57

ПРЕПР.
011

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

В.М. Головизнин, Т.К. Коршия, А.А. Самарский,
А.П. Фаворский.

О ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДВУМЕРНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ.

Препринт № 57 за 1977г.

Москва.

A B S T R A C T

The difference equations of two-dimensional magnetohydrodynamics are obtained from the variational principle. The dissipative processes are not taken into account. The cases of plane and cylindrical coordinates are considered. The obtained equations are fully conservative and have the second order approximation.

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе, на основе вариационных принципов, получены дифференциально-разностные и разностные уравнения двумерной магнитной гидродинамики без учета диссипативных процессов. Рассмотрены случаи плоских и цилиндрических координат. Показано, что полученные уравнения имеют второй порядок аппроксимации и обладают свойством полной консервативности.

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

Введение 5

§ I. Дифференциальные МГД уравнения, определяющие их лагранжианы и дополнительные условия 7

§ 2. Об аппроксимации кинетической и внутренней энергии. Разностные уравнения газодинамики 18

§ 3. Аппроксимация магнитной энергии и условий вмороженности магнитного поля 25

§ 4. Дифференциально-разностные уравнения магнитной гидродинамики и некоторые их свойства 36

§ 5. Об аппроксимации Дифференциально-разностных уравнении магнитной гидродинамики 43

§ 6. Разностные уравнения магнитной гидродинамики. Аппроксимация по времени 50

§ 7. О граничных условиях 57

Приложения 61

Литература 67

Введение

В настоящей работе, на основе вариационного принципа [I] строятся дискретные модели бесконечнопроводящей сплошной среды, погруженной в магнитном поле.

Основная идея вариационного принципа построения дискретных моделей сплошных сред заключается в том, что выражение для лагранжиана и ряда других величин и условий, полностью определяющих все свойства изучаемой среды [I], заменяются какими-либо конечно-разностными аппроксимациями. Условие стационарности определяемого разностным лагранжианом действия [7], при соответствующих ограничениях также носящих разностный характер, приводит к системе дифференциально-разностных уравнений (дифференциальных по времени, разностных по пространству), приближенно описывающих свойства моделируемой среды.

Как показано в [I], [2], при таком подходе к моделированию чисто гидродинамических течений гарантируется выполнение основных законов сохранения (массы, энергии, импульса). Кроме того, аппроксимации динамических уравнений, уравнения неразрывности, уравнений изменения полной и удельной внутренней энергии получаются взаимнсогласованными, т.е. получающаяся система дифференциально-разностных уравнений автоматически оказывается полностью консервативной [I].

В настоящей работе получены дифференциально-разностные уравнения магнитной гидродинамики в случае двух пространственных переменных, в декартовых и цилиндрических координатах, при наличии вмороженных магнитных полей, лежащих в плоскости течения либо перпендикулярных к ней. Показано, что полученные дифференциально-раз-

ностные уравнения аппроксимируют дифференциальные МГД уравнения со вторым порядком точности и обладают свойством полной консервативности. Переход к разностным уравнениям осуществлен посредством замены производных по времени соответствующими разностями. Для полученных систем разностных уравнений найдены условия, при которых они также являются полностью консервативными. Показано, что консервативные разностные схемы при выборе давления на полуслое по времени имеют второй порядок аппроксимации также по времени. Для полученных уравнений рассмотрены некоторые широко распространенные граничные условия.

В конце работы, в приложении, приведены полные системы МГД уравнений в дифференциальной, дифференциально-разностной и разностной форме, для всех рассматриваемых в работе случаев.

Авторы выражают глубокую признательность В.Ф.Тишкину и В.А. Гасилову за всестороннее обсуждение, конструктивные замечания и помощь при оформлении этой работы.

§ I. Дифференциальные МГД уравнения, определяющие их лагранжианы и дополнительные условия

Известно, что дифференциальные уравнения МГД могут быть получены из вариационного принципа [7]. При этом поведение сплошной среды, законы изменения полной внутренней и магнитной энергии устанавливаются по виду лагранжиана о учетом дополнительных условий: уравнения неразрывности, условий вмороженности магнитного поля и т.д. В этом параграфе вариационным способом выводятся одномерные и двумерные дифференциальные уравнения магнитной гидродинамики для бесконечнопроводящей среды в лагранжевых переменных, для декартовых $\{\vec{r}=(x,y,0)\}$ и цилиндрических $\{\vec{r}=(R,\theta,z)\}$ координат. Уравнения получены в виде, удобном для исследования аппроксимации. Рассмотрены случаи, когда вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ имеет одну составляющую, перпендикулярную плоскости течения $\{\vec{H}=(0,0,H_z)$ или $\vec{H}=(0,H_\varphi,0)\}$, а также случаи, когда магнитное поле имеет две компоненты, лежащие в плоскости течения $\{\vec{H}=(H_x,H_y,0)$ или $\vec{H}=(H_R,0,H_z)\}$. Рассмотрены также интегральные законы изменения импульсов потенциальной, кинетической и полной энергии среды.

П.I. Рассмотрим одномерное течение бесконечнопроводящей среды. Пусть α – лагранжева переменная, а ξ обозначает x в случае декартовых координат и R в случае цилиндрических. Вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ будем предполагать имеющим одну компоненту H, перпендикулярную направлению ξ: $H=H_y$ или $H=H_z$ в декартовых и $H=H_\varphi$ в цилиндрических координатах. Тогда лагранжиан среды имеет вид:

$$\mathcal{L}(t)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\rho\frac{1}{\ell}\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\alpha}\left(\frac{u^2}{2}-\varepsilon-\frac{H^2}{8\pi\rho}\right)d\alpha \qquad (I.I)$$

Здесь и далее используются следующие обозначения: ρ -плотность, u - компонента скорости, ε -удельная внутреняя энергия, ℓ -целочисленный параметр

$$\ell = \begin{cases} 1, & \xi = x \\ 2, & \xi = R \end{cases}$$

Условия сохранения массы и магнитного потока определяются следующим образом

$$\rho \frac{1}{\ell} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial \alpha} = \rho_0(\alpha) \tag{I.2}$$

$$H \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \Phi(\alpha) \tag{I.3}$$

Варьирование функционала действия $S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t)\,dt$ с учетом соотношений (I.2),(I.3) и условий адиабатичности приводит к динамическому уравнению

$$\frac{1}{\ell} \rho \frac{\partial \xi^\ell}{\partial \alpha} \frac{du}{dt} + \xi^{\ell-1} \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{H^2}{8\pi} \right) + (\ell-1) \frac{H^2}{4\pi} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = 0 \tag{I.4}$$

где $P = P(\varepsilon, \rho)$ -давление, а d/dt -субстанциональная производная.

Условие адиабатичности и закон сохранения массы (I.2) дают уравнение изменения удельной внутренней энергии:

$$\rho \frac{1}{\ell} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial \alpha} \frac{d\varepsilon}{dt} = -P \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\ell} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial \alpha} \right) \tag{I.5}$$

Дифференцирование по времени приводит к уравнению индукции магнитного поля:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{dH}{dt} = -H \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right) \tag{I.6}$$

Из (I.6) следует уравнение изменения магнитной энергии

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\ell} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial \alpha} \frac{H^2}{8\pi} \right) = -\frac{H^2}{8\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\ell} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial \alpha} \right) + (\ell-1) \frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} u \tag{I.7}$$

П.2. Перейдем к двумерным течениям. Пусть $G(\alpha, \beta)$ -область в плоскости лагранжевых переменных α, β, занятая бесконечно проводящей средой: ξ, μ -эйлеровы координаты, совпадающие с x, y и R, z в случае декартовых и цилиндрических координат соответственно, Пусть магнитное поле представлено одной компонентой H, перпендикулярной плоскости течения: Будем предполагать, что в каждый момент времени всюду $\frac{1}{\ell} \frac{D(\xi^\ell, H)}{D(\alpha, \beta)} > 0$

где

$$\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}=\begin{Vmatrix}\frac{\partial\xi^{\ell}}{\partial\alpha} & \frac{\partial\xi^{\ell}}{\partial\beta}\\ \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} & \frac{\partial\mu}{\partial\beta}\end{Vmatrix} \tag{I.9}$$

якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым.

