + K_0 V_{a\tau\tau}. \tag{3.30}$$

Предположим, что при всех $t_0 < t < t_1 \leq 0$ функция z имеет отрицательный минимум по τ в точках $(t,\tau_1(t)) \in Q_0$, а при всех $t_0 < t_2 < t < 0$ – положительный максимум в точках $(t,\tau_2(t)) \in Q_0$. Тогда в точках $(t,\tau_i(t))$, $i=1,2$ функция z удовлетворяет уравнению (3.30), причем

$$z_{\tau\tau}(\tau_1^{\pm}(t),t) \geq 0, \; t_0 < t < t_1 < 0, \tag{3.31}$$

$$z_{\tau\tau}(\tau_2^{\pm}(t),t) \leq 0, \; t_0 < t_2 < t < 0. \tag{3.32}$$

Заметим, что z при $n=-1$ может не иметь в точках $(t,\tau_i(t))$, $i=1,2$ непрерывной второй производной, поскольку $V_{a\tau\tau}$ терпит разрыв при $\tau = \tau_\varphi = 2\sqrt{K_0 R_0}$. Тем не менее неравенства (3.31)–(3.32) выполняются и в том случае, когда точки экстремума совпадают с $\tau = \tau_\varphi$.

Используя временные закономерности автомодельного решения усеченной задачи, из (3.30) получим, что в точках экстремума $(t,\tau_i(t))$, $i=1,2$

$$z_t = K_0 z_{\tau\tau} + T_0 \theta''_{\xi\xi}\left(\tau_i(t) K_0^{-\frac{1}{2}} R_0^{-\frac{1}{2}} (-t)^{-\frac{1+n}{2}}\right)(-t)^{-1}. \tag{3.33}$$

В точках $(t,\tau_i(t))$, $i=1,2$

$$z_t = \frac{d}{dt} z.$$

Рассмотрим точки отрицательного минимума $(t,\tau_1(t))$, $t_0 < t < t_1 \leq 0$. Из (3.31), (3.33) и неравенства (3.23) получаем, что

$$\frac{dz}{dt}(\tau_1(t),t) \geq 0, \; t_0 < t < t_1 < 0. \tag{3.34}$$

Из (3.34) и (3.29) следует первое утверждение леммы – оценка (3.25).

Рассмотрим теперь точки положительного максимума $(t, z_2(t))$, $t_0 < t_2 < t < 0$. Из (3.32) и (3.23) заключаем, что

$$\frac{dz}{dt}(z_2(t), t) \leq T_0 \|\theta''_{\xi\xi}(\xi)\|_C (-t)^{-1}, \; t_0 < t_2 < t < 0. \quad (3.35)$$

Из (3.35) и (3.28) следует второе утверждение леммы – оценка (3.26).

Лемма доказана.

<u>Следствие</u>. Из неравенств (3.25) –(3.26) определяем оценки функции $T(z,t)$ – решения исходной задачи (I.I)–(I.3), (3.I). Подставляя в (3.25)–(3.26) $T(z,t)$ из преобразования (3.2) получим

$$T(z,t) \geq T_0 \left\{ \exp\left[\frac{V_a(z,t)}{T_0} - R_0(-t_0)^n\right] - 1 \right\}, \; (t,z) \in Q_0, \quad (3.25)$$

$$T(z,t) \leq T_0 (-t_0)^{\alpha} (-t)^{-\alpha} \exp\left[\frac{V_a(z,t)}{T_0}\right], \; (t,z) \in Q_0, \quad (3.26)$$

где введено обозначение

$$\alpha = \|\theta''_{\xi\xi}(\xi)\|_C = \frac{1-n}{4}.$$

Например, в S – режиме $(n = -1, \alpha = 1/2)$ эти оценки принимают вид:

а) при $0 \leq z \leq z_\varphi$, $t_0 < t < 0$,

$$T(z,t) \geq T_0 \left\{ \exp\left[R_0(-t)^{-1}\left(1 - \frac{z}{z_\varphi}\right)^2 - R_0(-t_0)^{-1}\right] - 1 \right\},$$

$$T(z,t) \leq T_0 (-t_0)^{\frac{1}{2}} (-t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[R_0(-t)^{-1}\left(1 - \frac{z}{z_\varphi}\right)^2\right],$$

б) в области $z > z_\varphi$ (т.е. в области ограниченного возрастания температуры) оценки (3.25) – (3.26) дают неудовлетворительную аппроксимацию.

Полученные оценки $T(z,t)$ в области $0 \leq z \leq z_\varphi$ имеют

принципиальное значение, они определяют временные закономерности изменения температуры в области ее неограниченного возрастания. Поскольку степенной множитель $(-t)^{1/2}$ не может изменить экспоненциального характера нарастания температуры в области $0 \leq z \leq z_\varphi$, то для асимптотической стадии процесса нагрева в S-режиме

$$T(z,t) \sim \exp\left[R_0(-t)^{-1}\left(1-\frac{z}{z_\varphi}\right)^2\right], 0 \leq z \leq z_\varphi, t \to 0^-.$$

Вторая оценка в пункте а) дает хорошую аппроксимацию в точке $z = z_\varphi$. Заметим, что ее можно вывести непосредственно из интеграла (I.7). Подставляя в (I.7) функцию $\varphi(t)$ из (3.I), получаем неравенство

$$T(z_\varphi,t) < \frac{T_0 z_\varphi}{2\sqrt{K_0\pi}} \int_{t_0}^{t} \exp\left[\frac{R_0 t}{(-\tau)(t-\tau)}\right] \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}, t_0 < t < 0.$$

В результате замены $s = 1/(t-\tau)$ в подынтегральном выражении это неравенство приобретает вид

$$T(z_\varphi,t) < T_0\left(\frac{R_0}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\frac{1}{(t-t_0)}}^{\infty} \exp\left[\frac{R_0 t s^2}{1-st}\right] \frac{ds}{s^{1/2}}, t_0 < t < 0.$$

Оценим интеграл, стоящий в правой части получавшегося выражения В силу неравенства

$$\frac{R_0 t s^2}{1-st} \leq \frac{R_0 t s}{(-t_0)},$$

справедливого при всех $1/(t-t_0) \leq s < \infty$, получаем следующую цепочку неравенств

$$\int_{\frac{1}{(t-t_0)}}^{\infty} \exp\left[\frac{R_0 t s^2}{1-st}\right] \frac{ds}{s^{1/2}} < \int_{\frac{1}{(t-t_0)}}^{\infty} \exp\left[\frac{R_0 t s}{(-t_0)}\right] \frac{ds}{s^{1/2}} < 2\frac{(-t_0)^{1/2}}{R_0^{1/2}}(-t)^{1/2} \int_0^{\infty} \exp(-u^2)\,du.$$

Отсюда получаем окончательную оценку

$$T(z_\varphi(t)) < T_0(-t_0)^{1/2}(-t)^{-1/2},$$

которая совпадает со вторым неравенством а) при $z = z_\varphi$.
Этот пример, в частности, показывает с какими трудностями связано определение временных закономерностей функции $T(z,t)$ непосредственно из интеграла (I.7).

<u>Замечание</u>. Доказательство леммы 2 проведено для $LS\ (-1<n<0)$ и S - режимов $(n=-1)$. В HS -режиме $(n<-1)$ производная $V_a(z,t)$ терпит разрыв в точках

$$z = z_\varphi(t) = \xi_\varphi(n)(K_0 R_0)^{1/2}(-t)^{(1+n)/2},$$

поэтому в этом случае предыдущее доказательство не проходит, поскольку равенство нулю первой производной функции $Z(z,t) = V(z,t) - V_a(z,t)$ в точках ее экстремума, если хотя бы при одном t точка экстремума совпадет с $z_\varphi(t)$ неоправедливо. Если же предположить, что при любых t в доказательстве леммы 2

$$z_i(t) \neq z_\varphi(t),\ i=1,2,\ t_0<t<0,$$

то утверждения леммы справедливы и для HS -режима. Покажем, что даже в случае, когда в течение всего времени существования точек экстремума $(t, z_i(t))$ выполнено $z_i(t) = z_\varphi(t)$, $i=1,2$ (3.25)-(3.26) на симптотической стадии остаются в силе. Доказательство этого утверждения проведем на примере оценки (3.26), т.е. для точек положительного экстремума функции $Z(z,t)$. Рассмотрим интеграл (I.7),(3.I) в точках

$$z_0(t) = \xi_0(K_0 R_0)^{1/2}(-t)^{(1+n)/2},\ n<-1.$$

При $\xi_0 = \xi_\varphi(n)$ функция $z_0(t)$ описывает закон изменения со временем фронта автомодельного решения $V_a(z,t)$. Из (I.7) получаем оценку

$$T(z_0(t),t) < T_0\left(\frac{R_0}{\pi}\right)^{1/2}\xi_0(-t)^{\frac{1+n}{2}}\int_{t_0}^{t}\exp\left[-\frac{R_0\xi_0^2(-t)^{1+n}}{4(t-\tau)}+R_0(-\tau)^n\right]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}$$

В результате замены переменной в интеграле $s = 1/(t-\tau)$ приходим к неравенству

$$T(\xi_0(t),t) < T_0\left(\frac{R_0}{\pi}\right)^{1/2} \xi_0(-t)^{(1+n)/2} \int\limits_{\frac{1}{(t-t_0)}}^{\infty} \exp\left[-\frac{R_0\xi_0^2}{4}(-t)^{1+n}s + R_0\left(\frac{1}{s}-t\right)^n\right]\frac{ds}{s^{1/2}}$$

Рассмотрим выражение, стоящее под знаком экспоненты в правой части этогонеравенства. Нетрудно показать, что при всех $1/(t-t_0) \leqslant s < \infty$

$$-\frac{R_0}{4}\xi_0^2(-t)^{1+n}s + R_0\left(\frac{1}{s}-t\right)^n \leqslant A(t)\,s,$$

где

$$A(t) = R_0\left[(-t_0)^n(t-t_0) - \frac{\xi^2}{4}(-t)^{1+n}\right].$$

Отсюда получаем следующую цепочку неравенств

$$\int\limits_{\frac{1}{(t-t_0)}}^{\infty} \exp\left[-\frac{R_0\xi_0^2}{4}(-t)^{1+n}s + R_0\left(\frac{1}{s}-t\right)^n\right]\frac{ds}{s^{1/2}} < \int\limits_{\frac{1}{(t-t_0)}}^{\infty} \exp\left[A(t)s\right]\frac{ds}{s^{1/2}} <$$

$$< \int\limits_0^{\infty} \exp\left[A(t)s\right]\frac{ds}{s^{1/2}} = 2(-A)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\infty}\exp(-\eta^2)\,d\eta = \left(\pi A^{-1}\right)^{1/2}.$$

Естественно, последнее преобразование в этой цепочке возможно только в случае, когда $A<0$, т.е., когда

$$\xi_0 > \left[4\,\frac{(-t_0)^n(t-t_0)}{(-t)^{1+n}}\right]^{1/2}.$$

Рассматривая выражение, стоящее в правой части этого неравенства, как функцию t, определим, что его максимум достигается при $t = t_0(1+n)/n$, откуда заключаем, что должно быть выполнено

$$\xi_0 > 2\,(-n)^{n/2}(-1-n)^{-(1+n)/2}.$$

Выражение, стоящее в правой части, в точности совпадает с формулой (3.20), определяющей координату фронта автомодельного решения. Это совпадение служит иллюстрацией к тому, что построение автомодельных решений усеченной задачи есть один из возможных способов анализа интеграла (I.7).

