ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 19 Ноябрь 1979 Декабрь № 6

УДК 519.633

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СРАВНЕНИЮ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. А. ГАЛАКТИОНОВ, С. П. КУРДЮМОВ, А. П. МИХАЙЛОВ, А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

Предложен метод сравнения решений параболических уравнений второго порядка, основанный на поточечных оценках старшей производной решения через младшие.

§ 1. Введение

Для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения

$$u_t=\mathscr{L}(u)=[k(u)u_x]_x \tag{1.1}$$

рассматривается в $Q_T=\{(t, x):0<t\leqslant T, x\in\Omega\}$, $\Omega=\{x:0<x<\infty\}$, первая краевая задача с условиями

$$u(0, x)=u_0(x)\geqslant 0, \quad x\in\Omega, \qquad u(t, 0)=u_1(t)\geqslant 0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.2}$$

где $u_0(x)$ и $u_1(t)$ — непрерывные функции своих аргументов, $0\leqslant u_i\leqslant M<\infty$, $i=0, 1$, $u_0(0)=u_1(0)$. Функция $k(u)$ определена для $u\geqslant 0$, $k(u)>0$ при $u>0$, $k(0)=0$.

Уравнение (1.1) описывает, в частности, процесс распространения тепла в среде с коэффициентом теплопроводности $k(u)$, зависящим от температуры среды u.

В [1–5] введено понятие метастабильной локализации тепла и для случая $k(u)=u^\sigma$, $\sigma>0$, определены условия существования локализации или ее отсутствия в краевых задачах и в задаче Коши для уравнения (1.1). При анализе использовались автомодельные решения, построенные в [6, 7], и теоремы сравнения по краевым условиям [8].

Для нестепенной функции $k(u)$ в классе инвариантно-групповых решений уравнения (1.1) (см. [9]) нет решений, обладающих свойством локализации тепла. Поэтому возникла необходимость найти подход к сравнению решений таких уравнений.

В настоящей работе показано, что решения задач (1.1), (1.2) с различными $k(u)$ можно сравнивать в Q_T, если наложить на коэффициенты некоторые условия сравнения. При этом краевые условия (1.2) должны удовлетворять определенным требованиям, которые обеспечивают выполнение в Q_T поточечной оценки старшей производной одного из решений

через младшие. Предложенный метод сравнения решений распространяет эффект локализации тепла на более широкий класс коэффициентов.

В § 2 определяются условия существования специальных поточечных оценок старшей производной (условия критичности краевых данных), в § 3 доказывается теорема сравнения, в § 4 обсуждаются некоторые обобщения предложенного метода сравнения, наконец, в § 5 с помощью теоремы сравнения из § 3 выделяются классы коэффициентов $k(u)$, допускающих в зависимости от вида краевых условий локализацию тепла или ее отсутствие.

Сформулированный подход позволяет сравнивать решения, отвечающие различным параболическим операторам $\mathscr{L}(u)$. В качестве одного из них может быть взят, например, оператор достаточно простого вида, которому соответствуют решения с уже известными свойствами.

Будем предполагать, что функции k, u_0, u_1 удовлетворяют предположениям теоремы существования обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) в смысле работы [8]. Введем обозначения: $Q_T^0=\{(t, x):(t, x)\in Q_T,\ u(t,x)>0\}$, где $u(t, x)$ — обобщенное решение задачи, $S_T=\overline{Q}_T^0\setminus Q_T^0$, $P_T=Q_T\setminus S_T$. В [8] установлено, что $u(t, x)$ в P_T удовлетворяет уравнению (1.1) в обычном смысле, а в S_T, т. е. в точках вырождения, обобщенное решение может не иметь предписываемой (1.1) гладкости. Обозначим $Q_{t_1, t_2}=\{(t, x):\ t_1\leqslant t\leqslant t_2,\ x\in\Omega\}$, $S_{t_1, t_2}=\{(t, x):\ t_1\leqslant t\leqslant t_2,\ (t, x)\in S_T\}$, $P_{t_1, t_2}=\{(t, x):\ t_1\leqslant t\leqslant t_2,\ (t, x)\in P_T\}$, $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T$.

§ 2. Условия критичности

Определение. Будем говорить, что в задаче (1.1), (1.2) краевые условия (1.2) являются критическими, если всюду в P_T

$$u_t(t, x)\geqslant 0. \tag{2.1}$$

В дальнейшем условия критичности краевых данных будут использованы для вывода априорных поточечных оценок старшей производной u_{xx} через младшие u_x, u.