Уравнение неразрывности в лагранжевых переменных записывается в виде

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}=\rho_0(\alpha,\beta) \tag{I.I'}$$

Для бесконечно проводящей среды выполнено условие постоянства магнитного потока через любой "жидкий" контур - условие вмороженности магнитного поля:

$$H\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}=\Phi(\alpha,\beta) \tag{I.10}$$

Выражения, соответствующие кинетической энергии среды - $E_к$, внутренней удельной энергии - $E_{вн}$ и магнитной энергии - $E_н$ для области $G(\alpha,\beta)$ определяются обычным образом:

$$E_к=\frac{1}{2}\iint\limits_{G(\alpha,\beta)}\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{u^2+v^2}{2}\,d\alpha\,d\beta \tag{I.II}$$

$$E_{вн}=\iint\limits_{G(\alpha,\beta)}\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\,\varepsilon\,d\alpha\,d\beta \tag{I.12}$$

$$E_н=\iint\limits_{G(\alpha,\beta)}\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{H^2}{8\pi\rho}\,d\alpha\,d\beta \tag{I.13}$$

Тогда функционал действия по Гамильтону есть

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\{E_к(t)-E_{вн}(t)-E_н(t)\}\,dt$$
$$=\iint\limits_{t_0\,G(\alpha,\beta)}^{t_1}\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\left[\frac{u^2+v^2}{2}-\varepsilon-\frac{H^2}{8\pi\rho}\right]d\alpha\,d\beta\,dt \tag{I.14}$$

Примем вариации координат $\delta\xi, \delta\mu$ за независимые. Связь $\delta\xi, \delta\mu$ с δH и $\delta\rho$ находится из условия (I.9) и (I.10)

$$\delta\rho \frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)} = -\rho\left\{\frac{D(\xi^{\ell-1}\delta\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)} + \frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\delta\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right\} \qquad (I.9')$$

$$\delta H \frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)} = -H\left\{\frac{D(\delta\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)} + \frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right\} \qquad (I.10')$$

Поскольку диссипативные процессы предполагаются отсутствующими для определения $\delta\varepsilon$ имеем соотношение

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right)_s \frac{\partial\eta}{\partial\rho}\delta\rho = \frac{P}{\rho^2}\delta\rho ,$$

или используя (I.9')

$$\rho\,\delta\varepsilon\,\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)} = -P\left\{(\ell-1)\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\delta\xi + \xi^{\ell-1}\delta\left[\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]\right\} \qquad (I.15)$$

Подставляя (I.9),(I.10) и (I.15) в выражение для δS

$$\delta S = \iiint\limits_{t_0\,G(\alpha,\beta)}^{t_1} \frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\left[\frac{d\xi}{dt}\frac{d\delta\xi}{dt} + \frac{d\mu}{dt}\frac{d\delta H}{dt} - \delta\varepsilon - \frac{H\delta H}{4\pi\rho} + \frac{H^2}{4\pi\rho^2}\delta\rho\right] d\alpha\, d\beta\, dt$$

находим:

$$\delta S = \iiint\limits_{t_0\,G(\alpha,\beta)}^{t_1} \frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{d\delta\xi}{dt} + \frac{d\mu}{dt}\frac{d\delta\mu}{dt} + P(\ell-1)\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\delta\xi + \right.$$

$$\left.\xi^{\ell-1}\delta\left(\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right)\right] - \frac{H^2}{8\pi}(\ell-1)\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\delta\xi + \xi^{\ell-1}\frac{H^2}{8\pi}\delta\left[\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]\Bigg\} d\alpha\, d\beta\, dt \qquad (I.16)$$

Предполагая, что вариации $\delta\xi, \delta\mu$ обращаются в нуль на границе области $G(\alpha,\beta)$, интегрированием по частям выражение

для δS преобразуется к виду:

$$\delta S = \iint\limits_{t_c\ G(\alpha\beta)}\int^{t_{\sigma}}\Bigg\{\Bigg\{\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{du}{dt}+\xi^{\ell-1}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big\{\Big(p+\frac{H^2}{8\pi}\Big)\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\Big\}-\frac{\partial}{\partial\beta}\Big\{\Big(p+\frac{H^2}{8\pi}\Big)\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\Big\}\Bigg]+$$

$$+\frac{H^2}{4\pi}(\ell-1)\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\Bigg\}\delta\xi^{\ell}+\Bigg\{\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dv}{dt}-\frac{1}{\ell}\Bigg[\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big\{\Big(p+\frac{H^2}{8\pi}\Big)\frac{\partial\xi^{\ell}}{\partial\beta}\Big\}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}\Big\{\Big(p+\frac{H^2}{8\pi}\Big)\frac{\partial\xi^{\ell}}{\partial\alpha}\Big]\Big\}\delta\mu\Bigg\}d\alpha\,d\beta\,dt$$

Требование равенства нулю вариации δS приводит к динамическим уравнениям МГД в лагранжевых переменных

$$\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{du}{dt}+\xi^{\ell-1}\Big\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big[\Big(p+\frac{H^2}{8\pi}\Big)\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\Big]-\frac{\partial}{\partial\beta}\Big[\Big(p+\frac{H^2}{8\pi}\Big)\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\Big]\Big\}+\frac{H^2}{4\pi}(\ell-1)\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}=0 \qquad (I.17)$$

$$\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dv}{dt}-\frac{1}{\ell}\Big\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big[\Big(p+\frac{H^2}{8\pi}\Big)\frac{\partial\xi^{\ell}}{\partial\beta}\Big]-\frac{\partial}{\partial\beta}\Big[\Big(p+\frac{H^2}{8\pi}\Big)\frac{\partial\xi^{\ell}}{\partial\alpha}\Big]\Big\}=0 \qquad (I.18)$$

С помощью несложных преобразований (I.17) и (I.18) можно представить следующей ("якобиановой") форме:

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{du}{dt}\xi^{\ell-1}\Big[\frac{D(p,\mu)}{D(\alpha,\beta)}+\frac{D(\frac{H^2}{8\pi},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\Big]+\frac{H^2}{4\pi}\frac{D(\xi^{\ell-1},\mu)}{D(\alpha,\beta)}=0 \qquad (I.17')$$

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},p)}{D(\alpha,\beta)}+\frac{1}{8\pi\ell}\frac{D(\xi^{\ell},H^2)}{D(\alpha,\beta)}=0 \qquad (I.18')$$

Из условий (I.9) и (I.10) нетрудно получить законы изменения удельной внутренней энергии ε и уравнение индукции магнитного

поля в лагранжевых переменных

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{d\varepsilon}{dt}=-P\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right] \tag{I.19}$$

$$\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dH}{dt}=-H\frac{d}{dt}\left[\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right] \tag{I.20}$$

Из (I.20) автоматически следует закон изменения энергии магнитного поля в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{H^2}{8\pi}\right)=-\frac{H^2}{8\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]+\frac{H^2}{4\pi}(\ell-1)\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}u \tag{I.21}$$

Система уравнении замыкается уравнением состояния $P=P(\varepsilon,\rho)$ и кинематическими соотношениями:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\frac{d\xi}{dt},\frac{d\mu}{dt}\right)=(u,v)$$

П.3. Для случая, рассмотренного в п.2, получим интегральные законы сохранения. Интегрируя уравнение (I.9) по области $G'(\alpha,\beta)$ находим, что

$$\iint_{G'}\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}d\alpha d\beta=\iint_{G'}\rho_0(\alpha,\beta)d\alpha d\beta=M_{G'}$$

где $M_{G'}$ масса жидкости заключенная в $G'(\alpha,\beta)$. Отсюда следует интегральная форма закона сохранения массы

$$\frac{d}{dt}\iint_{G'}\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}d\alpha d\beta=0 \tag{I.22}$$