При достаточно больших t функция $A(t)$ всегда отрицательна. Тогда из построенной цепочки неравенств получаем оценку

$$T(z_0(t),t) < \frac{T_0}{2}\frac{\xi_0(-t)^{\frac{1+n}{2}}}{\left[\frac{\xi_0^2}{4}(-t)^{1+n}+t_0(t-t_0)\right]^{1/2}} \to T_0,\ t\to 0^-,$$

которая справедлива при достаточно больших t. Отсюда заключаем, что функция $T(z,t)$, а следовательно и $V(z,t)$, ограничены в точках $z=z_0(t)$ (следовательно, и при $z=z_\varphi(t)$) на асимптотической стадии процесса. Например, последняя оценка справедлива при $z_0(t)=z_\varphi(t)$ и $t>t_0(1+n)/n$.

Таким образом, установлено, что оценка (3.26) выполняется и в случае HS-режима $(n<-1)$ на асимптотической стадии.

Совершенно очевидно, что оценка (3.26) справедлива при $z = z_\varphi(t)$, поскольку в этой точке $V_a(z,t)\equiv 0$, $t_0<t<0$. Следовательно, при $t\to 0^-$ утверждения леммы 2 становятся справедливыми и для HS-режима. Тогда для HS-режима становятся справедливыми и оценки (3.25) – (3.26). Из этих оценок и свойств функции $\theta(\xi)$ нетрудно получить, что в каждой фиксированной точке пространства $T(z,t)$ на асимптотической стадии растет по экспоненциальному закону

$$T(z,t)\sim \exp\left[R_0(-t)^n - z\left(\frac{R_0}{K_0}(-n)\right)^{1/2}(-t)^{-\frac{1-n}{2}}\right],\ t\to 0^-.$$

Необходимость дополнительного анализа в HS-режиме связана с недостаточной гладкостью функции $V_a(z,t)\,(V_a(z,t)\in C^{1,1}(Q_0))$.

Вырождение уравнения (3.6) (поскольку (3.6) – уравнение первого порядка, то его можно считать всюду вырожденным параболическим уравнением второго порядка) ведет к возникновению особенностей у решения (в S -режиме автомодельное решение имеет в точке $z = z_\varphi$ разрыв второй производной, в HS -режиме разрывна при $z = z_\varphi(t)$ первая производная), т.е. решение следует определять в некотором обобщенном смысле. Неклассичность при $n < -1$ автомодельных решений усеченной задачи приводит к дополнительным трудностям в доказательстве леммы 2, которые были преодолены путем анализа интегрального представления решения. В общем случае для устранения особенностей обобщенных решений вырождающихся уравнений часто используется метод построения последовательности достаточно гладких решений данного уравнения (посредством гладкой аппроксимации краевых данных), сходящейся к обобщенному решению. Например, в работе [16] подобная процедура проделана для вырождающегося уравнения нелинейной теплопроводности.

Пусть $\theta_v^{n,n}(\xi,t)$ – автомодельное представление функции $V(z,t)$ при $(t,z) \in Q_0$ с коэффициентами $A = (T_0 R_0)^{-1}$ и $B = (K_0 R_0)^{1/2}$, т.е.

$$\theta_v^{n,n}(\xi,t) = (T_0 R_0)^{-1}(-t)^{-n} V\left(\xi (K_0 R_0)^{1/2}(-t)^{(1+n)/2}, t\right), (t,\xi) \in Q_0.$$

Следующая теорема дает оценку скорости сходимости в C автомодельного представления $\theta_v^{n,n}(\xi,t)$ к функции $\theta(\xi)$.

<u>Теорема 2</u>. При $-1 \le n < 0$ и каждом фиксированном $\bar{t}_0 \le t < 0$

$$\|\theta_v^{n,n}(\xi,t) - \theta(\xi)\|_C \le R_0^{-1} \|\theta''_{\xi\xi}(\xi)\|_C (-t)^{-n} \ln \frac{t_0}{t}, \qquad (3.36)$$

где величина $\bar{t}_0$ равна

$$\bar{t}_0 = t_0 \exp\left(-R_0 / \|\theta''_{\xi\xi}(\xi)\|_C\right) > t_0 .$$

Доказательство. Поскольку при $\bar{t}_0 \le t < 0$

$$T_0 R_0(-t)^n \le T_0 \|\theta''_{\xi\xi}(\xi)\|_C \ln\frac{t_0}{t},$$

из утверждений леммы 2 неравенств (3.25)-(3.26) получаем

$$|V(z,t) - V_a(z,t)| \le T_0 \|\theta''_{\xi\xi}(\xi)\|_C \ln\frac{t_0}{t}, \bar{t}_0 \le t < 0, 0 \le z < \infty.$$

Отсюда непосредственно следует оценка (3.36). Теорема доказана.

<u>Следствие.</u> В условиях теоремы 2 из неравенства (3.36) следует, что автомодельное представление решения исходной задачи (3.3)-(3.5) при $t \to 0^-$ сходится в C к автомодельному решению (3.11)-(3.13), т.е.

$$\lim_{t \to 0^-} \|\theta_v^{n,n}(\xi,t) - \theta(\xi)\| = 0. \qquad (3.37)$$

На рис.5 показана сходимость (3.37) на примере численного решения задачи (3.3)-(3.5) в S -режиме (автомодельные представления сходятся к функции (3.19)).

<u>Замечание I.</u> Предельное равенство (3.37) можно доказать без использования точной оценки (3.36). Можно показать, что функция

$$Y(z,t) = (V(z,t) - V_a(z,t))(-t)^{\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ и $n + \varepsilon < 0$, начиная с некоторого момента времени не возрастает по модулю. Для доказательства этого утверждения выпишем уравнение, которому в Q_0 удовлетворяет функция Y. Оно имеет вид

$$Y_t = K_0 Y_{zz} + \frac{K_0}{T_0} Y_z((-t)^{-\varepsilon} Y_z + 2V_{az}) + \\ + (-t)^{\varepsilon} K_0 V_{azz} - \varepsilon(-t)^{-1} Y. \qquad (3.38)$$

Поскольку $Y \in C^{1,1}(Q_0)$ при $-1 \le n < 0$, то в точках экстремума $Y_z = 0$. Поэтому уравнение (3.38) в точках экстремума принимает вид

$$Y_t = K_0 Y_{zz} + (-t)^{\varepsilon} K_0 V_{a_{zz}} - \varepsilon(-t)^{-1} Y. \qquad (3.39)$$

Используя временные закономерности автомодельного решения $V_a(z,t)$, из (3.39) получим

$$Y_t = K_0 Y_{zz} + (-t)^{-1}\left[T_0 \theta''_{\xi\xi}(\xi)(-t)^{\varepsilon} - \varepsilon Y\right], \qquad (3.40))$$

где $\xi = z/(K_0 R_0)^{1/2}(-t)^{(1+n)/2}$. Из (3.40) получаем, что в точке положительного максимума

$$Y_t \leqslant \varepsilon(-t)^{-1}\left[\frac{T_0}{\varepsilon}\|\theta''_{\xi\xi}(\xi)\|_C(-t)^{\varepsilon} - Y\right]. \qquad (3.41)$$

Отсюда получаем, что функция Y не может неограниченно возрастать, поскольку, как только в точке положительного максимума будет

$$Y > \frac{T_0}{\varepsilon}\|\theta''_{\xi\xi}(\xi)\|_C(-t)^{\varepsilon} \longrightarrow 0,\ t \to 0^-,$$

то из (3.41) получаем, что $Y_t < 0$.

Аналогично можно показать, что $Y(z,t)$ не может неограниченно убывать при $t \to 0^-$.

Таким образом, существует такая константа $N > 0$, что

$$|Y(z,t)| = |V(z,t) - V_a(z,t)|(-t)^{\varepsilon} < N. \qquad (3.42)$$

Умножая обе части неравенства (3.42) на $(-t)^{-n-\varepsilon}$ и переходя к пределу при $t \to 0^-$, приходим к предельному равенству (3.37).

<u>Замечание 2.</u> Из замечания к лемме 2 следует, что оценка (3.36) становится справедливой при достаточно больших t и для случая $n < -1$ (HS - режим). Поэтому предельное равенство (3.37) выполняется в HS-режиме. На рис.6 численным расчетом задачи (3.3)-(3.5) в HS-режиме ($n=-3$) показано, что автомодельные представления решения сходятся к функции (3.22).

п.3.4. Динамические характеристики экспоненциальных LS, S и HS-режимов.

Динамические свойства LS, S и HS режимов в силу предельного равенства (3.37) должны совпадать с соответствующими свойствами автомодельного решения усеченной задачи

$$T_0(z,t) = T_0\{\exp[V_0(z,t)/T_0]-1\} \qquad (3.43)$$

на асимптотической стадии развития экспоненциальных режимов с обострением.

I. Для определения эффективной глубины (полуширины) проникновения тепла необходимо при каждом $t_0<t<0$ решить уравнение

$$T(z_{эф}(t),t) = \frac{1}{2}T(0,t) = \frac{1}{2}T_0\{\exp[R_0(-t)^n]-1\}.$$

Для приближенного решения этого уравнения воспользуемся оценками (3.25′) – (3.26′).

При $\xi \ll 1$ функция $\Theta(\xi)$ имеет вид (см. п.3.2)

$$\Theta(\xi) = 1-\sqrt{-n}\,\xi + O(\xi^2).$$

Отсюда тем же способом, что и при выводе закона изменения $z_{эф}(t)$, $t_0<t<0$ в случае степенных LS-режимов (см. § 2, п.2.4), получаем, что при $t\to 0^-$ полуширина в случае экспоненциальных LS, S и HS-режимов сокращается по закону

$$z_{эф}(t) = \ln 2\,[K_0/R_0(-n)]^{1/2}(-t)^{(1-n)/2} + O[(-t)^{(3-n)/2}]. \qquad (3.44)$$

Заметим, что первый член формулы (3.44) дает приближенное решение интегрального уравнения

$$\frac{z_{эф}(t)}{2\sqrt{K_0\pi}}\int_{t_0}^{t}\exp\left[-\frac{z_{эф}^2(t)}{4K_0(t-\tau)}+R_0(-t)^n\right]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} = \frac{1}{2}\exp[R_0(-t)^n], \quad t_0<t<0,$$

причем относительная точность решения улучшается при $t\to 0^-$, поскольку

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{z_{эф}(t)}{\ln 2\,[K_0/R_0(-n)]^{1/2}}(-t)^{-(1-n)/2} = 1.$$

Из оценок (3.25)- (3.26) также нетрудно установить, что во всех трех режимах энергетическая полуширина при $t\to 0^-$ сокращается по закону

$$z_{эн}(t) = [K_0/R_0(-n)]^{1/2}\left(+\frac{1-n}{4}\right)(-t)^{\frac{1-n}{4}} + o\left[(-t)^{\frac{1-n}{4}}\right]. \qquad (3.45)$$

Таким образом, глубина проникновения тепловой волны, а вместе с ней область, в которой распределяется вновь поступившее с границы тепло, сокращаются на асимптотической стадии экспоненциальных LS, S и HS-режимов с обострением по законам (3.44)-(3.45

На рис.7.-9. приведены результаты численных расчетов преобразованной задачи (3.3)-(3.5) соответственно в $S\,(n=-1)$, HS $(n=-3)$ и LS -режимах $(n=-0.75)$.