Будем предполагать, что функции k, u_0, u_1 удовлетворяют условиям гладкости, достаточным для почленного дифференцирования уравнения (1.1) по t или x один раз всюду в P_T. Также считаем, что $u_0(x)\in C(\Omega)\cap C^2(P_{0,0})$, $u_1(t)\in C^1([0, T])$. В этих предположениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для критичности условий* (1.2) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathscr{L}(u_0(x))\geqslant 0,\quad x\in P_{0,0},\qquad u_1'(t)\geqslant 0,\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.2}$$

Доказательство. Необходимость условий леммы очевидна. Докажем достаточность.

1. Сделаем несколько предварительных замечаний о свойствах функции $u(t, x)$. Покажем, что функция $u_0(x)$, удовлетворяющая неравенствам (2.2) и ограниченная в Ω, является невозрастающей в Ω.

Сначала установим, что $u_0(x)$ не может иметь в Ω положительного максимума. Действительно, если $u_0(x)$ имеет при некотором $x_m \in \Omega$ положительный максимум и не равна тождественно константе, то существуют такие $x_1 < x_m$, $x_2 > x_m$, что $u_0(x) > 0$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $u_0'(x_1) > 0$, $u_0(x_2) < 0$. Используя первое неравенство (2.2), получаем $k(u_0(x))u_0'(x)\,\Big|_{x_1}^{x_2} \geqslant 0$, что ведет к противоречию.

Предположим, что $u_0'(x_3) > 0$, $u_0(x_3) > 0$ для некоторого $x_3 \in \Omega$. Тогда, в силу предыдущего вывода, $u_0'(x) \geqslant 0$ при $x > x_3$. Поэтому $\mathscr{L}(u_0)$ определена при всех $x > x_3$ и первое из неравенств (2.2) можно записать в виде

$$\mathscr{L}(u_0(x)) = \alpha(x), \qquad x > x_3,$$

где $\alpha(x)$ — неотрицательная и непрерывная при $x > x_3$ функция. Пусть существует $x_4 > x_3$ такое, что $\operatorname{mes} \omega_\varepsilon > 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$, где $\omega_\varepsilon = \{x\colon\ x_3 < x < x_4,\ \alpha(x) \geqslant \varepsilon\}$. В результате интегрирования предыдущего равенства получим

$$\int\limits_{u_0(x_3)}^{u_0(x)} k(\eta)\,d\eta = -k(u_0(x_3))u_0'(x_3) + \int\limits_{x_3}^{x} d\zeta \int\limits_{x_3}^{\zeta} \alpha(\xi)\,d\xi, \qquad x > x_3.$$

Оценивая интеграл в правой части при $x > x_4$, приходим к неравенству

$$\int\limits_{x_3}^{x} d\zeta \int\limits_{x_3}^{\zeta} \alpha(\xi)\,d\xi \geqslant \int\limits_{x_4}^{x} d\zeta \int\limits_{x_3}^{\zeta} \alpha(\xi)\,d\xi \geqslant \varepsilon \operatorname{mes} \omega_\varepsilon (x - x_4),$$

откуда заключаем, что $u_0(x) \to \infty$, $x \to \infty$, что противоречит ограниченности этой функции в Ω. Случай $\alpha(x) \equiv 0$, $x > x_3$, анализируется аналогично.

Таким образом, установлено, что

$$u_0'(x) \leqslant 0, \qquad x \in P_{0,0}.$$

Отсюда следует, что существует не более одной точки $\xi(0) \in S_{0,0}$ и при любом $0 < t \leqslant T$ множество $S_{t,t}$ состоит не более чем из одного элемента. Обозначим его $\xi(t)$. Нетрудно видеть, что $S_T = \{(t, x)\colon\ 0 < t \leqslant T,\ x = \xi(t)\}$, $P_T = \{(t, x)\colon\ 0 < t \leqslant T,\ x \in \Omega,\ x \neq \xi(t)\}$.