Законы изменения импульсов по ξ и μ для среды, заключенной в G' получаются интегрированием динамических уравнений (I.17), (I:18) с учетом (I.22) и имеют соответственно вид:

$$\frac{d}{dt}\iint_{G'}\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}u\,d\alpha d\beta-(\ell-1)\iint_{G'}\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\left(P-\frac{H^2}{8\pi}\right)d\alpha d\beta=\oint_{\Gamma'}\xi^{\ell-1}\left(P+\frac{H^2}{8\pi}\right)d\mu \tag{I.23}$$

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{G'}\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}v\,d\alpha\,d\beta=\frac{1}{\ell}\oint\limits_{\Gamma'}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)d\xi^{\ell} \tag{I.24}$$

где Γ' обозначает ограничивающий G' контур. Ниже приведены уравнения изменения потенциальной, кинетической и полной энергии жидкости в G' соответственно. Эти уравнения могут быть легко получены интегрированием соответствующих дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{G'}\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\left(\varepsilon+\frac{H^2}{8\pi\rho}\right)d\alpha\,d\beta=-\iint\left\{\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]-\frac{H^2u}{4\pi}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right\}d\alpha\,d\beta \tag{I.25}$$

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{G'}\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{u^2+v^2}{2}d\alpha\,d\beta-\iint\limits_{G'}\left(p-\frac{H^2}{8\pi}\right)u\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}=\iint\limits_{G}\xi^{\ell}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)\frac{d}{dt}\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}d\alpha\,d\beta \tag{I.26}$$

$$-\oint\limits_{\Gamma'}\xi^{\ell}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)u\,d\mu+\oint\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)\frac{v}{\ell}d\xi^{\ell}$$

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{G'}\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\left\{\frac{u^2+v^2}{2}+\varepsilon+\frac{H^2}{8\pi\rho}\right\}d\alpha\,d\beta=-\oint\xi^{\ell}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS \tag{I.27}$$

где $\vec{V}=(u,v)$, а $\vec{n}$ внешняя нормаль для границы области Γ'.

П.4. Пусть теперь вектор магнитного поля $\vec{H}$ лежит в плоскости течения и имеет компоненты H_ξ, H_μ, $(H_\xi=H_x,\ H_\mu=H_y,)$ для декартовых и $H_\xi=H_R,\ H_\mu=H_z$ для цилиндрических координат. Полная магнитная энергия для области $G(\alpha,\beta)$ в этом случае запишется как

$$E_H(t)=\iint\limits_{G(\alpha,\beta)}\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{H_\xi^2+H_\mu^2}{8\pi}d\alpha\,d\beta \tag{I.28}$$

Условие постоянства магнитного потока через произвольную жидкую линию приводит к соотношениям [I] :

$$\xi^{\ell-1}\left(H_\xi \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} - H_\mu \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right) = C_1(\alpha,\beta) \qquad (I.29)$$

$$\xi^{\ell-1}\left(H_\xi \frac{\partial \mu}{\partial \beta} - H_\mu \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right) = C_2(\alpha,\beta) \qquad (I.30)$$

Из которых легко определить H_ξ и H_μ через начальные значения потоков C_1 и C_2

$$H_\xi \frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)} = C_2 \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - C_1 \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \qquad (I.29')$$

$$H_\mu \frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)} = C_2 \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} - C_1 \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \qquad (I.30')$$

соотношения (I.29) и (I.30) позволяют найти овязь между вариациями $\delta H_\xi, \delta H_\mu$ и $\delta\xi, \delta\mu$:

$$\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\delta H_\xi = -H_\xi \delta\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right] + C_2\frac{\partial \delta\xi}{\partial \alpha} - C_1\frac{\partial \delta\xi}{\partial \beta} \qquad (I.29'')$$

$$\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\delta H_\mu = -H_\mu \delta\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right] + C_2\frac{\partial \delta\mu}{\partial \alpha} - C_1\frac{\partial \delta\mu}{\partial \beta} \qquad (I.30'')$$

Представим функционал действия S в виде $S_H + S_{ГКЗ} = S$, где

$$S_{ГКЗ} = \int_{t_c}^{t_1} (E_K - E_{BH})\,dt, \quad S_H = -\int_{t_c}^{t_1} E_K(t)\,dt$$

Подставляя в выражение для S_H значение E_H из (I.28') находим, что

$$\delta S_H = -\iiint\limits_{t_0\, G(\alpha,\beta)}^{t_1} \frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\left\{\frac{H_\xi \delta H_\xi + H_\mu \delta H_\mu}{4\pi\rho} - \frac{H_\xi^2 + H_\mu^2}{8\pi\rho^2}\delta\rho\right\} d\alpha\, d\beta\, dt \qquad (I.31)$$

Используем соотношения (I.29″) и (I.30″), произведем в (I.31) интегрирование по частям, полагая значения $\delta\xi$ и $\delta\mu$ на границе равными нулю. Тогда при учете результатов П.2 для δS_{TKS} из условия равенства нулю вариации δS приходим к динамическим уравнениям в переменных лагранжа для рассматриваемого случая

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{du}{dt} + \xi^{\ell-1}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right] - \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\right]\right\} = \qquad (I.32)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{H_\xi c_2}{4\pi} - \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{H_\xi c_1}{4\pi}$$

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dv}{dt} - \frac{1}{\ell}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\beta}\right] - \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\alpha}\right]\right\} = \qquad (I.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{H_\mu c_2}{4\pi} - \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{H_\mu c_1}{4\pi}$$

Или в "якобиановой" форме:

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{du}{dt} + \xi^\ell\left[\frac{D\left(p+\frac{H_\xi^2+H_\mu^2}{8\pi},\mu\right)}{D(\alpha,\beta)} - \frac{1}{4\pi\ell}\frac{D(\xi^\ell, H_\xi H_\mu)}{D(\alpha,\beta)} - \frac{(\ell-1)}{4\pi}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}H_\xi^2 = 0 \qquad (I.32')$$

$$\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dv}{dt} - \frac{1}{\ell}\frac{D\left(p+\frac{H_\mu^2+H_\xi^2}{8\pi},\xi^\ell\right)}{D(\alpha,\beta)} - \frac{\xi^{\ell-1}}{4\pi}\frac{D(H_\xi H_\mu,\mu)}{D(\alpha,\beta)} - \frac{1}{4\pi}\frac{D(\xi^\mu,\mu)}{D(\alpha,\beta)}H_\xi H_\mu = 0 \qquad (I.33')$$

из (I.29′) и (I.30′) после дифференцирования по времени получаем уравнения индукции магнитного поля:

$$\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dH_\xi}{dt}=-H_\xi\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]+\xi^{\ell-1}H_\xi\frac{D(u,\mu)}{D(\alpha,\beta)}+\frac{H_\mu}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},u)}{D(\alpha,\beta)} \qquad (I.34)$$

$$\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dH_\mu}{dt}=-H_\mu\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]+\xi^{\ell-1}H_\xi\frac{D(v,\mu)}{D(\alpha,\beta)}+\frac{H_\mu}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},v)}{D(\alpha,\beta)} \qquad (I.35)$$

из которых легко находятся уравнение для изменения энергии магнитного поля:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right]=-\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right\}+\xi^{\ell-1}\frac{H_\xi^2}{4\pi}\frac{D(u,\mu)}{D(\alpha,\beta)}+ \qquad (I.36)$$

$$+\frac{H_\xi H_\mu}{4\pi}\left[\xi^{\ell-1}\frac{D(\xi,u)}{D(\alpha,\beta)}+\xi^{\ell-1}\frac{D(v,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]+\frac{H_\mu}{4\pi\ell}\frac{D(\xi^{\ell},v)}{D(\alpha,\beta)}$$

Отметим, что полученную систему МГД уравнений можно преобразовать к более простому виду, используя выражения для $c_1(\alpha,\beta)$ и $c_2(\alpha,\beta)$ {см. (I.29),(I.30)} :

$$\frac{\varrho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{d\vec{V}}{dt}+\vec{\nabla}_{\alpha\beta}\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\vec{H}c_2}{4\pi}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\vec{H}c_1}{4\pi} \qquad (I.32)$$

$$\vec{\nabla}_{\alpha\beta}=\left\{\xi^{\ell-1}\frac{D(\ ,\mu)}{D(\alpha,\beta)},\ -\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\ )}{D(\alpha,\beta)}\right\} \qquad (I.33)$$

$$\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dH_\xi}{dt}=-H_\xi\frac{D}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]+c_2\frac{\partial u}{\partial\alpha}-c_1\frac{\partial u}{\partial\beta} \qquad (I.34)$$

$$\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dH_\mu}{dt}=-H_\mu\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]+c_2\frac{\partial v}{\partial\alpha}-c_1\frac{\partial v}{\partial\beta} \qquad (I.35)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right]=-\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]+\vec{H}\cdot\left(c_2\frac{\partial\vec{V}}{\partial\alpha}-c_1\frac{\partial\vec{V}}{\partial\beta}\right) \qquad (I.36)$$