Как следует из временных закономерностей автомодельных решений усеченной задачи, полуширина и энергетическая полуширина функции $V(z,t)$ изменяются со временем по закону

$$z_{эф}(t),\, z_{эн}(t) \simeq (-t)^{\frac{1+n}{2}} + o\left[(-t)^{\frac{1+n}{2}}\right],$$

что подтверждают представленные численные расчеты. В HS режиме (рис.8) тепловая волна имеет ярко выделенный фронт, который движется в соответствии с автомодельным законом и $\xi_{ф}$, вычисленной из (3.20).

2. Определим теперь характер переноса реальных физических состояний, например, фиксированной температуры $T^0>0$. Для этого воспользуемся оценками (3.25)-(3.26) и анализом предельных распределений, проведенным в § I.

В LS-режиме температура в течение всего времени обострения ограничена предельным распределением (I.II), поэтому любая фиксированная температура $T^0>0$ переносится на конечное расстояние.

В частности, используя результаты анализа автомодельного решения усеченной задачи в LS -режиме получим, что для достаточно больших T^0 $(T^0 \gg T_0)$

$$z_T(t) < z_T(0) \simeq \left[C^{-1}(n)\left(\frac{R_0}{K_0^n}\right)^{\frac{1}{1+n}} \ln\frac{T^0}{T_0}\right]^{\frac{1+n}{2n}}, \qquad (3.46)$$

где $C(n)$ вычисляется из формулы(3.18). Эту же оценку можно вывести непосредственно из интегрального представления предельной кривой в LS -режиме (см. (I.II))

В S -режиме усеченная автомодельная задача выделяет главную асимптотику $T(z,t)$ в области $0<z<z_\varphi$ на асимптотической стадии процесса (см. замечание к лемме 2)

$$T(z,t) \sim \exp\left[R_0(-t)^{-1}(1-z/z_\varphi)^2\right], 0<z<z_\varphi, t\to 0^-.$$

Отсюда (см. (3.25)-(3.26)), в частности, следует, что перенос достаточно больших T^0 происходит при $t\to 0^-$ по закону

$$z_T(t) = z_\varphi\left(1 - C_1^{1/2}(T^0,t)(-t)\right), \qquad (3.48)$$

где функция $C_1(T^0,t)$ изменяется со временем не быстрее логарифма, так что

$$\lim_{t\to 0^-}\left|\frac{C_1(T^0,t)}{\ln(-t)}\right| = const < \infty.$$

Для случая HS -режима в замечании к лемме 2 выделена главная асимптотика $T(z,t)$ на асимптотической стадии развития процесса

$$T(z,t) \sim \exp\left[R_0(-t)^n - z\left(\frac{R_0(-n)}{K_0}\right)^{1/2}(-t)^{-\frac{1-n}{2}}\right], t\to 0^-. \qquad (3.49)$$

Из неравенств (3.25)-(3.26) следует, что перенос фиксированной температуры T^0 происходит при $t\to 0^-$ по закону

$$z_T(t) = \left(\frac{K_0 R_0}{(-n)}\right)^{1/2}(-t)^{(1+n)/2} + C_2(T^0,t), \qquad (3.50)$$

где функция $C_2(T^0,t)$ изменяется со временем не более, чем по логарифмическому закону.

Экспоненциальные LS, S и HS - режимы существенно различаются по характеру пространственного переноса реального физического состояния:

а) в LS -режиме $(-1<n<0)$ перенос любой температуры $T^0>0$ ограничен по пространству, причем (см. (3.46))

$$\lim_{T^0\to\infty}\sup_t z_T(t)=0,$$

б) в S -режиме ($n=-1$) перенос любой температуры также ограничен, но в отличие от LS -режима (см. (3.48))

$$\lim_{T^0\to\infty}\sup_t z_T(t)=z_\varphi>0,$$

в) в HS -режиме ($n<-1$) любое фиксированное состояние температуры T^0 переносится на бесконечность (см. (3.50))

$$\lim_{t\to 0^-} z_T(t)=\infty.$$

Поскольку экспоненциальные режимы не имеют принципиального различия в характере изменения со временем полуширины или энергетической полуширины (формулы (3.44)-(3.45) "непрерывно зависят от параметра n), классификацию этих режимов можно проводить по характеру переноса реального физического состояния - температуры T^0 . Заметим, что приведенная здесь классификация также справедлива и для степенных LS, S, HS - режимов в среде с нелинейной теплопроводностью (см. работы [1-6]).

3. Установлено, что главная часть асимптотики $(t\to 0^-)$ решения исходной задачи в области его неограниченного возраста-

ния описывается автомодельным решением усеченной задачи (см. формулы (3.47) и (3.49) для S и HS - режимов). Таким образом, при $t \to 0^-$ происходит своеобразное "вырождение" уравнения (I.I) - асимптотика функции $T(z,t)$ при $t \to 0^-$ удовлетворяет уравнению первого порядка. Исходное уравнение (I.I) можно записать в виде

$$T_t = K_0 T_{zz} = K_0 \frac{T_z^2}{T_0+T} + K_0 \frac{T_{zz}(T+T_0) - T_z^2}{T_0+T}. \qquad (3.51)$$

Тогда переход от исходной задачи (3.3)-(3.5) к усеченной (3.6)-(3.8) соответствует исключению из правой части (3.51) последнего члена. Поэтому, экспоненциальные режимы (3.I) создают в пространстве такие профили температуры, что для всех точек z, таких, что

$$T(z,t) \to \infty, \quad t \to 0^-,$$

выполняется предельное равенство

$$\lim \left| \frac{T_{zz}(z,t)[T(z,t)+T_0] - T_z^2(z,t)}{T_z^2(z,t)} \right| = 0. \qquad (3.52)$$

Таким образом асимптотическая стадия экспоненциальных режимов с обострением описывается уравнением

$$T_t = K_0 \frac{T_z^2}{T_0+T}. \qquad (3.53)$$

В § 2 были построены автомодельные решения вырожденного (усеченного) уравнения (3.53). Заметим, что автомодельное решение (3.43) может быть найдено без применения преобразования (3.2) путем формальных выкладок. Действительно, будем искать инвариантно-групповое решение уравнения (3.53) в виде

$$T_a(z,t) = \Phi(V_a(z,t)),\ (t,z) \in Q_0^a, \tag{3.54}$$

где $\Phi(\xi)$ – неизвестная функция. Подставив (3.54) в (3.53), получаем равенство

$$\Phi'_\xi(\xi)\, V_{a_t}(z,t) = k_0 \frac{\Phi'^2_\xi(\xi)\, V^2_{a_z}(z,t)}{T_0 + \Phi(\xi)}. \tag{3.55}$$

Отсюда получаем, что должно быть выполнено равенство

$$\Phi'_\xi(\xi) = \frac{\Phi'^2_\xi(\xi)}{T_0 + \Phi(\xi)},$$

откуда получаем выражение

$$\Phi(\xi) = T_0\left[\exp(\xi/T_0) - 1\right]. \tag{3.56}$$

Учитывая (3.56) из (3.55), получаем уравнение для функции $V_a(z,t)$, в точности совпадающее с усеченным уравнением (3.6), для которого уже построены автомодельные решения (3.9)–3.10).

§ 4. Форма области локализации в многомерной геометрии

В этом параграфе на примере одной задачи для многомерного уравнения линейной теплопроводности, решение которой представимо в виде теплового потенциала, показано, что область локализации может иметь разнообразную форму.

п.4.1. Тепловые потенциалы в многомерном случае

Рассмотрим в $Q_0^{(N)} = \{(t, x_1, \dots, x_N):\ t_0 \le t < 0,$

$(x_1,\dots,x_N)\in\Omega^{(N)}\}$, где $\Omega^{(N)}=\{(x_1,\dots,x_N): 0<x_1<\infty,$ $-\infty<x_j<\infty,\ j=2,\dots,N\}$ – область N – мерного эвклидова пространства R^N, первую краевую задачу для уравнения линейной теплопроводности

$$u_t=\Delta u=\sum_{j=1}^{N}u_{x_jx_j} \tag{4.1}$$

с краевыми условиями

$$u(t,0,x_2,\dots,x_N)=\Phi(t,x_2,\dots,x_N),\ t_0\le t<0,\ (x_2,\dots,x_N)\in R^{N-1}, \tag{4.2}$$

$$u(t_0,x_1,x_2,\dots,x_N)=0,\ (x_1,\dots,x_N)\in\Omega^{(N)}. \tag{4.3}$$

В задаче (4.1)–(4.3) функция $u(t,x_1,\dots,x_N)$ – температура среды, формула (4.2) определяет граничный режим, заданный на плоскости $x_1=0$. Для простоты в уравнении (4.1) коэффициент теплопроводности равен единице.

Будем считать, что граничный закон (4.2) изменяется при $t\to 0^-$ в режиме с обострением, так что существует непустое множество $E_0\subseteq R^{N-1}$ такое, что

$$\lim_{t\to 0^-}\Phi(t,x_2,\dots,x_N)=+\infty,\ (x_2,\dots,x_N)\in E_0. \tag{4.4}$$

Будем предполагать, что функция Φ неотрицательна и непрерывна при $t_0\le t<0$ и $(x_2,\dots,x_N)\in R^{N-1}$ и всюду в $Q_0^{(N)}$ существует классическое решение сформулированной задачи. В силу принципа суперпозиции для линейной задачи несущественным является вопрос о согласовании краевых условий (4.2)–(4.3).

Введем следующие обозначения: $X=(x_1,\dots,x_N)$, $X'=(x_2,\dots,x_N)$, так что $\int\limits_{\Omega^{(N)}}(\cdot)\,dX$ означает интегрирование

по области $\Omega^{(N)}$, а $\int\limits_{R^{N-1}}(\cdot)\,dX'$ – интегрирование по пространству R^{N-1}.