Можно показать, что определение обобщенного решения (см. [8]) предусматривает при каждом $0 < t \leqslant T$ выполнение условия

$$k(u(t, x))u_x(t, x) \to 0, \qquad x \to \xi(t). \tag{2.3}$$

Поэтому для любого $\delta > 0$, $\delta < \xi(t) \neq 0$, $0 < t \leqslant T$, найдется $x_0(t)$ такое, что

$$\xi(t) - \delta < x_0(t) < \xi(t), \qquad u_t(t, x_0(t)) > 0. \tag{2.4}$$

2. Обозначим $u_t(t, x)$ через $z(t, x)$. Всюду в P_T функция z удовлетворяет уравнению

$$z_t = [k(u)z]_{xx}.$$

Положим $z(t, x)=Y(t, x)e^{\alpha t}$, $\alpha>0$. Функция Y удовлетворяет в P_T уравнению

$$(2.5)\qquad [\alpha-k'(u)u_{xx}-k''(u)(u_x)^2]Y+Y_t=k(u)Y_{xx}+2k'(u)u_xY_x.$$

Рассмотрим множество N точек σ в интервале $(0, T)$ таких, что $Y(t, x)\geqslant 0$ при всех $(t, x)\in Q_{0,\sigma}$. Если $\sup\sigma=T$, то лемма доказана. Пусть $\sup\sigma=t_0<T$.

Из определения t_0 следует, что найдутся $t_0\leqslant t_1<T$ и $0<\delta_1\leqslant T-t_1$ такие, что

$$(2.6)\qquad \min_{x\in\Omega} Y(t_1, x)=0$$

и при всех $t_1<t<t_1+\delta_1$ функция $Y(t, x)$ имеет отрицательные значения в Ω.

Следовательно, в силу неравенств (2.2), Y имеет отрицательный минимум по x при всех $t_1<t<t_1+\delta_1$. Обозначим точки минимума $(t, \bar{x}(t))$. Тогда $0<\bar{x}(t)<\xi(t)$, $t_1<t<t_1+\delta_1$, поскольку равенство $\bar{x}(t)=\xi(t)$ хотя бы при одном t из заданного интервала противоречит (2.4). Заметим, что величина t_1 выбрана таким образом, чтобы

$$(2.7)\qquad Y(t_1, \bar{x}(t_1))=0.$$

В силу неограниченности сверху функции $z_t(t, \bar{x}(t))/z(t, \bar{x}(t))$ при $t\to t_1^+$

$$(2.8)\qquad Y_t(\bar{t}, \bar{x}(t))\leqslant 0,\qquad t_1<\bar{t}<t_1+\delta_2\quad \forall\alpha>0,\quad 0<\delta_2\leqslant\delta_1.$$

Выбирая в (2.7) величину $\alpha>0$ достаточно большой и учитывая (2.8), приходим к противоречию, $\sup\sigma=T$, лемма доказана.

Если в (2.3) величина $\xi(t)=\infty$, $0<t\leqslant T$, то доказательство проводится аналогично.

Следствие. Если функции $u_0(x)$ и $u_1(t)$ удовлетворяют условиям критичности (2.2), то, как следует из неравенства (2.1) и структуры оператора $\mathscr{L}$ в (1.1), всюду в P_T выполняется поточечная оценка старшей производной

$$(2.9)\qquad u_{xx}\geqslant -[k'(u)/k(u)](u_x)^2.$$

Замечания. 1. В предположениях леммы 1 можно таким же способом доказать, что

$$(2.10)\qquad u_x(t, x)\leqslant 0,\qquad (t, x)\in P_T.$$

2. Неравенства (2.1), (2.9) для случая $u_0(x)\equiv 0$, $x\in\Omega$, получены в [10] другим способом.

§ 3. Теорема сравнения

Рассмотрим в Q_T для уравнений

$$(3.1)\qquad u_t^{(\nu)}=\mathscr{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)})=[k^{(\nu)}(u^{(\nu)})u_x^{(\nu)}]_x,\qquad \nu=1, 2,$$

краевые задачи с условиями

$$(3.2)\qquad u^{(\nu)}(0,x)=u_0^{(\nu)}(x),\quad x\in\Omega,\qquad u^{(\nu)}(t,0)=u_1^{(\nu)}(t),$$

$$0\leqslant t\leqslant T,\quad \nu=1,2.$$

Определим условия на операторы $\mathscr{L}^{(1)}$ и $\mathscr{L}^{(2)}$ в (3.1) и краевые данные (3.2), которые обеспечивают в $\bar{Q}_T$ сравнение решений задач (3.1), (3.2), $\nu=1,2$, т. е. мажорирование в $\bar{Q}_T$ решения задачи (3.1), (3.2) при $\nu=1$ другим решением, соответствующим $\nu=2$. Для определения этих условий используем поточечные оценки старшей производной решения, соответствующего $\nu=2$, и (см. § 2) считаем, что $u_0^{(2)}(x)\in C(\Omega)\cap C^2(P_{0,0}^{(2)})$, $u_1^{(2)}(t)\in C^1([0,T])$ и $u^{(2)}(t,x)\in C^{2,4}(P_T^{(2)})$. Кроме того, пусть $u_0^{(1)}(x)\in C(\Omega)$, $u_1^{(1)}(t)\in C([0,T])$, $u^{(1)}(t,x)\in C^{1,2}(P_T^{(1)})$ и $0\leqslant u_i^{(\nu)}\leqslant M$, $i=0,1$, $\nu=1,2$.