Из уравнений (I.32)–(I.36) аналогично п.3 можно получить интег-

ральные законы сохранения импульсов, потенциальной, кинетической и полной энергий, отнесенных к облаоти $G'(\alpha,\beta)\subset G(\alpha,\beta)$, которые и выписаны ниже соответственно в виде:

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{G'} \rho\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\left[\varepsilon+\frac{\vec{H}^2}{8\pi\rho}\right]d\Omega=-\iint\limits_{G'}\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]d\Omega-$$

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{G'}\left\{u\left(\frac{\partial H_\xi}{\partial\alpha}c_2-\frac{\partial H_\xi}{\partial\beta}c_1\right)-v\left(\frac{\partial H_\mu}{\partial\alpha}c_2-\frac{\partial H_\mu}{\partial\beta}c_1\right)\right\}d\Omega \tag{I.37}$$

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{G'}\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}u\,d\Omega-\iint\limits_{G'}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)d\Omega=$$

$$=-\oint\limits_{\Gamma'}\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)\xi^{\ell-1}d\mu-\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Gamma'}H_\xi(c_1d\alpha+c_2d\beta) \tag{I.38}$$

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{G'}\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}v\,d\Omega=\frac{1}{\ell}\oint\limits_{\Gamma'}\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)d\xi^{\ell}+ \tag{I.39}$$

$$\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Gamma'}H_\mu(c_2d\beta+c_1d\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{G'}\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{u^2+v^2}{2}=\oint\limits_{\Gamma'}\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)(u\,d\mu-v\,d\xi)\xi^{\ell-1}$$

$$+\iint\limits_{G'}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]d\Omega+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{G'}u\left(\frac{\partial H_\xi c_2}{\partial\alpha}-\frac{\partial H_\xi c_1}{\partial\beta}\right)d\Omega \tag{I.40}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{G'}v\left(\frac{\partial H_\mu c_2}{\partial\alpha}-\frac{\partial H_\mu c_1}{\partial\beta}\right)d\Omega$$

$$\frac{d}{dt}\iint\frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\left[\frac{u^2+v^2}{2}+\varepsilon+\frac{\vec{H}^2}{8\pi\rho}\right]d\Omega=$$

$$=-\oint\limits_{\Gamma}\left(p+\frac{\vec{H}}{8\pi}\right)\xi^{\ell-1}\vec{v}\vec{n}\,dS \tag{I.41}$$

§ 2. Об аппроксимации кинетической и внутренней энергии. Разностные уравнения газовой динамики

Как уже отмечалось в § I, функционал действия S среды с вмороженным магнитным полем можно представить в виде

$$S = S_{ГАЗ} + S_{Н} \tag{2.I}$$

где $S_{ГАЗ}$ – определяется только газодинамическими характеристиками среды (кинетической и внутренней энергией)

$$S_{ГАЗ} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_{ГАЗ}(t)\,dt \tag{2.2}$$

а $S_{Н}$ – определяется энергией магнитного поля

$$S_{Н} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_{Н}(t)\,dt \tag{2.3}$$

Поскольку $\delta S = \delta S_{ГАЗ} + \delta S_{Н}$, то процесс получения динамических уравнений МГД может быть разбит на две относительно независимые стадии. Первая из них будет заключаться в нахождении чисто газодинамических уравнений без учета влияния магнитного поля, во второй же стадии условие $\delta S_{Н} = 0$ определит пондеромоторные силы, обусловленные наличием $\vec{H}$.

В этом параграфе, на основе аппроксимации только $S_{ГАЗ}$ и уравнения неразрывности представлены разностные уравнения газовой динамики в декартовых и цилиндрических координатах. Это позволит в последующих параграфах сосредоточить основное внимание на членах зависящих только от $\vec{H}$.

П.I. Пусть область $G(\alpha,\beta)$ {П.2, §1} представляет собой единичный квадрат на плоскости Лагранжевых переменных (α, β).

Введем на $G(\alpha,\beta)$ равномерную прямоугольную сетку:

$$\alpha_i = ih_\alpha, \quad i=1,2,\dots,N, \quad h_\alpha = 1/N-1 \qquad (2.4)$$
$$\beta_j = jh_\beta, \quad j=1,2,\dots,M, \quad h_\beta = 1/M-1$$

Обозначим через ω множество ячеек определенной таким образом сетки, а $\bar{\omega}$ множество внутренних узлов. Отнесем "кинематические" величины ξ, μ, u, v к узлам разностной сетки $\bar{\omega}$ и обозначим их $\xi_{ij}, \mu_{ij}, u_{ij}, v_{ij}$. Здесь как и ранее предполагается, что ξ, μ соответствуют x, y в декартовых координатах и R, Z – в цилиндрических. u и v проекции скорости на ξ и μ направления соответственно.

Термодинамические величины ρ, ε, p будем относить к центрам ячеек (к сетке ω) и обозначать $\rho_{ij}, \varepsilon_{ij}, p_{ij}$ $\{p_{ij} = p(\alpha_{i+1/2}, \beta_{j+1/2})$ и т.д.$\}$

Аппроксимируем лагранжиан $\mathcal{L}$ разностным по пространству выражением

$$\mathcal{L}^h = \sum_{(ij)\in\omega} \rho_{ij} \left(\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right)_{ij} \left[\frac{\langle u^2\rangle_{ij} + \langle v^2\rangle_{ij}}{2} - \varepsilon_{ij}\right] h_\alpha h_\beta \qquad (2.5)$$

где

$$\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]_{ij} = \begin{Vmatrix} \left(\frac{\partial \xi^\ell}{\partial \alpha}\right)_{i+1/2 j+1/2} & \left(\frac{\partial \xi^\ell}{\partial \beta}\right)_{i+1/2 j+1/2} \\ \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha}\right)_{i+1/2 j+1/2} & \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)_{i+1/2 j+1/2} \end{Vmatrix} \qquad (2.6)$$

$$\langle u^2\rangle_{ij} = 0.25\left(u^2_{ij} + u^2_{i+1j} + u^2_{i+1j+1} + u_{ij+1}\right)$$
$$\langle v^2\rangle_{ij} = 0.25\left(v^2_{ij} + v^2_{i-1j} + v^2_{i+1j+1} + v^2_{ij+1}\right) \qquad (2.7)$$

Очевидно, что при аппроксимации $\left(\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right)_{ij}$ с точностью до второго порядка выполнено равенство

$$\mathcal{L}_{ГАЗ}(t) = \mathcal{L}^{Fl}_{ГАЗ}(t) + O(h^2_\alpha + h^2_\beta) \qquad (2.8)$$

Введем обозначения

$$\xi^\ell_{ij\alpha} = \frac{1}{2h_\alpha}\left(\xi^\ell_{i+1j} - \xi^\ell_{ij} + \xi^\ell_{i+1j+1} - \xi^\ell_{ij+1}\right)$$

$$\xi^{\ell}_{ij\beta} = \frac{1}{2h_\beta}\left(\xi^{\ell}_{i+1j+1} + \xi^{\ell}_{ij+1} - \xi^{\ell}_{ij} - \xi^{\ell}_{i+1j}\right)$$

$$\mu_{ij\alpha} = \frac{1}{2h_\alpha}\left(\mu_{i+1j} - \mu_{ij} + \mu_{i+1j+1} - \mu_{ij+1}\right) \qquad (2.9)$$

$$\mu_{ij\beta} = \frac{1}{2h_\beta}\left(\mu_{i+1j+1} + \mu_{ij+1} - \mu_{ij} - \mu_{i+1j}\right)$$

непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$\xi^{\ell}_{ij\alpha} = \left(\frac{\partial \xi^{\ell}}{\partial \alpha}\right)_{i+1/2\,j+1/2} + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2), \quad \xi^{\ell}_{ij\beta} = \left(\frac{\partial \xi^{\ell}}{\partial \beta}\right)_{i+1/2\,j+1/2} + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$$

$$\mu_{ij\alpha} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha}\right)_{i+1/2\,j+1/2} + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2), \quad \mu_{ij\beta} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)_{i+1/2\,j+1/2} + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$$

Тогда выражение

$$\frac{V_{ij}}{h_\alpha h_\beta} = \frac{1}{\ell}\begin{Vmatrix} \xi^{\ell}_{ij\alpha} & \xi^{\ell}_{ij\beta} \\ \mu_{ij\alpha} & \mu_{ij\beta} \end{Vmatrix} = \qquad (2.10)$$

$$= \frac{1}{2\ell h_\alpha h_\beta}\left[\left(\xi^{\ell}_{i+1j+1} - \xi^{\ell}_{ij}\right)\left(\mu_{i+1j} - \mu_{ij+1}\right) + \left(\xi^{\ell}_{i+1j} - \xi^{\ell}_{ij+1}\right)\left(\mu_{i+1j+1} - \mu_{ij}\right)\right]$$

аппроксимирует $\left(\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^{\ell},\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right)_{ij}$ со вторым порядком по h_α и h_β. Отметим, что для декартовых координат V_{ij} совпадает со значением объема лагранжевой ячейки, а в цилиндрическом случае аппроксимирует объем ячейки с точностью $O(h_\alpha^4 + h_\beta^4)$.

Таким образом, с точностью $h_\alpha^2 + h_\beta^2$ разностный лагранжиан $\mathcal{L}^h_{ГАЗ}$ можно представить в форме [I] :

$$\mathcal{L}^h_{ГАЗ} = \sum_{ij\in\omega} \rho_{ij} V_{ij}\left[\frac{\langle u_{ij}^2 + v_{ij}^2\rangle}{2} - \varepsilon_{ij}\right] \qquad (2.11)$$

Нетрудно показать, что разностное соотношение

$$\rho_{ij} V_{ij} = m_{ij} \tag{2.12}$$

аппроксимирует с точностью $O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$ непрерывное условие неразрывности (I.9), взятое в центре ячейки (ij), если под m_{ij}, имеющей смысл массы лагранжевой ячейки, понимать $\rho_0(\alpha_{i+1/2}, \beta_{j+1/2})\, h_\alpha h_\beta$.

П.2. Приравнивая нулю первую вариацию функционала действия $S^h_{ГАЗ} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}^h_{ГАЗ}\, dt$ с учетом разностного аналога уравнения неразрывности (2.12) и следующего термодинамического равенства (следствия изоэнтропичности)

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\right)_{i+1/2, j+1/2} = -\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \rho_{ij}} \frac{1}{\rho_{ij}^2} = -P_{ij} \tag{2.13}$$

получим динамические уравнения гидродинамики в дифференциально-разностной форме [I]:

$$\begin{cases} M_{ij} \dfrac{du_{ij}}{dt} - P_k \dfrac{\partial V_k}{\partial \xi_{ij}} = 0 & (2.14) \\[2ex] M_{ij} \dfrac{dv_{ij}}{dt} - P_k \dfrac{\partial V_k}{\partial \mu_{ij}} = 0 & (2.15) \\ k \in \mathbb{W}_1(ij),\ (ij) \in \bar{\omega} \end{cases}$$

где $M_{ij} = \frac{1}{4}(m_{ij} + m_{i+1j} + m_{i+1j+1} + m_{ij+1})$

В уравнениях (2.14),(2.15) дважды повторяющийся индекс k, означает суммирование по шаблону $\mathbb{W}_1(ij) = \{(ij), (i-1j), (i-1,j-1), (ij-1)\}$ принадлежащему $\bar{\omega}$.

Нетрудно показать, что уравнения (2.14),(2.15) аппроксимируют со вторым порядком непрерывные уравнения (I.17),(I.18) при отсутствии магнитного поля.

По виду разностного лагранжиана $\mathcal{L}^{h}_{\text{ГАЗ}}$, с учетом (2.13), (2.14), (2.15) однозначно определяется дифференциально-разностное уравнение изменения удельной внутренней энергии:

$$m_{ij}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = -P_{ij}\frac{dV_{ij}}{dt} = -P_{ij}\left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_k}u_k + \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_k}v_k\right). \qquad (2.16)$$

$$k \in \mathbb{W}_2(ij), \quad (ij) \in \bar{\omega}$$

где $\mathbb{W}_2(ij)$ подмножество узлов сетки $\bar{\omega}$, совпадающее с $\{(ij), (i+1j), (i+1|+1), (ij+1)\}$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что (2.16) аппроксимирует уравнение (1.19) со вторым порядком точности.

Система дифференциально-разностных уравнений (2.13)-(2.16) обладает свойством полной консервативности [4], [1].

Отметим, что уравнения (2.14) и (2.15) справедливы только для внутренних узлов разностной сетки. Уравнения для граничных узлов определяются из конкретного вида граничных условий [1].

Переход к разностным уравнениям осуществляется посредством замены производных по времени соответствующими разностями. В результате получается 5-и параметрическая система алгебраических уравнений (1)

$$(II)\begin{cases} M_{ij}\dfrac{u_{ij}^{n+1}-u_{ij}^{n}}{\tau_n} - P_k^{(\sigma_1)}\left(\dfrac{\partial V_k}{\partial \xi_{ij}}\right)_*^{(\sigma_2)} = 0, & (2.17) \\ M_{ij}\dfrac{v_{ij}^{n+1}-v_{ij}^{n}}{\tau_n} - P_k^{(\sigma_1)}\left(\dfrac{\partial V_k}{\partial \mu_{ij}}\right)_*^{(\sigma_2)} = 0, \quad k \in \mathbb{W}_1(ij); & (2.18) \\ m_{ij}\dfrac{\varepsilon_{ij}^{n+1}-\varepsilon_{ij}^{n}}{\tau_n} = -P_{ij}^{(\sigma_1)}\left\{\left(\dfrac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_k}\right)_*^{(\sigma_3)} u_k^{(\sigma_4)} + \left(\dfrac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_k}\right)_*^{(\sigma_3)} v_k^{(\sigma_4)}\right\}, \quad k \in \mathbb{W}_2(ij) & (2.19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_{ij}^{n} V_{ij}^{n} = m_{ij} & (2.20) \\ \dfrac{\xi_{ij}^{n+1} - \xi_{ij}^{n}}{\tau_n} = u_{ij}^{(\sigma_5)} & (2.21) \\ \dfrac{\mu_{ij}^{n+1} - \mu_{ij}^{n}}{\tau_n} = v_{ij}^{(\sigma_5)} & (2.22) \\ P_{ij}^{n} = P(\rho_{ij}^{n}, \varepsilon_{ij}^{n}), \ (ij) \in \overline{\omega} & (2.23) \end{cases}$$

где величина типа $f^{(\sigma)}$, как обычно обозначает $\sigma f^{n+1} + (1-\sigma) f^{n}$. Если же величина f является произведением сомножителей (например, $\partial V_{ij}/\partial \xi_{ij} = \frac{1}{2}(\mu_{i+1j} - \mu_{i-1j}) \xi_{ij}^{\ell-1}$), то выражение типа $f^{(\sigma)}$ означает, что все сомножители берутся с весом σ - $\left\{ \left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}}\right)^{(\sigma)}_{n} = \frac{\xi_{ij}^{(\sigma)\ell-1}}{2} (\mu_{i+1j}^{(\sigma)} - \mu_{i-1j}^{(\sigma)}) \right\}$

Как показано в [I] система разностных уравнений (I) при $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0.5$ (σ_1 произвольна) обладает свойством полной консервативности. Очевидно, что полностью консервативная система (I) при $\sigma_1 = 0.5$ аппроксимирует соответотвующую систему дифференциальных уравнений со вторым порядком относительно шага по времени τ .