Решение сформулированной задачи представимо в виде многомерного теплового потенциала [13]

$$u(t,X)=-2\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_{R^{N-1}}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}(t-\tau,x_1,X'-Y')\,\Phi(\tau,Y')\,dY', \quad (4.5)$$

где $\Gamma(\eta,X)$ – фундаментальное решение оператора линейной теплопроводности

$$\Gamma(\eta,X)=\frac{1}{(4\pi\eta)^{N/2}}\exp\left[-\frac{\|X\|^2}{4(-t)}\right],\ \|X\|=\left(\sum_{j=1}^{N}x_j^2\right)^{1/2}. \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в (4.5), получим

$$u(t,X)=\frac{x_1}{(4\pi)^{N/2}}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{N+2}{2}}}\int\limits_{R^{N-1}}\exp\left[-\frac{\|X'-Y'\|^2+x_1^2}{4(t-\tau)}\right]\Phi\,dY'. \quad (4.7)$$

Внутренний интеграл в (4.7) преобразуем к виду

$$\exp\left[-\frac{\|X'\|^2}{4(t-\tau)}\right]\int\limits_{R^{N-1}}\exp\left[-\frac{\|Y'\|^2-2X'\cdot Y'}{4(t-\tau)}\right]\Phi(\tau,Y')\,dY',$$

где $X'\cdot Y'=\sum\limits_{j=2}^{N}x_jy_j$ – скалярное произведение, в результате чего получим окончательное выражение

$$u(t,X)=\frac{x_1}{(4\pi)^{N/2}}\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left[-\frac{\|X\|^2}{4(t-\tau)}\right]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{(N+2)/2}}\times$$
$$\times\int\limits_{R^{N-1}}\exp\left[-\frac{\|Y'\|^2-2X'\cdot Y'}{4(t-\tau)}\right]\Phi(\tau,Y')\,dY'. \quad (4.8)$$

Решение сформулированной задачи в этом виде будет использовано для анализа возможных форм областей локализации тепловых возмущений. Заметим, что интегральное представление решения задачи для уравнения (4.I) существует только для указанной здесь области $\Omega^{(N)}$, для других областей решение записывается в виде бесконечного ряда и не имеет конечного представления.

п.4.2. Определение локализации возмущений

По аналогии с определением локализации, данном в § I для одномерного случая, сформулируем следующее определение

Определение. Будем говорить, что в задаче (4.I)-(4.4) имеет место локализация тепла, если существует такое непустое множество $\Omega_{\varphi}^{(N)} \subset \Omega^{(N)}$, $mes(\Omega^{(N)} \setminus \Omega_{\varphi}^{(N)}) > 0$, что

(A) для любой области $\omega^{(N)} \subset \Omega^{(N)} \setminus \Omega_{\varphi}^{(N)}$, $(\bar{\Omega}_{\varphi}^{(N)} \setminus \Omega_{\varphi}^{(N)}) \setminus (\bar{\omega}^{(N)} \setminus \omega^{(N)}) = \emptyset$, $mes\,\omega^{(N)} < \infty$ выполнено неравенство

$$\lim_{t \to 0^-} \int_{\omega^{(N)}} u(t,Y)\,dY < \infty,$$

(B) для всех $X \in \Omega_{\varphi}^{(N)}$

$$\lim_{t \to 0^-} u(t,X) = \infty.$$

Если $mes(\Omega^{(N)} \setminus \Omega_{\varphi}^{(N)}) = 0$, то локализация в задаче отсутствует.

Так же, как в § I для одномерного случая, ставится задача определения режимов с обострением (4.2),(4.4), обеспечивающих неограниченное возрастание температуры в области локализации $\Omega_{\varphi}^{(N)} \neq \Omega^{(N)}$. При этом в остальную часть пространства должно проникнуть конечное количество тепла и температура, следовательно, должна быть ограничена сверху в течение всего процесса

нагрева.

Для решения этой задачи воспользуемся предельным распределением температуры в $\Omega^{(N)}$, которое получим из (4.8) в результате предельного перехода $t \to 0^-$

$$u(0^-,X) = \frac{x_1}{(4\pi)^{N/2}} \int_{t_0}^{0} \exp\left[-\frac{\|X\|^2}{4(-\tau)}\right] \frac{d\tau}{(-\tau)^{(N+2)/2}} \times$$
$$\times \int_{R^{N-1}} \exp\left[-\frac{\|Y'\|^2 - 2X'\cdot Y'}{4(-\tau)}\right] \Phi(\tau, Y')\, dY'. \qquad (4.9)$$

Множество $\Omega_{\varphi}^{(N)}$ определяет те точки области $\Omega^{(N)}$, в которых расходится интеграл, стоящий в правой части (4.9). Из (4.9) следует, что все граничные режимы

$$\Phi(t,X) \geqslant \exp\left[\varphi(X')(-t)^n\right], n<-1,$$

где функция $\varphi(X')$ такова, что

$$\operatorname{mes}\{X' : \varphi(X') > 0\} > 0,$$

не будут локализованы, то есть для всех $X \in \Omega^{(N)}$

$$\lim_{t \to 0^-} u(t,X) = \infty.$$

Если же

$$\Phi(t,X') \leqslant \exp\left[\psi(X')(-t)^n\right], -1<n<0,$$

где функция $\psi(X')$ принимает при некоторых X' из R^{N-1} положительные значения, то условия (А) и (В) определения локализации выполняются при $\Omega_{\varphi}^{(N)} = \{X' : \psi(X') > 0\}$, так что $\operatorname{mes} \Omega_{\varphi}^{(N)} = 0$.

Если

$$\Phi(t,X') = \exp\left[\psi(X')(-t)^{-1}\right],$$

где $0 < \mathrm{mes}\{X' : \psi(X') > 0\} < \infty$,

то, как следует из интегрального представления предельного распределения (4.9), в задаче существует локализация возмущений, причем в зависимости от функций $\psi(X')$ форма области может быть весьма разнообразной.

Заметим, что временные закономерности локализованных и нелокализованных режимов совпадают с закономерностями, полученными в § I для одномерной задачи.

п.4.3. Аналитические примеры областей локализации в двумерном случае

Здесь будет показано, что в двумерном случае границей области локализации $\Omega_{\varphi}^{(2)}$ может служить любая из кривых второго порядка.

Рассмотрим задачу (4.I)-(4.4) в двумерной геометрии ($N = 2$):

$$X = (x_1, x_2), \quad X' = (x_2).$$

Тогда граничное условие (4.2) задано на прямой $x_1 = 0$

$$u(t,0,x_2) = \Phi(t,x_2),$$

и решение сформулированной задачи имеет вид (см. (4.8))

$$u(t,x_1,x_2) = \frac{x_1}{4\pi}\int_{t_0}^{t}\exp\left[-\frac{x_1^2+x_2^2}{4(t-\tau)}\right]\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{y^2-2x_2y}{4(t-\tau)}\right]\Phi(\tau,y)\,dy, \quad (t,X)\in Q_0^{(2)}, \qquad (4.10)$$

откуда (см. (4.9)) для предельного распределения температуры получаем

$$u(0^-,x_1,x_2)=\frac{x_1}{4\pi}\int\limits_{t_0}^{0}\exp\left[-\frac{x_1^2+x_2^2}{4(-\tau)}\right]\frac{d\tau}{(-\tau)^2}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{y^2-2x_2y}{4(-\tau)}\right]\Phi(\tau,y)\,dy\,,\ X\in\Omega^{(2)}. \qquad (4.11)$$

I. Рассмотрим граничные режимы экспоненциального вида (см. формулу (I.9))

$$\Phi(t,x_2)=(-t)^{\nu}\exp\left[P(x_2)(-t)^{-1}\right],\ t_0\le t<0,\ x_2\in R^1, \qquad (4.12)$$

где ν – параметр семейства, а функция $P(x_2)$ принимает положительные значения на непустом множестве области $\{x_2:$ $-\infty<x_2<\infty\}=R^1$.

Внутренний интеграл выражения, стоящего в правой части (4.II) вычисляется аналитически в том случае, когда функция $P(x_2)$ является квадратным трехчленом

$$P(x_2)=ax_2^2+2bx_2+c, \qquad (4.13)$$

где a, b, c – некоторые константы, причем в том случае, когда $a<0$, дискриминант трехчлена положителен: $b^2-ac>0$ Это условие связано с тем, что формула (4.I2) должна определять режим с обострением.

Внутренний интеграл выражения (4.II) принимает в этом случае вид

$$I(x_2,\tau)=(-\tau)^{\nu}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{(a-1)y^2+2y(x_2+b)+c}{4(-\tau)}\right]dy. \qquad (4.14)$$

Рассмотрим следующие случаи:

а) $a \geqslant 1$. Тогда интеграл (4.I4) расходится при всех $x_2 \in R^1$ и локализация тепла в задаче отсутствует,

б) $a < 1$. Тогда интеграл (4.I4) сходится при всех и равен

$$I(x_2,\tau) = (-\tau)^{\nu+1/2}\left(\frac{4\pi}{1-a}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{(x_2+b)^2}{1-a} + C\right]. \qquad (4.I5)$$

Подставив (4.I5) в (4.II), получим для предельного распределения следующее представление

$$u(0^-,x_1,x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{4\pi(1-a)}} \int_{t_0}^{0} \exp\left[\frac{-x_1^2 - x_2^2 + \frac{(x_2+b)^2}{1-a} + C}{4(-\tau)}\right] \frac{d\tau}{(-\tau)^{-\nu+3/2}} \qquad (4.I6)$$

Как следует из (4.I6), любая точка (x_1, x_2) из области локализации $\Omega_\varphi^{(2)}$ должна удовлетворять неравенству

$$-x_1^2 - x_2^2 + \frac{(x_2+b)^2}{1-a} + C > 0,$$

откуда следует, что границей области локализации $\Gamma_\varphi^{(2)} = \overline{\Omega}_\varphi^{(2)} \setminus \Omega_\varphi^{(2)}$ является множество

$$x_1^2 - \frac{a}{1-a}x_2^2 - \frac{2bx_2}{1-a} - \frac{b^2}{1-a} - C = 0. \qquad (4.I7)$$

При $0 < a < 1$ и $b^2 - ac \neq 0$ выражение (4.I7) определяет уравнение гиперболы

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{ac-b^2}{a}\right)} - \frac{\left(x_2 + \frac{b}{a}\right)^2}{\left[\frac{(1-a)(ac-b^2)}{1-a}\right]} = 1. \qquad (4.I8)$$

Ориентация ветвей гиперболы (4.I8) зависит от знака дискриминанта $b^2 - ac$ квадратного трехчлена (4.I3) (см.рис.I0).

При $0<a<0$ и $b^2-ac=0$ уравнение гиперболы (4.18) вырождается в уравнение двух пересекающихся прямых

$$x_2=\left(\frac{1-a}{a}\right)^{1/2}x_1-\frac{b}{a}, \tag{4.19}$$

$$x_2=-\left(\frac{1-a}{a}\right)^{1/2}x_1-\frac{b}{a}.$$

При $a=0$ границей $\Gamma_\varphi^{(2)}$ области локализации $\Omega_\varphi^{(2)}$ является парабола

$$x_2=\frac{x_1^2}{2b}-\frac{b^2+c}{2b}. \tag{4.20}$$

Направление ветви параболы зависит от знака коэффициента b.

При $a<0$ уравнение (4.17) определяет эллипс

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{ac-b^2}{a}\right)}+\frac{\left(x_2+\frac{b}{a}\right)^2}{\left[\frac{(1-a)(b^2-ac)}{a^2}\right]}=1. \tag{4.21}$$

Заметим, что большая полуось эллипса принадлежит границе $x_1=0$ (см. рис.11).