Теорема 1. *Пусть выполняются предположения*:

1) $u_0^{(2)}(x)\geqslant u_0^{(1)}(x)$, $x\in\Omega$, $u_1^{(2)}(t)\geqslant u_1^{(1)}(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$,

2) $k^{(2)}(u)\geqslant k^{(1)}(u)$, $[k^{(2)}(u)/k^{(1)}(u)]'\geqslant 0$, $0<u\leqslant M$,

3) *условия* (3.2) *при* $\nu=2$ *являются критическими.*

Тогда всюду в $\bar{Q}_T$ *справедливо неравенство*

$$(3.3)\qquad u^{(2)}(t,x)\geqslant u^{(1)}(t,x).$$

Доказательство. 1. Рассмотрим множество N точек σ в интервале $(0,T)$ таких, что $u^{(2)}(t,x)\geqslant u^{(1)}(t,x)$ при всех $(t,x)\in Q_{0,\sigma}$. Предположим, что $\sup\sigma=t_0<T$.

Пусть $\tilde{u}(t,x)$, $(t,x)\in Q_{t_0,T}$,— решение уравнения (3.2) при $\nu=1$ с условиями

$$\tilde{u}(t_0,x)=u^{(2)}(t_0,x),\quad x\in\Omega,\qquad \tilde{u}(t,0)=u_1^{(2)}(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T.$$

Из теоремы сравнения по краевым данным (см. [8]) следует, что

$$(3.4)\qquad u^{(1)}(t,x)\leqslant\tilde{u}(t,x),\qquad (t,x)\in Q_{t_0,T}.$$

2. Обозначим $z(t,x)=u^{(2)}(t,x)-\tilde{u}(t,x)$ и $z=Ye^{\alpha t}$, $\alpha>0$. Функция $Y(t,x)$ всюду в $\tilde{P}_{t_0,T}^{(2)}=Q_{t_0,T}\backslash S_{t_0,T}^{(2)}\backslash\tilde{S}_{t_0,T}$ удовлетворяет уравнению

$$(3.5)\qquad \alpha Y+Y_t=k^{(1)}(\tilde{u})Y_{xx}+\{u_{xx}^{(2)}[k^{(2)}(u^{(2)})-$$

$$-k^{(1)}(\tilde{u})]+(u_x^{(2)})^2[k^{(2)\prime}(u^{(2)})-k^{(1)\prime}(\tilde{u})]\}e^{-\alpha t}-$$

$$-k^{(1)\prime}(\tilde{u})(Y_x)^2e^{\alpha t}+2k^{(1)\prime}(\tilde{u})Y_xu_x^{(2)}.$$

Из (2.6) и из определения t_1 получаем (2.7).

3. Существуют три возможности.

а. Пусть найдется $\delta_1>0$, $\delta_1\leqslant\delta$ такое, что $(t,\bar{x}(t))\in P^{(2)}_{t_1,t_1+\delta_1}$. Тогда уравнение (3.5) в точках $(t,\bar{x}(t))$, $t_1<t<t_1+\delta_1$, можно записать в виде

$$(3.6)\qquad [\alpha+k^{(1)\prime}(\theta_1)u^{(2)}_{xx}+k^{(1)\prime\prime}(\theta_2)(u^{(2)}_x)^2]Y+Y_t=$$

$$=k^{(1)}(\tilde{u})Y_{xx}+\{u^{(2)}_{xx}[k^{(2)}(u^{(2)})-k^{(1)}(u^{(2)})]+$$

$$+(u^{(2)}_x)^2[k^{(2)\prime}(u^{(2)})-k^{(1)\prime}(u^{(2)})]\}e^{-\alpha t}$$

где θ_1, θ_2 — некоторые функции переменной t, причем θ_1, $\theta_2\in[u^{(2)}(t,\bar{x}(t)),\tilde{u}(t,\bar{x}(t))]$. Так же как при доказательстве леммы 1, можно установить справедливость (2.8). Тогда, выбирая α в (3.6) достаточно большим, придем к противоречию. Действительно, в соответственным образом подобранной точке $(\bar{t},\bar{x}(\bar{t}))$ левая часть (3.6) отрицательна. Правая же часть, в силу условий 1) и 2) теоремы, неотрицательна, что обеспечивается поточечной оценкой (2.9) второй производной функции $u^{(2)}(t,x)$ в точке $(\bar{t},\bar{x}(\bar{t}))\in P^{(2)}_{t_1,t_1+\delta_2}$.