В заключении этого пункта отметим, что при использовании системы (I) для расчета течений с ударными волнами необходимо введение какой-либо искусственной вязкости q_{ij} . Для ооблюдения консервативности вместо давления P_{ij} в уравнениях следует брать модифицированное давление $P_{ij} + q_{ij}$.

Так, в работе [5] предложен канкретный вид искусственной вязкости согласованный со спектральными свойствами разностных уравнений. Такой вид искусственной вязкости хорошо зарекомендовал себя в практических расчетах [6] . Следует отметить, что принцип поотроения искусственных диссипативных процессов предложенный в [5] может быть обобщен и на случай течений при наличии магнитного поля.

II.3. Можно показать, что при использовании в (II) вместо V_{ij} ка-

кого-либо другого выражения V_{ij}^{*}, такого, что $V_{ij}^{*}=V_{ij}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$ ситема (I) остается полностью консервативной. Порядок аппроксимации при этом так же остается прежним. Таким образом уравнения (2.17)-(2.23) можно трактовать как семейство схем, зависящих от формы представления V_{ij}.

От дифференциально-разностных уравнений естественно требовать, чтобы состояние равновесия среды $\{P_{ij}=const,\ v,u=const\}$ сохранялось с течением времени при произвольной конфигурации расчетной сетки. Разностные уравнения, удовлетворяющие указанному требованию назовем сбалансированными. По виду разностных уравнений можно установить, что для сбалансированности необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\sum_{k\in\Pi_1(ij)}\frac{\partial V_k}{\partial\xi}=\sum_{k\in\Pi_2(ij)}\frac{\partial V_k}{\partial\mu}=0\ ,\qquad (ij)\in\bar{\omega} \tag{2.24}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при

$$V_{ij}=\frac{1}{2\ell}\left[(\xi^{\ell}_{i+1j}-\xi^{\ell}_{ij+1})(\mu_{i+1j+1}-\mu_{ij})+(\xi^{\ell}_{i+1j+1}-\xi^{\ell}_{ij})(\mu_{ij+1}-\mu_{i+1j})\right]$$

а также при точном значении объема, использованного в [I] система (I) сбалансированна.

Однако для V_{ij} заданного выражением

$$V_{ij}=0.25(R_{ij}+R_{i+1j}+R_{i+1j+1}+R_{ij+1})\,S_{ij}$$

условие (2.24) не выполнены, т.е. на некоторых сетках будет нарушаться состонние равновесия.

Для того, чтобы разностные схемы могли достаточно точно передавать характер решения дифференциальных уравнении на грубых сетках, они должны быть сбалансированны.

§ 3. Аппроксимация магнитной энергии и условий вмороженности магнитного поля

В этом параграфе проводится аппроксимация по пространственным переменным части лагранжиана $\mathcal{L}_H$, определяемой энергией магнитного поля. Получены также взаимно согласованные аппроксимации условий вмороженности, уравнений индукции и изменения энергии магнитного поля в декартовых и цилиндрических координатах, при наличии как одной, так и двух компонент магнитного поля. Аппроксимация проведена с точностью до второго порядка.

П.I. $\vec{r}=(\xi,\mu,0)$; Пусть H обозначает компоненту магнитного вектора $\vec{H}$ и равняется H_z в случае декартовых и H_φ в случае цилиндрических координат. Пусть H_{ij} значения магнитного поля в центрах лагранжевых ячеек (ij)

$$H_{ij}=H(\alpha_i+h_\alpha/2,\ \beta_j+h_\beta/2)$$

Будем аппроксимировать лагранжиан $\mathcal{L}_H$ разностным выражением

$$\mathcal{L}_H^h=\sum_{(ij)\in\omega} V_{ij}\frac{H_{ij}^2}{8\pi} \qquad (3.I)$$

Принимая во внимание результаты § 2 находим, что:

$$\mathcal{L}_H^h=\mathcal{L}_H+O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$$

и следовательно

$$S_H^h=\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}_H^h(t)\,dt=S_H+O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$$

Аппроксимируем условия вмороженности магнитного поля; для этого рассмотрим равенство

$$\left[H\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}-\hat{\Phi}\right]_{i+1/2,j+1/2}=H_{ij}\left\langle\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right\rangle_{i+1/2,j+1/2}-\hat{\Phi}_{i+1/2,j+1/2}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2) \qquad (3.2)$$

Введем выражение для площади S_{ij} лагранжевой ячейки следующим образом

$$\frac{S_{ij}}{h_\alpha h_\beta} = \begin{Vmatrix} \xi_{ij\alpha} & \xi_{ij\beta} \\ \mu_{ij\alpha} & \mu_{ij\beta} \end{Vmatrix} = \left\langle \frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)} \right\rangle_{i+1/2\,j+1/2} + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2) \qquad (3.2)$$

Очевидно, что разностное условие

$$H_{ij} S_{ij} = \Phi_{ij} \qquad (3.3)$$

где $\Phi_{ij} = \hat{\Phi}_{i+1/2\,j+1/2} h_\alpha h_\beta$ аппроксимирует условие вмороженности магнитного поля отнесенное к центру лагранжевой ячейки со вторым порядком точности.

Дифференцирование (3.3) по времени приводит к уравнению индукции магнитного поля в дифференциально-разностной форме

$$S_{ij} \frac{dH_{ij}}{dt} = -H_{ij} \frac{dS_{ij}}{dt} \qquad (3.4)$$

аппроксимирующей непрерывное уравнение индукции (I.20) также с точностью $O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$.

Умножим (3.4) на $\frac{H^2}{4\pi}\hat{\xi}_{ij}$, где $\hat{\xi}_{ij} = V_{ij}/S_{ij}$ имеет смысл среднего значения $\xi^{\ell 1}$ в ячейке (ij). После несложных преобразований получим закон изменения магнитной энергии ячейки – $E_{H\,ij}$

$$\frac{dE_{H\,ij}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V_{ij}\frac{H_{ij}^2}{8\pi}\right) = -\frac{H_{ij}^2}{8\pi}\frac{dV_{ij}}{dt} + \frac{H_{ij}^2}{4\pi} S_{ij} \frac{d\hat{\xi}_{ij}}{dt} \qquad (3.5)$$

В силу того, что для $\hat{\xi}$ справедливы разноотные соотношения

$$\hat{\xi}_{ij} = \frac{V_{ij}}{S_{ij}} = \frac{1}{4}\left(\xi_{ij}^{\ell 1} + \xi_{i+1\,j}^{\ell 1} + \xi_{i+1\,j+1}^{\ell 1} + \xi_{i\,j+1}^{\ell 1}\right) + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2) \qquad (3.6)$$

$$\frac{d\hat{\xi}_{ij}}{dt} = \frac{1}{4}\left(\dot{\xi}^{\ell-1}_{ij}+\dot{\xi}^{\ell-1}_{i+1j}+\dot{\xi}^{\ell-1}_{ij+1}+\dot{\xi}^{\ell-1}_{i+1j+1}\right)+O(h_\alpha^2+h_\beta^2)=(\ell-1)u_{i+1/2j+1/2}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$$

нетрудно видеть, что (3.5) аппроксимирует дифференциальное уравнение (I.2I) со вторым порядком точности.

Таким образом, дифференциально-разностные уравнения (3.3)-(3.5) аппроксимируют соответствующие дифференциальные уравнения, и в силу самого способа их получения разностные аппроксимации оказываются взаимосогласованными, то есть, если взять за основу любое из уравнений (3.3)-(3.5), то с помощью эквивалентных преобразований можно получить остальные два уравнения. Физически это означает, что из закона сохранения потока магнитного поля автоматически следует уравнение сохранения магнитной энергии (3.5) и наоборот. Следовательно проведенная аппроксимация исключает возможность появления каких-либо фиктивных источников разностного происхождения.