Параметр ν в граничных режимах (4.12)-(4.13) определяет значение предельной температуры при $(x_1,x_2)\in\Gamma_\varphi^{(2)}$. Если $\nu\leq 1/2$, то температура при $t\to 0^-$ неограниченно возрастает на $\Gamma_\varphi^{(2)}$, при $\nu>1/2$ температура на границе области локализации стремится снизу к конечному значению

$$u(0^-,x_1,x_2)=\frac{x_1}{\sqrt{4\pi(1-a)}}\,\frac{(-t_0)^{\nu-1/2}}{\nu-1/2},\ (x_1,x_2)\in\Gamma_\varphi^{(2)},\ x_1>0.$$

2. Рассмотрим граничные режимы вида

$$\Phi(t,x_2)=\exp\left[\frac{x_2^2}{4(-t)}\right]\mu(t,x_2), \tag{4.22}$$

где функция $M(t,x_2)$ при больших x_2 растет при $t\to 0^-$ медленнее, чем экспоненциальный множитель, стоящий перед ней в правой части (4.22).

Внутренний интеграл (4.II) имеет в этом случае вид

$$I(x_2,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{2x_2y}{4(-\tau)}\right]M(\tau,y)\,dy. \qquad (4.23)$$

а) Пусть

$$M(\tau,y)=\exp\left[-\frac{2b|y|}{4(-\tau)}\right],\ y\in R^1,$$

где b – некоторая положительная постоянная. Тогда интеграл (4.23) вычисляется аналитически:

$$I(x_2,\tau)=\frac{4(-\tau)b}{b^2-x_2^2},\ |x_2|<b,$$

$$I(x_2,\tau)=\infty,\ |x_2|\geq b.$$

Из (4.II) следует, что предельное распределение температуры существует при $|x_2|<b$, так что

$$\Omega_\varphi^{(2)}=\{x_2: x_2>b\}\cup\{x_2: x_2<-b\},$$

$$\Gamma_\varphi^{(2)}=\{(x_1,x_2): 0<x_1<\infty, x_2=b\}\cup\{(x_1,x_2): 0<x_1<\infty, x_2=-b\}.$$

б) Пусть

$$M(\tau,y)=\begin{cases}\exp\left[\frac{2by}{4(-\tau)}\right], & 0\leq y\leq d\\ 0, & y>d,\ y<0,\end{cases} \qquad (4.24)$$

где b и $d>0$ – некоторые постоянные величины. Тогда внутренний интеграл сходится при всех $x_2 \in R^1$ и равен

$$I(x_2,\tau)=\frac{2(-\tau)}{x_2+b}\left\{\exp\left[\frac{(x_2+b)d}{2(-\tau)}\right]-1\right\},\ x_2\neq -b,$$

$$I(x_2,\tau)=d,\ x_2=-b.$$

Из (4.II) следует, что область локализации характеризуется неравенством

$$x_1^2+(x_2-d)^2<d^2+2db,$$

и ее границей при $d^2+2db>0$ является часть окружности

$$x_1^2+(x_2-d)^2=d^2+2db,\ x_1>0. \qquad (4.25)$$

Таким образом, для двумерной задачи удалось аналитически построить области локализации, границами которых являются все кривые второго порядка. Принцип суперпозиции решений линейной задачи позволяет складывать области локализации, соответствующие различным граничным законам, путем суммирования последних. В частности, этим способом можно получить области локализации тепла с негладкими границами (См. рис.I2, на котором область локализации составлена из круга (4.25) и эллипса (4.2I)).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Самарский, Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. Докл. АН СССР, 1975, 223, № 6, 1344-1347.
2. С.П. Курдюмов. Нелинейные процессы в плотной плазме. В сб. докладов на II-ой Межд. конф. по теории плазмы (Киев, 1974), "Наукова Думка", 1976, 278.
3. Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, А.А. Самарский. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условие ее проявления в эксперименте. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 103.
4. С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, К.Э. Плохотников. Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Тепловой кристалл. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 22.
5. А.П. Михайлов. Метастабильная локализация тепловых возмущений в среде с нелинейной теплопроводностью. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 64.
6. В.А. Галактионов, А.П. Михайлов. Об одной автомодельной задаче для уравнения нелинейной теплопроводности. Препринт ИПМ АН СССР 1977, № 53.
7. А.А. Самарский, Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источниками тепла. Докл. АН СССР, 1976, 227, № 2, 321-324.
8. А.А. Самарский, Г.Г. Еленин, Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов. Горение нелинейной среды в виде сложных структур. Докл. АН СССР, 1977, 237, № 6, 1330-1333.
9. Г.Г. Еленин, С.П. Курдюмов. Условия усложнения организации нелинейной дисипативной среды. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 106

10. С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, Ю.А. Повещенко, Ю.П. Попов, А. А. Самарский. Взаимодействие тепловых структур. Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 77.

11. B.H.Gilding,L.A.Peletier.On a class of similarity solutions of the porous media equation.J.Math.Anal.Appl.,1976,55,2, 351-364.

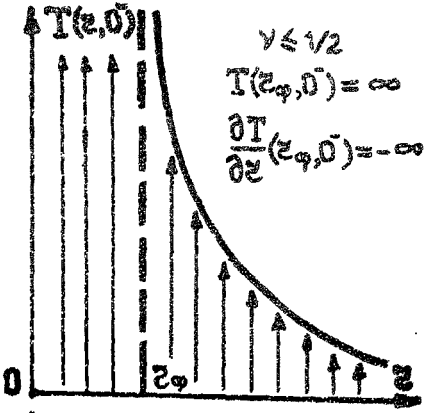
12. B.H.Gilding,L.A.Peletier.On a class of similarity solutions of the porous media equation.J.Math.Anal.Appl.,1977,57,3, 522-538.

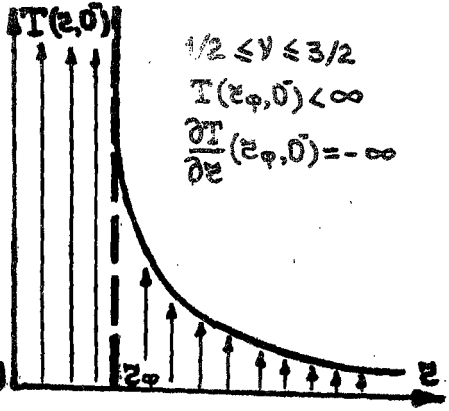
13. О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., "Наука", 1967.

14. А. Фридман. Уравнения в частных производных параболического типа. М., "Мир", 1968.

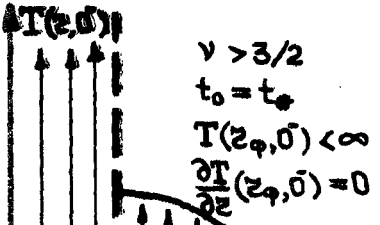
15. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М., "Наука", 1973.

16. О.А. Олейник, А.С. Калашников, Чжоу-Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа неотационарной фильтрации. Изв. АН СССР, 1958, 22, № 5, 667-704.


T(z,0⁻)
ν ≤ 1/2
T(z_φ,0⁻) = ∞
∂T/∂z (z_φ,0⁻) = -∞
0
z_φ
z


T(z,0⁻)
1/2 ≤ ν ≤ 3/2
T(z_φ,0⁻) < ∞
∂T/∂z (z_φ,0⁻) = -∞
0
z_φ
z

T(z,0⁻)
ν > 3/2
t_φ < t_0 < 0
T(z_φ,0⁻) < ∞
∂T/∂z (z_φ,0⁻) > -∞


T(z,0⁻)
ν > 3/2
t_0 = t_φ
T(z_φ,0⁻) < ∞
∂T/∂z (z_φ,0⁻) = 0

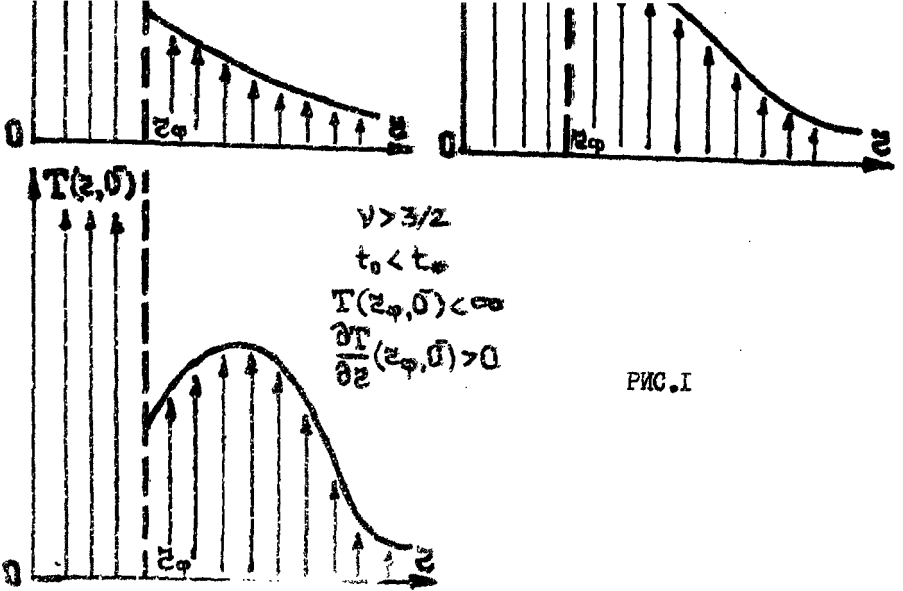

0
z_φ
z
$T(z,0)$
$\nu > 3/2$
$t_0 < t_*$
$T(z_\varphi,0) < \infty$
$\frac{\partial T}{\partial z}(z_\varphi,0) > 0$

РИС.I

	ν	$f'_\xi(0)$	C	$\xi_{эф.}$	$\xi_{эн.}$
1.	-0.25	-0.34	4.35	3.48	1.06
2.	-0.50	-0.56	1.12	1.54	0.87
3.	-1.00	-0.88	$0.9\cdot10^{-2}$	0.86	0.65
4.	-2.00	-1.33	$1.5\cdot10^{-3}$	0.55	0.46
5.	-3.00	-1.66	$3.5\cdot10^{-3}$	0.43	0.39