б. Пусть теперь $(t,\bar{x}(t))\in S^{(2)}_{t_1,t_1+\delta_3}$ для некоторого $\delta_3>0$, $\delta_3\leqslant\delta$. Тогда функция Y может не иметь в точках минимума всех производных, входящих в (3.6).

Для функции $z(t,x)$ получаем в $Q_{t_1,\,t_1+\delta_3}$ задачу

$$(3.7)\qquad z_t=[k^{(2)}(u^{(2)})u^{(2)}_x]_x-[k^{(1)}(\tilde{u})\tilde{u}_x]_x,$$

$$z(t_1,x)=0,\quad x\in\Omega,\qquad z(t,0)=0,\quad t_1\leqslant t\leqslant t_1+\delta_3.$$

Поскольку $(t,\bar{x}(t))\in S^{(2)}_{t_1,t_1+\delta_3}$, то для любого $t_1<t<t_1+\delta_3$ найдется точка $0\leqslant\xi(t)<\bar{x}(t)$ такая, что $z(t,\xi(t))=0$. Тогда

$$(3.8)\qquad \int\limits_{\xi(t)}^{\infty} z(t,\eta)\,d\eta>0,\qquad t_1<t<t_1+\delta_3.$$

Учитывая, что $z_x(t,\xi(t))\leqslant0$, а также первое из условий 2) и интегрируя (3.7) по множеству $(t_1<t<t_1+\delta_2)\times(\xi(t)<x<\infty)$, приходим к противоречию с (3.8).

в. Если для любого $\delta_4>0$, $\delta_4\leqslant\delta$ найдутся точки минимума $(t,\bar{x}(t))$, принадлежащие как $P^{(2)}_{t_1,t_1+\delta_4}$, так и $S^{(2)}_{t_1,t_1+\delta_4}$, то доказательство можно провести либо как в п. а, либо как в п. б.

Таким образом, всюду в $Q_{t_0,T}$ выполнено неравенство $u^{(2)}(t,x)\geqslant\tilde{u}(t,x)$. Отсюда и из (3.4) следует (3.3), $\sup\sigma=T$. Теорема доказана.

Замечание 3. Условия 2) теоремы 1 эквивалентны следующим:

$$k^{(1)}(u)\geqslant k^{(2)}(u)[1+\lambda(u)]^{-1},\qquad 0\leqslant u\leqslant M,$$

где $\lambda(u)\geqslant0$, $\lambda'(u)\geqslant0$, $0<u\leqslant M$.

§ 4. Некоторые обобщения

1. При доказательстве утверждений § 2, 3 использовались фактически только предположения о параболичности и достаточной гладкости операторов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^{(\nu)}$, $\nu=1, 2$. Поэтому сформулированный подход к сравнению решений справедлив для параболических уравнений общего вида

$$u_t=\mathscr{L}(u)=L(u, u_x, u_{xx}). \tag{4.1}$$

Рассмотрим в Q_T первую краевую задачу для уравнения (4.1) с условиями (1.2). Будем предполагать, что решение задачи существует, причем

$$\sup_{(t,x)\in Q_T} u(t,x)\leqslant M_1<\infty \quad \text{и} \quad u(t,x)\in C^{2,4}(Q_T)$$

[11–13]. Будем также считать, что функция $L(p, q, r)$ при $0<p\leqslant M_1$, $-\infty<q<\infty$, $-\infty<r<\infty$, дифференцируема, так что функция $L_{(3)}^{-1}(p, q)$, однозначно определяемая в силу параболичности оператора $\mathscr{L}$ в (4.1) из уравнения

$$L(p, q, L_{(3)}^{-1}(p, q))=0, \quad 0<p\leqslant M_1, \quad -\infty<q<\infty,$$

также дифференцируема.