При переходе от непрерывной области изменения t к дискретной уравнения вмороженности, индукции и изменения энергии магнитного поля могут быть записаны соответственно в виде:

$$S^n H^n = S^{n+1} H^{n+1} = \Phi \tag{3.7}$$

$$\frac{S^{n+1}+S^n}{2}\,\frac{H^{n+1}-H^n}{\tau_n} = -\frac{H^{n+1}+H^n}{2}\,\frac{S^{n+1}-S^n}{\tau_n} \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{\tau_n}\left\{\left(\frac{\nabla H^2}{8\pi}\right)^{n+1}-\left(\frac{\nabla H^2}{8\pi}\right)^{n}\right\} = \frac{E_H^{n+1}-E_H^{n}}{\tau_n} =$$

$$-\frac{H^{n+1}H^n}{8\pi}\,\frac{\nabla^{n+1}-\nabla^n}{\tau_n}+\frac{H^{n+1}H^n}{4\pi}\,\frac{S^{n+1}+S^n}{2}\,\frac{\hat{\xi}^{n+1}-\hat{\xi}^n}{\tau_n} = \frac{H^{n+1}H^n}{8\pi\tau_n}\left(S^{n+1}\frac{\nabla^n}{S^n}-S^n\frac{\nabla^{n+1}}{S^{n+1}}\right) \tag{3.9}$$

$(ij)\in\omega$

Тут использована безиндексная форма записи переменных. Из очевидных соотношений

$$\begin{cases} \dfrac{S^{n+1}+S^n}{\tau_n} = S(t_{n+1/2})+O(\tau^2), \quad \dfrac{S^{n+1}-S^n}{\tau_n} = \left(\dfrac{\partial S}{\partial t}\right)_{t_{n+1/2}} + O(\tau^2) \\ H^{n+1}H^n = H^2(t_{n+1/2})+O(\tau^2), \quad \dfrac{H^{n+1}-H^n}{\tau_n} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial t}\right)_{t_{n+1/2}} + O(\tau^2) \\ \dfrac{\hat{\xi}^{n+1}-\hat{\xi}^n}{\tau_n} = \left(\dfrac{\partial \hat{\xi}}{\partial t}\right)_{n+1/2} + O(\tau^2), \quad \dfrac{\mu^{n+1}-\mu^n}{\tau_n} = \left(\dfrac{\partial \mu}{\partial t}\right)_{t_{n+1/2}} + O(\tau^2) \\ \tau = \tau_{max} = \max\limits_n \tau_n \end{cases} \tag{3.10}$$

следует, что уравнения (3.7)-(3.9) аппроксимируют соответствующие непрерывные уравнения с точностью $O(\tau^2)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что разностные уравнения (3.7)-(3.9) алгебраически эквивалентны.

П.2. Пусть вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ имеет компоненты H_ξ, H_μ : отнесем $H_{\xi ij}, H_{\mu ij}$ к центрам лагранжевых ячеек:

$$H_{\xi ij} = H_\xi(\alpha_i+h_\alpha/2, \beta_j+h_\beta/2), \quad H_{\mu ij} = H_\mu(\alpha_i+h_\alpha/2, \beta_j+h_\beta/2)$$

Можно показать, что разностный лагранжиан $\mathcal{L}^h$ определенный как

$$\mathcal{L}_H^h = \sum_{(i,j)\in\omega} \frac{H_{\xi ij}^2+H_{\mu ij}^2}{8\pi} V_{ij}$$

аппроксимирует непрерывный лагранжиан

$$\mathcal{L}_H = \iint\limits_{G(\alpha,\beta)} \xi^{\ell-1} \frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)} \frac{H_\xi^2+H_\mu^2}{8\pi} d\alpha d\beta$$

со вторым порядком точности по α, β при этом

$$S_H^n = \int_{t_0}^{t_1} Z_H^n(t)\,dt = S_H + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$$

Для аппроксимации условий вмороженности магнитного поля (I.29) (I.30) отнесенных к центру ячейки (ij) воспользуемся равенствами:

$$\left[\xi^{k+1}\left(H_\xi \frac{\partial H}{\partial \alpha} - H_\mu \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right) - C_1(\alpha,\beta)\right]_{i+1/2,\, j+1/2} = \hat{\xi}_{ij}\left(H_{\xi ij}\mu_{ij\alpha} - H_{\mu ij}\xi_{ij\alpha}\right) + C_1(\alpha_{i+1/2}, \beta_{j+1/2}) + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$$

$$\left[\xi^{k+1}\left(H_\xi \frac{\partial H}{\partial \beta} - H_\mu \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right) - C_2(\alpha,\beta)\right]_{i+1/2,\, j+1/2} = \hat{\xi}_{ij}\left(H_{\xi ij}\mu_{ij\beta} - H_{\mu ij}\xi_{ij\beta}\right) + C_2(\alpha_{i+1/2}, \beta_{j+1/2}) + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$$

Следовательно разностные соотношения

$$\begin{cases} \hat{\xi}\left(H_\xi \mu_\alpha - H_\mu \xi_\alpha\right) = C_1^0 & (3.13) \\ \hat{\xi}\left(H_\xi \mu_\beta - H_\mu \xi_\beta\right) = C_2^0, \quad (ij) \in \omega & (3.14) \end{cases}$$

где $C_1^0 = C_1(\alpha_{i+1/2}, \beta_{j+1/2})$, $C_2^0 = C_2(\alpha_{i+1/2}, \beta_{j+1/2})$ аппроксимируют непрерывные условия вмороженности магнитного поля со вторым порядком точности. Разрешим эти условия относительно H_ξ, H_μ и перепишем (3.13) и (3.14) в алгебраически эквивалентном виде

$$\begin{cases} \dfrac{V}{h_\alpha h_\beta} H_\mu = C_2^0 \mu_\alpha - C_1^0 \mu_\beta & (3.15) \\ \dfrac{V}{h_\alpha h_\beta} H_\xi = C_2^0 \xi_\alpha - C_1^0 \xi_\beta & (3.16) \end{cases}$$

аналогичном (I.29),(I.30). Дифференцирование по времени (3.15) и (3.16) и учет очевидных дифференциально-разностных соотношений

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = v_\alpha, \quad \frac{d\mu_\beta}{dt} = v_\beta$$

$$\frac{d\xi_\alpha}{dt} = u_\alpha\,, \quad \frac{d\xi_\beta}{dt} = u_\beta$$

приводят к дифференциально-разностным уравнениям индукции

$$\begin{cases} V^* \dfrac{dH_\xi}{dt} = -H_\xi \dfrac{dV^*}{dt} + c_2^0 u_\alpha - c_1^0 u_\beta & (3.17) \\ V^* \dfrac{dH_\mu}{dt} = -H_\mu \dfrac{dV^*}{dt} + c_2^0 v_\alpha - c_1^0 v_\beta & (3.18) \end{cases}$$

где $V^* = V/h_\alpha h_\beta$. Уравнения (3.17) и (3.18), как нетрудно видеть, аппроксимируют дифференциальные уравнения индукции (1.34), (1.35) взятые в следующем виде:

$$\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dH_\xi}{dt} = -H_\xi \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right] + c_2\frac{\partial u}{\partial \alpha} - c_1\frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dH_\mu}{dt} = -H_\mu \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right] + c_2\frac{\partial v}{\partial \alpha} - c_1\frac{\partial v}{\partial \beta}$$

со вторым порядком по h_α, h_β. Если в (3.17) и (3.18) подставить значение c_1^0, c_2 из (3.13) и (3.14), то уравнения индукции приводятся к форме:

$$V^* \frac{dH_\xi}{dt} = -H_\xi \frac{dV^*}{dt} + \hat{\xi}\left[H_\xi \frac{D_h(u,\mu)}{D_h(\alpha,\beta)} + H_\mu \frac{D_h(\xi,u)}{D_h(\alpha,\beta)}\right] \qquad (3.17')$$

$$V^* \frac{dH_\mu}{dt} = -H_\mu \frac{dV^*}{dt} + \hat{\xi}\left[H_\xi \frac{D_h(\xi,v)}{D_h(\alpha,\beta)} + H_\mu \frac{D_h(v,\mu)}{D_h(\alpha,\beta)}\right] \qquad (3.18')$$