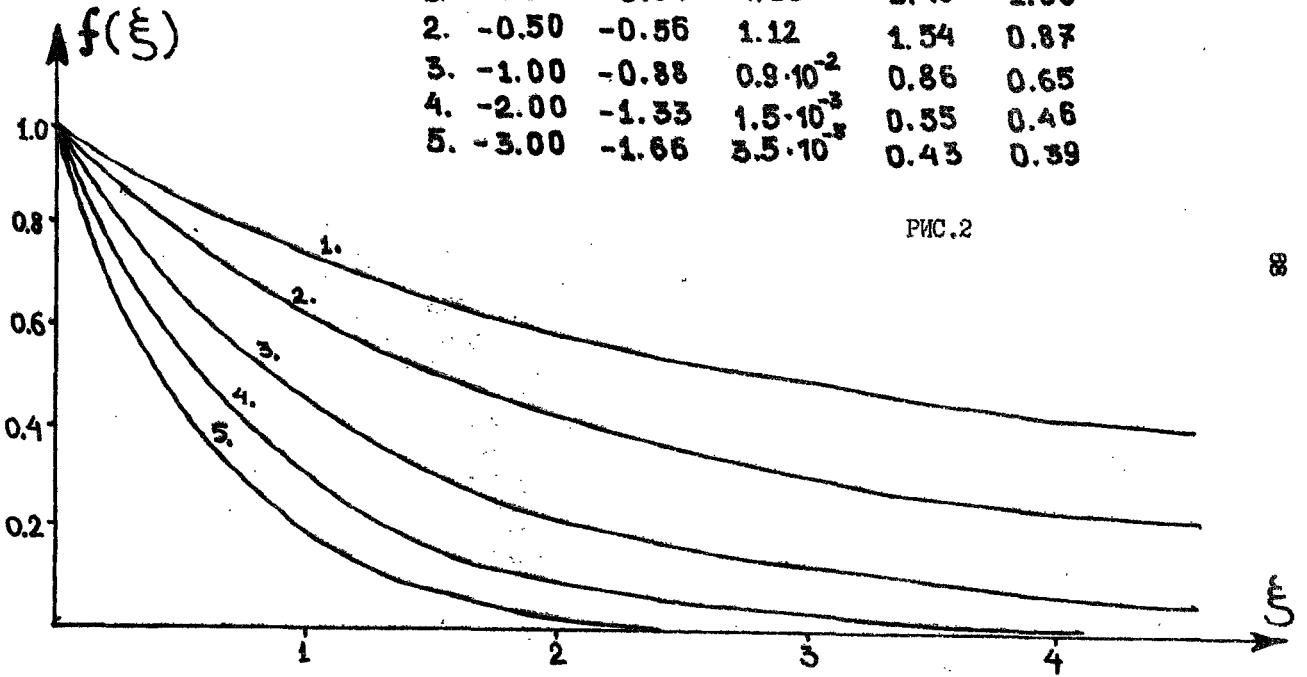


РИС.2

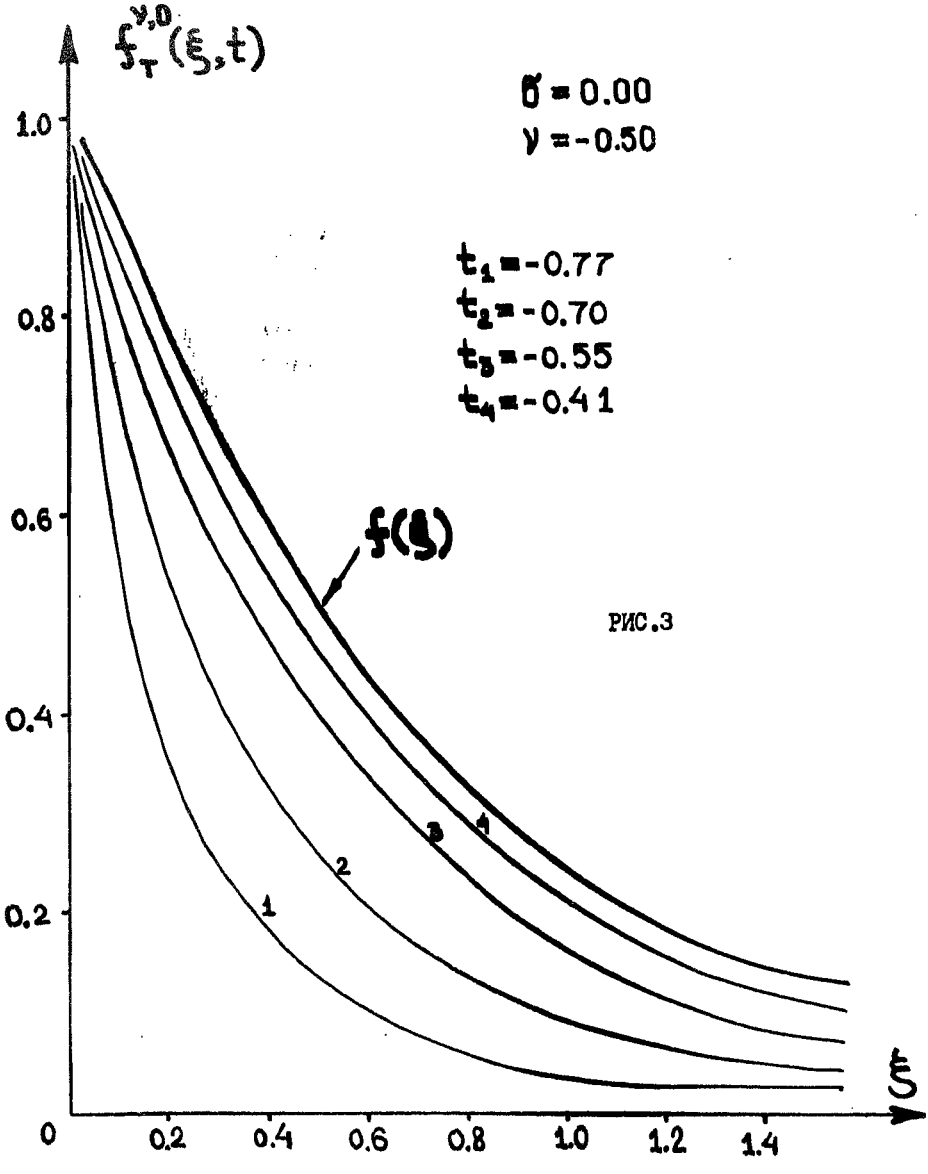

$f_T^{\gamma,0}(\xi,t)$
$\sigma = 0.00$
$\gamma = -0.50$
$t_1 = -0.77$
$t_2 = -0.70$
$t_3 = -0.55$
$t_4 = -0.41$
$f(\xi)$
1
2
3
4
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
ξ

РИС.3

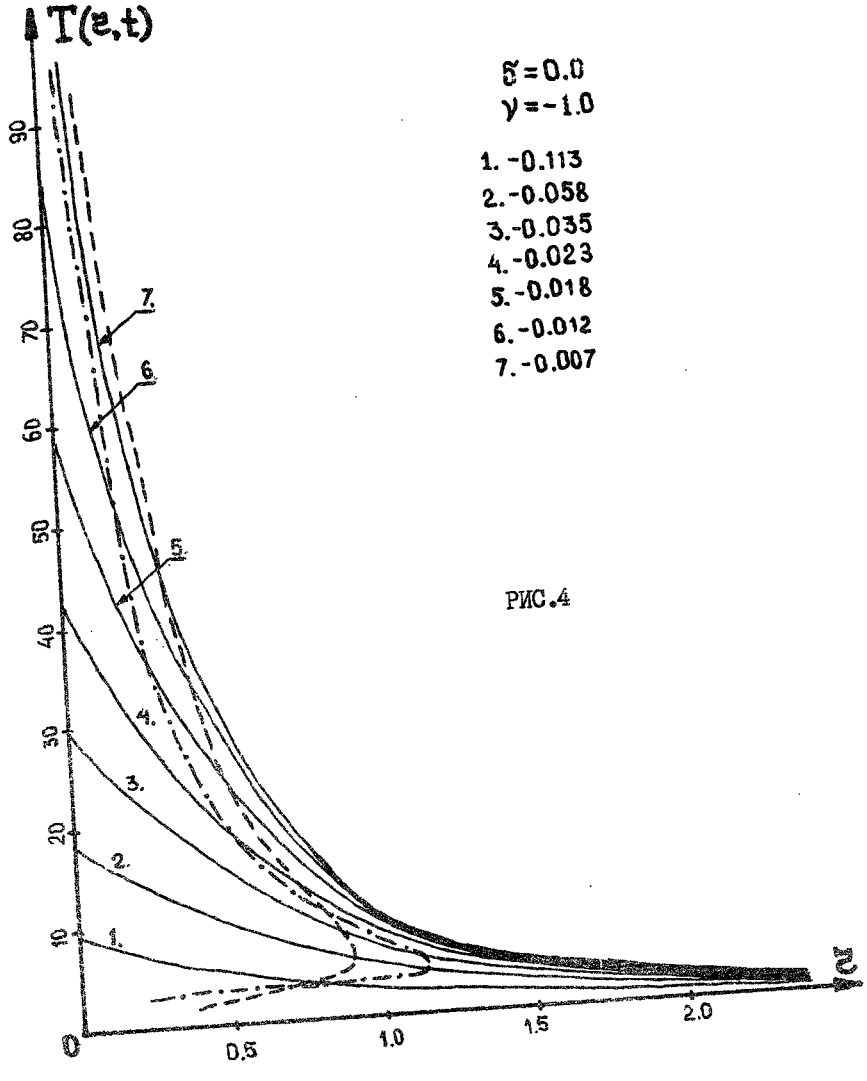

T(z,t)
δ=0.0
γ=-1.0
1. -0.113
2. -0.058
3. -0.035
4. -0.023
5. -0.018
6. -0.012
7. -0.007
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0.5
1.0
1.5
2.0
z
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.