Критичность краевых условий задачи (4.1), (1.2) определим так же, как в § 2. Пусть $u_0(x)\in C^2(\Omega)$, $u_1(t)\in C^1([0, T])$. В этих предположениях справедливо следующее утверждение, которое доказывается аналогично лемме 1.

Лемма 2. *Для критичности краевых условий* (1.2) *задачи* (4.1), (1.2) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathscr{L}(u_0(x))\geqslant 0, \quad x\in\Omega, \qquad u_1'(t)\geqslant 0, \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Следствие. В предположениях леммы, всюду в Q_T выполнена поточечная оценка старшей производной

$$u_{xx}\geqslant L_{(3)}^{-1}(u, u_x). \tag{4.2}$$

В лемме 2 фактически сформулировано следующее утверждение: если $u_t(t, x)\geqslant 0$ при $(t, x)\in\Gamma_T=\{(t, x):t=0, x\in\Omega\}\cup\{(t, x):0<t\leqslant T, x=0\}$, где Γ_T — граница Q_T, то $u_t(t, x)\geqslant 0$ при всех $(t, x)\in\overline{Q}_T$. Это утверждение справедливо для всех операторов в (4.1), не содержащих переменной t (в противном случае оператор должен удовлетворять дополнительному условию).

2. Рассмотрим в Q_T две краевые задачи для равномерно параболических уравнений

$$u_t^{(\nu)}=\mathscr{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)})=L^{(\nu)}(u^{(\nu)}, u_x^{(\nu)}, u_{xx}^{(\nu)}), \qquad \nu=1, 2, \tag{4.3}$$

с краевыми условиями (3.2). Пусть $u^{(1)}(t, x)\in C^{1,2}(Q_T)$, $u^{(2)}(t, x)\in C^{2,4}(Q_T)$,

$$\max\{\sup_{(t,x)\in Q_T} u^{(1)}(t,x), \quad \sup_{(t,x)\in Q_T} u^{(2)}(t,x)\}=M.$$

Пусть, кроме того, функции $L^{(\nu)}(p, q, r)$ дифференцируемы по всем аргументам при $0<p\leqslant M$, $-\infty<q<\infty$, $-\infty<r<\infty$, $\nu=1, 2$.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения* 1) *и* 3) *теоремы* 1, *а также*

$$
(4.4)\qquad \begin{aligned} &L_3^{(2)}(p,q,r)-L_3^{(1)}(p,q,r)\geqslant 0,\\ &L^{(1)}(p,q,L_{(3)}^{(2)-1}(p,q))\leqslant 0, \qquad 0<p\leqslant M,\ -\infty<q<\infty \end{aligned}
$$

(*здесь* $L_3^{(\nu)}=\partial L^{(\nu)}/\partial r$). *Тогда всюду в* Q_T *выполняется неравенство* (3.3).

Теорема 2 доказывается таким же образом, что и теорема 1. При этом используется оценка старшей производной (4.2) решения $u^{(2)}(t, x)$.

3. Покажем, какой вид принимают условия (4.4) для некоторых конкретных операторов $\mathscr{L}^{(\nu)}$.

а. Пусть $\mathscr{L}^{(\nu)}(v^{(\nu)})=\varphi^{(\nu)}(v^{(\nu)})v_{xx}^{(\nu)}$, причем $\varphi^{(\nu)}(v^{(\nu)})>0$, $v^{(\nu)}>0$, $\nu=1, 2$. Неравенства (4.4) сводятся к условию

$$
(4.5)\qquad \varphi^{(2)}(p)\geqslant\varphi^{(1)}(p), \qquad 0<p\leqslant M.
$$

Уравнения (4.1) в этом случае описывают процесс распространения тепла в среде с постоянным коэффициентом теплопроводности и с теплоемкостью $c(v)=1/\varphi(v)$, зависящей от температуры v, поэтому условие сравнения (4.5) имеет простой физический смысл.

Заметим, что уравнения (3.1) можно привести к указанному виду заменой

$$
u^{(\nu)}=V^{(\nu)-1}(v^{(\nu)}), \qquad V^{(\nu)}(u^{(\nu)})=\int_0^{u^{(\nu)}} k^{(\nu)}(\eta)\,d\eta,
$$

где $V^{(\nu)-1}$ — функции, обратные к $V^{(\nu)}$. При этом

$$
\varphi^{(\nu)}(v^{(\nu)})=k^{(\nu)}(V^{(\nu)-1}(v^{(\nu)})), \qquad \nu=1, 2.
$$

По сравнению с условиями 2) теоремы 1 условие (4.3) выглядит существенно проще и не содержит дифференциальных связей на функции, в него входящие.