РИС.4

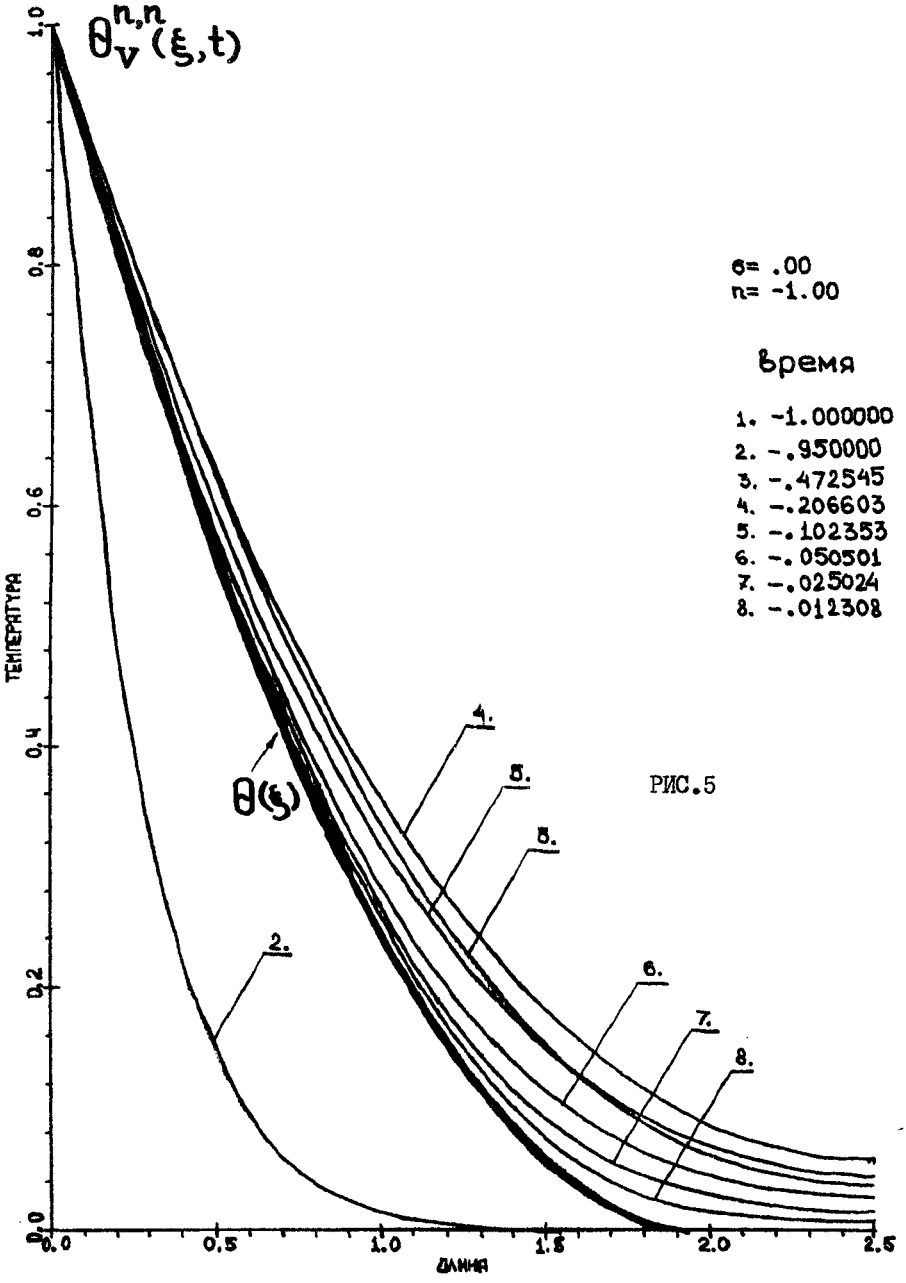

$\theta_v^{n,n}(\xi,t)$
ТЕМПЕРАТУРА
ДЛИНА
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
$\theta(\xi)$
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
σ= .00
n= -1.00
время
1. -1.000000
2. -.950000
3. -.472545
4. -.206603
5. -.102353
6. -.050501
7. -.025024
8. -.012308

РИС.5

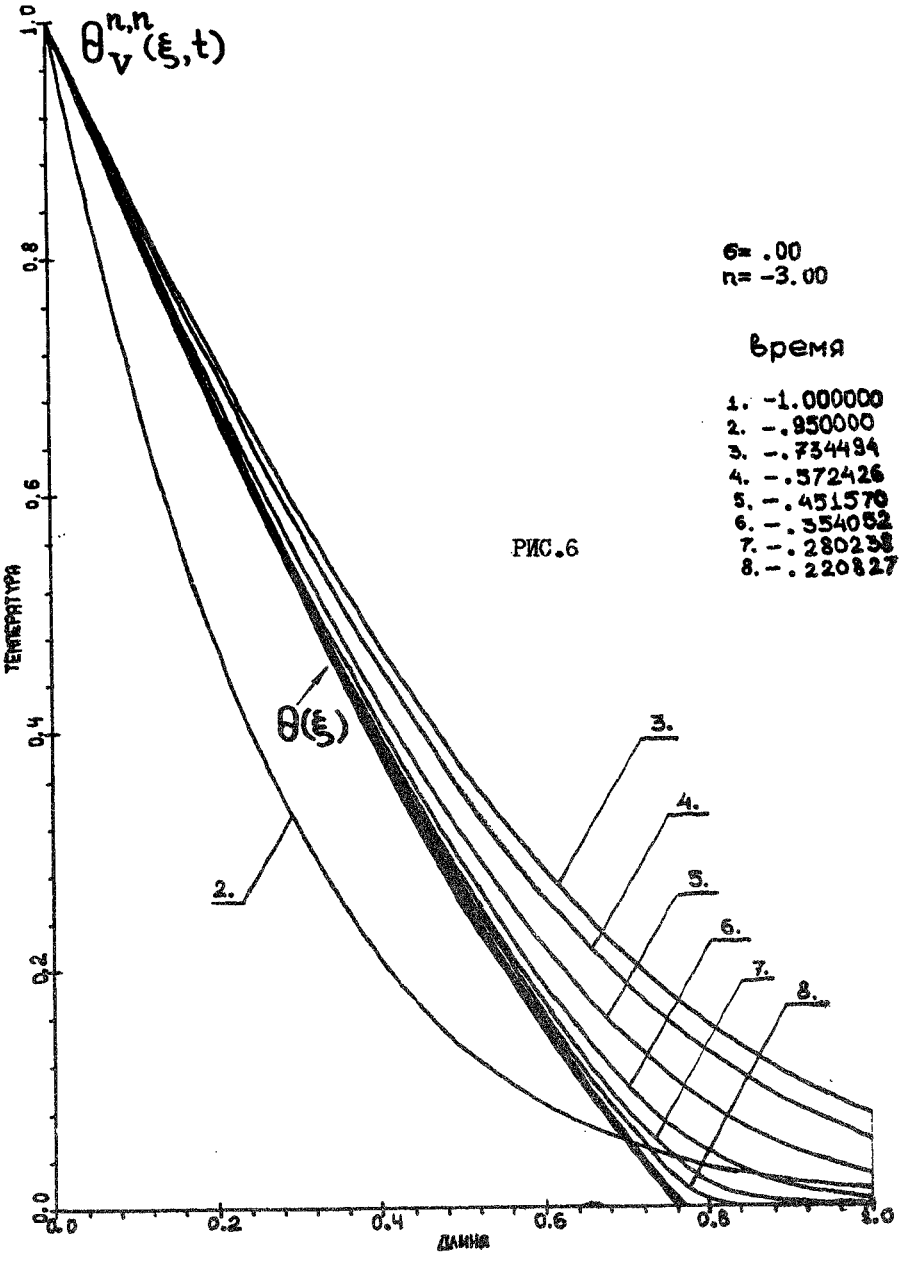

$\theta_v^{n,n}(\xi,t)$
б= .00
n= -3.00
время
1. -1.000000
2. -.950000
3. -.734494
4. -.572426
5. -.451570
6. -.354052
7. -.280238
8. -.220827
$\theta(\xi)$
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
ТЕМПЕРАТУРА
ДЛИНА
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

РИС.6

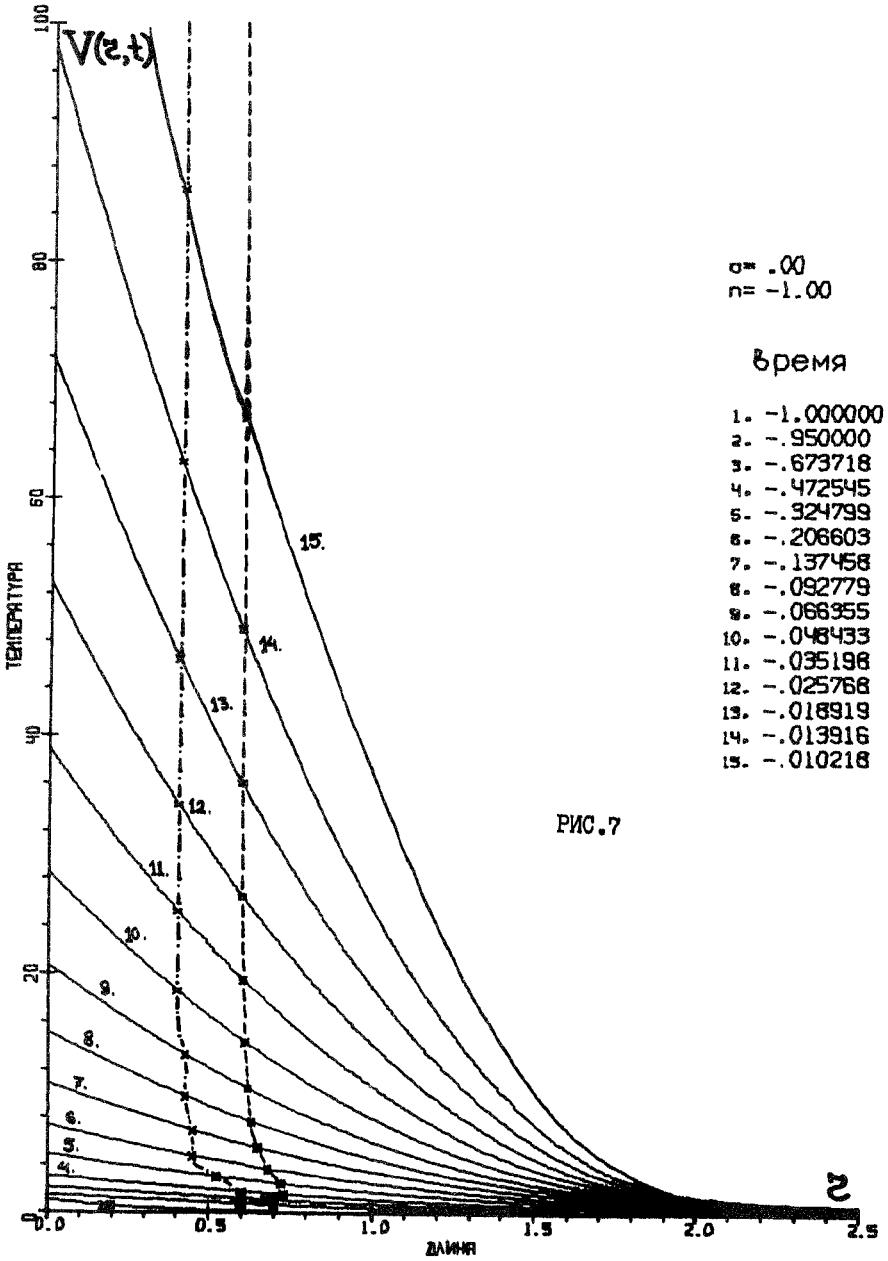

V(ζ,t)
σ= .00
n= -1.00
Время
1. -1.000000
2. -.950000
3. -.673718
4. -.472545
5. -.324799
6. -.206603
7. -.137458
8. -.092779
9. -.066355
10. -.048433
11. -.035198
12. -.025768
13. -.018919
14. -.013916
15. -.010218
ТЕМПЕРАТУРА
ДЛИНА
ζ
0
20
40
60
80
100
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5

РИС.7

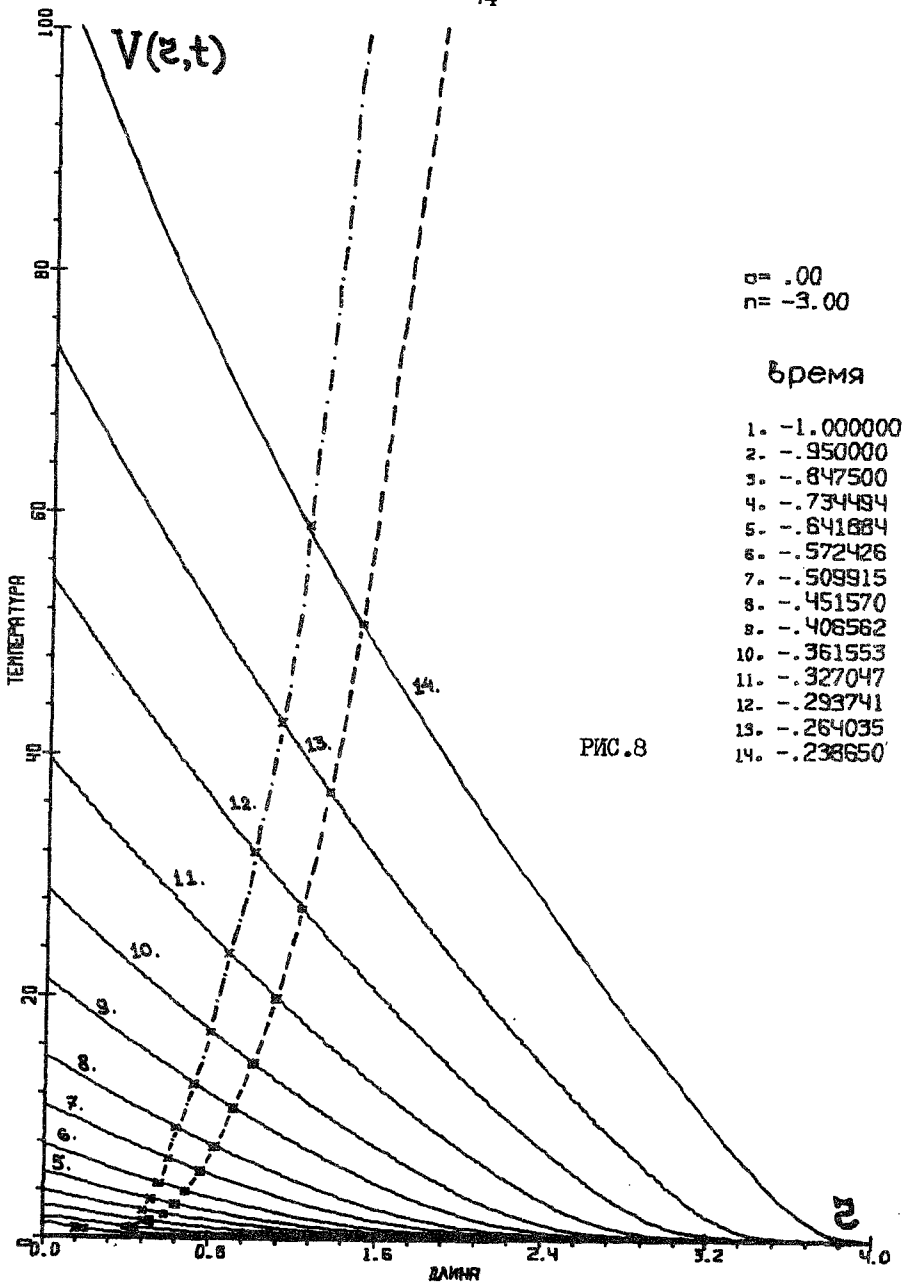

V(ξ,t)
σ= .00
n= -3.00
время
1. -1.000000
2. -.950000
3. -.847500
4. -.734494
5. -.641884
6. -.572426
7. -.509915
8. -.451570
9. -.406562
10. -.361553
11. -.327047
12. -.293741
13. -.264035
14. -.238650
ТЕМПЕРАТУРА
ДЛИНА
ξ
0
20
40
60
80
100
0.0
0.8
1.6
2.4
3.2
4.0
14.
13.
12.
11.
10.
9.
8.
7.
6.
5.

РИС.8

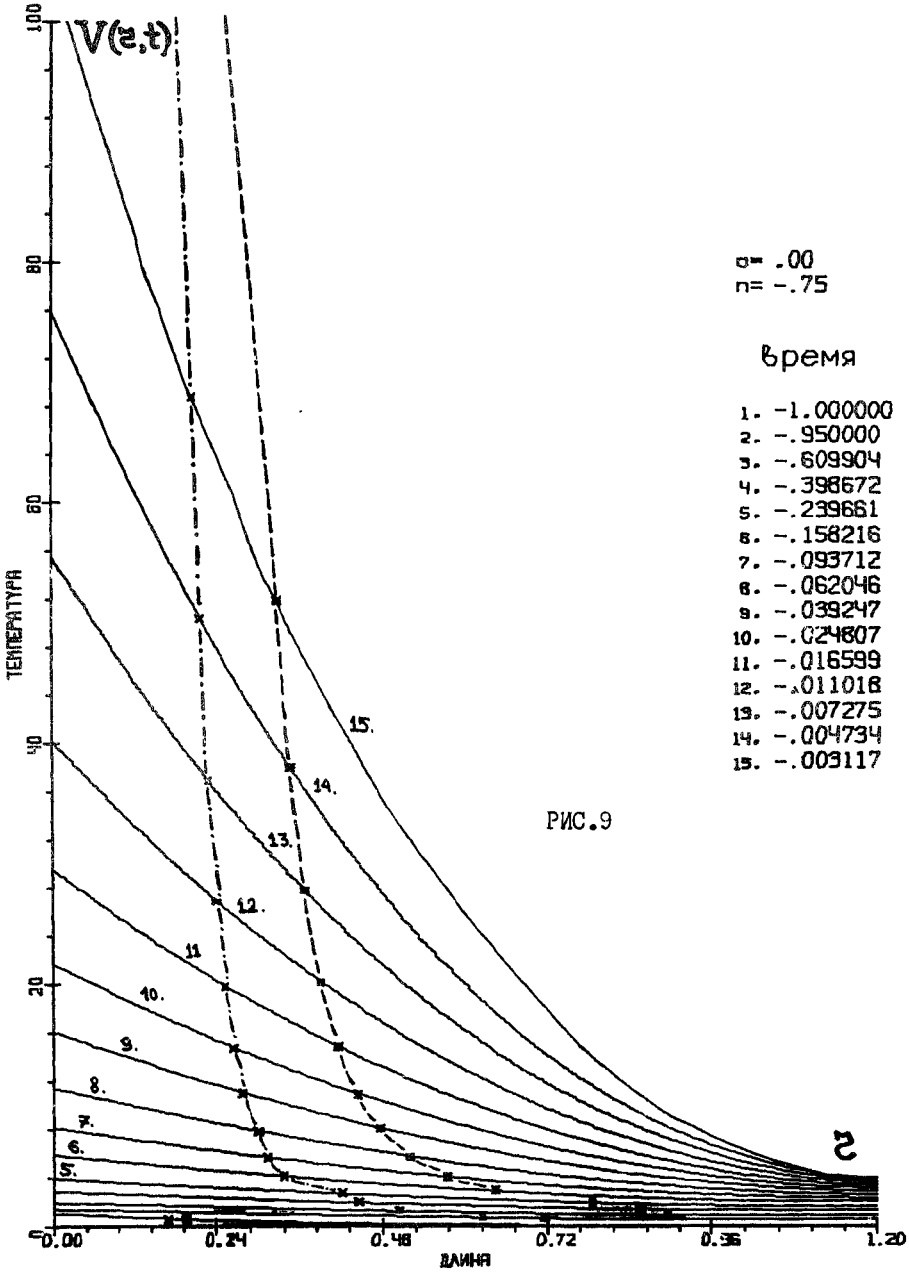

V(ξ,t)
ТЕМПЕРАТУРА
ДЛИНА
0.00
0.24
0.48
0.72
0.96
1.20
0
20
40
60
80
100
σ= .00
n= -.75
время
1. -1.000000
2. -.950000
3. -.609904
4. -.398672
5. -.239661
6. -.158216
7. -.093712
8. -.062046
9. -.039247
10. -.024807
11. -.016599
12. -.011018
13. -.007275
14. -.004734
15. -.003117
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11
12.
13.
14.
15.

РИС.9

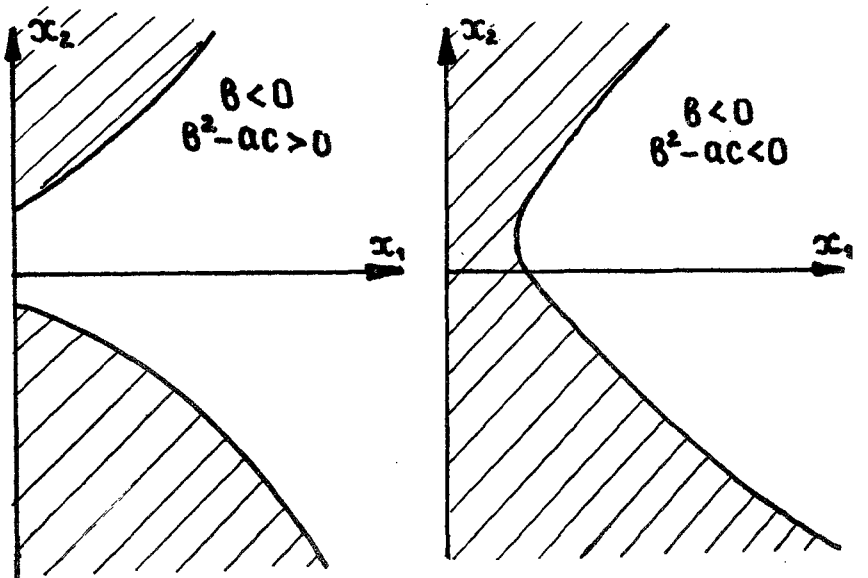


РИС.10

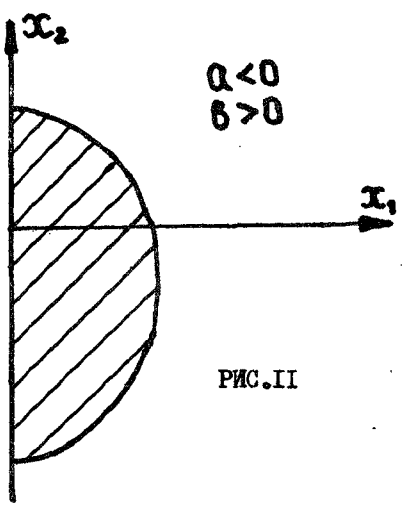


РИС.11

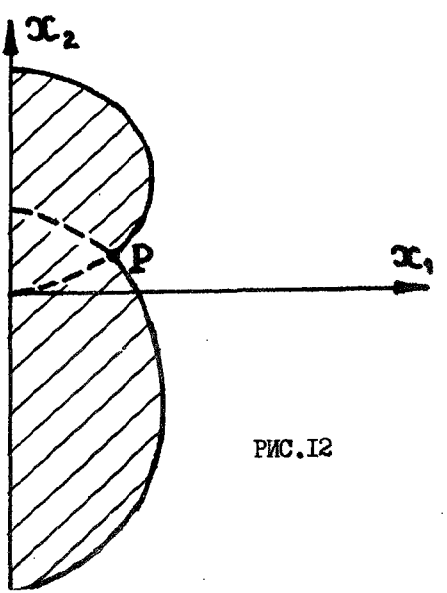


РИС.12