б. Пусть $\mathscr{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)})=[k^{(\nu)}(u^{(\nu)})u_x^{(\nu)}]_x+Q^{(\nu)}(u^{(\nu)})$, $k^{(\nu)}(u^{(\nu)})>0$, $u_x^{(\nu)}>0$, $\nu=1, 2$. Этот пример важен, в частности, для изучения вопросов, рассматривавшихся в [14–19]. В этом случае уравнения (4.1) описывают процессы распространения тепла и горения в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным выделением тепла ($Q(u)$ — мощность объемных источников энергии).

Неравенства (4.4) за счет независимости изменения p и q во втором из них распадаются на три условия:

$$
\begin{aligned} &k^{(2)}(p)\geqslant k^{(1)}(p), \qquad k^{(1)}(p)k^{(2)\prime}(p)\geqslant k^{(1)\prime}(p)k^{(2)}(p),\\ &Q^{(2)}(p)k^{(1)}(p)\geqslant Q^{(1)}(p)k^{(2)}(p), \qquad 0<p\leqslant M. \end{aligned}
$$

4. Сформулированный метод сравнения решений, возможности которого были продемонстрированы на примере первой краевой задачи в неогра-

ниченной области, применим для задач в ограниченных областях, а также для задачи Коши. Кроме того, полученные результаты можно перенести на указанные типы задач в многомерных областях для параболических уравнений с выделенным лапласианом:

$$u_t=\mathscr{L}(u)=L(u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_N}, \Delta u), \qquad \Delta u=\sum_{j=1}^{N} u_{x_j x_j}.$$

§ 5. Метастабильная локализация тепла

В этом параграфе доказанные теоремы сравнения применяются для изучения эффекта метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.

1. Пусть задача (1.1), (1.2) рассматривается в $Q_T^1=\{(t, x):0<t<T, x\in\Omega\}$, и пусть $u_1(t)$ такова, что

$$u_1(t)\to+\infty, \qquad t\to T. \tag{5.1}$$

Определение. Следуя [1–5], будем говорить, что в задаче (1.1), (1.2), (5.1) имеет место метастабильная локализация тепла, если найдется $x_0<\infty$ такая, что $\operatorname{mes}\operatorname{supp} u(t, x)\leqslant x_0$, $0<t<T$. В противном случае метастабильная локализация тепла отсутствует.

Таким образом, если в задаче (1.1), (1.2), (5.1) существует локализация тепла, то возмущения, несмотря на неограниченный рост температуры в точке $x=0$, не распространяются далее конечной области.

2. Рассмотрим в $Q_T^2=\{(t, x):0<t<T, x\in\Omega_2\}$, $\Omega_2=\{x:-\infty<x<\infty\}$, задачу Коши для уравнения (1.1) с начальным условием

$$u(0, x)=u_0(x), \qquad x\in\Omega_2. \tag{5.2}$$

Определение. В задаче (1.1), (5.2) имеет место метастабильная локализация тепла, если

$$\operatorname{supp} u(t, x)=\operatorname{supp} u_0(x), \qquad 0<t<t^*.$$

Локализация тепла в задаче Коши означает, что область с отличной от нуля температурой не меняется в течение конечного времени.

3. Теорема 3. *Пусть в задаче* (1.1), (1.2), (5.1)

$$u_0(x)\leqslant T^n(1-x/x_0)^{2/\sigma}, \qquad x_0=[2(\sigma+2)/\sigma]^{1/2}T^{(1+n\sigma)/2}, \quad x\leqslant x_0,$$

$$u_0(x)=0, \qquad x>x_0$$

(*здесь* σ, n — *некоторые постоянные величины,* $\sigma>0$, $n<0$, $1+n\sigma\geqslant 0$),

$$u_1(t)\leqslant(T-t)^n, \qquad 0\leqslant t<T,$$

$$k(u)=u^\sigma[1+\lambda(u)]^{-1}, \qquad \lambda(u)\geqslant 0, \quad \lambda'(u)\geqslant 0, \quad 0<u<\infty. \tag{5.3}$$

Тогда в ней имеет место метастабильная локализация тепла, причем

$$\operatorname{mes}\operatorname{supp} u(t, x)\leqslant x_0, \qquad 0<t<T,$$

$$u(t, x)\leqslant T^{(1+n\sigma)/\sigma}(T-t)^{-1/\sigma}(1-x/x_0)^{2/\sigma}, \qquad 0<t<T, \quad x\leqslant x_0,$$

$$u(t, x)=0, \qquad 0<t<T, \quad x>x_0.$$

Теорема 4. *Пусть в задаче* (1.1), (1.2), (5.1)

$$u_1(t) \geqslant (T-t)^n, \quad 0 \leqslant t < T, \quad n < 0,$$

$$k(u) = u^\sigma[1+\lambda(u)], \quad \lambda(u) \geqslant 0, \quad \lambda'(u) \geqslant 0, \quad 0 < u < \infty$$

(*здесь* $\sigma > 0$, $1+n\sigma < 0$). *Тогда в ней отсутствует локализация тепла. Более того, для любого* $x \in \Omega$

$$u(t, x) \to \infty, \quad t \to T.$$

Теорема 5. *Пусть в задаче* (1.1), (5.2)

$$0 < u_0(x) \leqslant u_m(1-|x|/x_m)^{2/\sigma}, \quad |x| < x_m, \quad u_0(x) = 0, \quad |x| \geqslant x_m$$

(*здесь* u_m, x_m, σ — *некоторые положительные константы*) *и выполняется* (5.3). *Тогда в ней имеет место метастабильная локализация тепла, причем*

$$\operatorname{supp} u(t, x) = \operatorname{supp} u_0(x), \quad 0 < t < t^*,$$

$$0 < u(t, x) \leqslant [x_m^2\sigma/2(\sigma+2)]^{1/\sigma}(t^*-t)^{-1/\sigma}(1-|x|/x_m)^{2/\sigma},$$

$$0 < t < t^*, \quad |x| < x_m,$$

$$u(t, x) = 0, \quad 0 < t < t^*, \quad |x| \geqslant x_m,$$

где $t^* = x_m^2\sigma/2u_m^\sigma(\sigma+2)$.

Утверждения теорем 3—5 доказаны в [5] при $\lambda(u) = 0$, $0 < u < \infty$. Если $\lambda(u) \not\equiv 0$, то справедливость теорем следует из теоремы 1 и замечания 1 к ней.

Аналогично формулируются достаточные условия локализации в многомерных областях. При этом используются результаты работ [1, 4].

Авторы благодарны А. А. Арсеньеву за полезные обсуждения.

Поступила в редакцию 20.02.1979

Цитированная литература

1. *А. А. Самарский и др.* Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. Докл. АН СССР, 1975, 223, № 6, 1344–1347.
2. *С. П. Курдюмов.* Нелинейные процессы в плотной плазме. В «Сб. докл. на II Междунар. конф. по теории плазмы» (Киев, 1974). Киев, «Наукова думка», 1976, 278.
3. *Н. В. Змитренко и др.* Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия ее проявления в эксперименте. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 103.
4. *С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, К. Э. Плохотников.* Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Тепловой кристалл. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 22.
5. *А. П. Михайлов.* Метастабильная локализация тепловых возмущений в среде с нелинейной теплопроводностью. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 64.
6. *А. А. Самарский, И. М. Соболь.* Примеры численного расчета температурных волн. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, 3, № 4, 703–719.
7. *В. А. Галактионов, А. П. Михайлов.* Об одной автомодельной задаче для уравнения нелинейной теплопроводности. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 53.

8. *О. А. Олейник, А. С. Калашников, Чжоу-Юй-линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 5, 667–704.
9. *Л. В. Овсянников.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, 125, № 3, 492–495.
10. *М. К. Лихт.* О распространении возмущений в задачах, связанных с вырождающимися квазилинейными уравнениями параболического типа. Дифференц. ур-ния, 1969, 2, № 7, 953—957.
11. *О. А. Олейник, С. Н. Кружков.* Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными. Успехи матем. наук, 1961, 16, № 5, 115—155.
12. *О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.
13. *А. Фридман.* Уравнения в частных производных параболического типа. М., «Мир», 1968.
14. *А. А. Самарский и др.* Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла. Докл. АН СССР, 1976, 227, № 2, 321–324.
15. *А. А. Самарский и др.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур. Докл. АН СССР, 1977, 237, № 6, 1330–1333.
16. *Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов.* N- и S-режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением. Прикл. механ. и техн. физ., 1977, № 1, 3–23.
17. *Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов.* Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 106.
18. *А. А. Самарский.* Численные методы в физике плазмы. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 107.
19. *С. П. Курдюмов и др.* Взаимодействие тепловых структур. Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 77.