являющийся разностным аналогом непрерывных уравнений (1.34′),

(I.35). Выражения типа $D_h(u,\mu)/D_h(\alpha,\beta)$ здесь обозначают $\left\|\begin{matrix} u_\alpha, \mu_\alpha \\ u_\beta, \mu_\beta \end{matrix}\right\| = \left(\frac{D(u,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right)_{i+1/2, j+1/2} + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$

Из (3.I7) и (3.I8) легко получить дифференциально-разностное уравнение изменения магнитной энергии:

$$\frac{d}{dt}\left(V^* \frac{H_H^2+H_B^2}{8\pi}\right) = -\frac{H_\xi^2+H_H^2}{8\pi}\frac{dV^*}{dt} + \frac{H_\xi}{4\pi}\left(c_2^0 u_\alpha - c_1^0 u_\beta\right) + \frac{H_H}{4\pi}\left(c_2^0 \sigma_\alpha - c_1^0 \sigma_\beta\right) \qquad (3.I9)$$

или в эквивалентной форме:

$$\frac{d}{dt}\left(V^* \frac{H_\xi^2+H_H^2}{8\pi}\right) = -\frac{H_\xi^2+H_H^2}{8\pi}\frac{dV^*}{dt} + \frac{H_\xi^2}{4\pi}\frac{D_h(u,\mu)}{D_h(\alpha,\beta)} + \frac{H_H^2}{4\pi}\frac{D_h(\xi,\sigma)}{D_h(\alpha,\beta)} + \frac{H_\xi H_H}{4\pi}\left[\frac{D_h(\xi,u)}{D_h(\alpha,\beta)} + \frac{D_h(\sigma,\mu)}{D_h(\alpha,\beta)}\right] \qquad (3.I9')$$

Дифференциально-разностные уравнения (3.I9) и (3.I9′) аппроксимируют соответственно непрерывные уравнения для изменения магнитной энергии (I.36),(I.36′), отнесенные к центрам ячейки с точностью $O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$

Следует подчеркнуть, что уравнения (3.I3)-(3.I9) являются взаимно согласованными в следующем смысле: из любых двух уравнений (3.I3)-(3.I4) и (3.I5),(3.I6) или из уравнения для магнитной энергии совместно с каким-либо уравнением условий вмороженности или индукции можно получить эквивалентными преобразованиями остальные.

Прежде чем перейти к аппроксимации по времени преобразуем дифференциально-разностные уравнения (3.I3),(3.I4) следующим образом: запишем для (3.I3) и (3.I4) эквивалентные условия (рис.I)

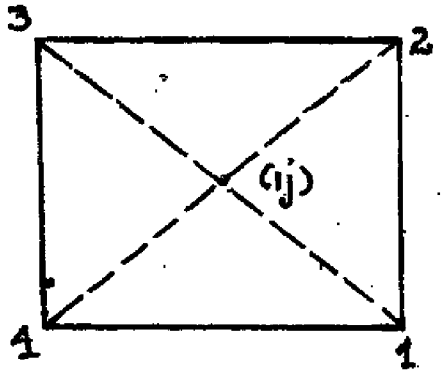

Рис. I

$$\hat{\xi}\left[H_\xi(\mu_3-\mu_1)-H_\mu(\xi_3-\xi_1)\right]=$$
$$=c_1^0 h_\alpha - c_2^0 h_\beta=\hat{\Phi}_1$$

$$\hat{\xi}\left[H_\xi(\mu_2-\mu_4)-H_\mu(\xi_2-\xi_4)\right]=$$
$$=c_1^0 h_\alpha + c_2 h_\beta=\hat{\Phi}_2 \qquad (3.20)$$

или

$$\hat{\xi}\,|[\vec{H}\cdot(\vec{r}_3-\vec{r}_1)]|=\hat{\Phi}_1$$
$$\hat{\xi}\,|[\vec{H}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_4)]|=\hat{\Phi}_2 \qquad (3.20')$$

(3.20) и (3.20′) физически означают постоянство потоков $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2$ вектора $\vec{H}$ через "жидкие" линии $\vec{r}_3-\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2-\vec{r}_4$. Используя выражения $\partial S/\partial\xi_k, \frac{\partial S}{\partial\mu_k}, k\in Ш_2(ij)$, перепишем (3.20) в однородной форме

$$\hat{\xi}\left(H_\xi\frac{\partial S}{\partial\xi_k}+H_\mu\frac{\partial S}{\partial\mu_k}\right)=\Phi_k \qquad k\in Ш_2(ij) \qquad (3.21)$$

где $\Phi_1=\Phi_3=1/2\,\hat{\Phi}_1,\ -\Phi_2=\Phi_4=\hat{\Phi}_2/2$

Тогда используя алгебраические тождества

$$\frac{\partial S}{\partial\xi_k}\xi_k=\frac{\partial S}{\partial\mu_k}\mu_k=S$$
$$\frac{\partial S}{\partial\xi_k}\mu_k=\frac{\partial S}{\partial\mu_k}\xi_k=0$$

нетрудно убедиться, что система дифференциально-разностных

уравнений

$$\begin{cases} H_\xi V = \Phi_k \xi_k & (3.15') \\ H_\mu V = \Phi_k \mu_k & (3.16') \end{cases}$$

$$\begin{cases} V \dfrac{dH_\xi}{dt} = -H_\xi \dfrac{dV}{dt} + \Phi_k u_k & (3.17') \\ V \dfrac{dH_\mu}{dt} = -H_\mu \dfrac{dV}{dt} + \Phi_k v_k & (3.18') \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} V \frac{H_\xi^2 + H_\mu^2}{8\pi} = -\frac{H_\xi^2 + H_\mu^2}{8\pi} \frac{dV}{dt} + \frac{H_\xi \Phi_k u_k}{4\pi} + \frac{H_\mu \Phi_k v_k}{4\pi} \qquad (3.19')$$

тождественна соответственно уравнениям (3.15)-(3.19) и, следовательно, обладает тем же порядком аппроксимации по h_α, h_β.

Поставим теперь в соответствие дифференциально-разностным уравнениям (3.15')-(3.19') систему следующих разностных уравнений

$$\begin{cases} H_\xi^{n+1} V^{n+1} = \Phi_k^n \xi_k^{n+1}, \quad H_\xi^n V^n = \Phi_k^{n+1} \xi_k^n & (3.23) \\ H_\mu^{n+1} V^{n+1} = \Phi_k^n \mu_k^{n+1}, \quad H_\mu^n V^n = \Phi_k^{n+1} \mu_k^n, \quad \Phi_k^n = \Phi_k^{n+1} & (3.24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{V^{n+1} + V^n}{2} \dfrac{H_\xi^{n+1} - H_\xi^n}{\tau_n} = -\dfrac{H_\xi^{n+1} + H_\xi^n}{2} \dfrac{V^{n+1} - V^n}{\tau_n} + \dfrac{\Phi_k^{n+1} + \Phi_k^n}{2} \dfrac{\xi_k^{n+1} - \xi_k^n}{\tau_n} & (3.25) \\ \dfrac{V^{n+1} + V^n}{2} \dfrac{H_\mu^{n+1} - H_\mu^n}{\tau_n} = -\dfrac{H_\mu^{n+1} - H_\mu^n}{2} \dfrac{V^{n+1} - V^n}{\tau_n} + \dfrac{\Phi_k^{n+1} + \Phi_k^n}{2} \dfrac{\mu_k^{n+1} - \mu_k^n}{\tau_n} & (3.26) \end{cases}$$

$$\frac{E_H^{n+1} - E_\mu^n}{\tau_n} = -\frac{H_\xi^{n+1} H_\xi^n + H_\mu^{n+1} H_\mu^n}{8\pi} \frac{V^{n+1} - V^n}{\tau_n} + \qquad (3.27)$$

$$+ \frac{H_\xi^{n+1} \Phi_k^n + H_\xi^n \Phi_k^{n+1}}{8\pi} \frac{\xi_k^{n+1} - \xi_k^n}{\tau_n} + \frac{H_\mu^{n+1} \Phi_k^n + H_\mu^n \Phi_k^{n+1}}{8\pi} \frac{\mu_k^{n+1} - \mu_k^n}{\tau_n}$$

где (3.23),(3.24) – разностные условия вмороженности, (3.25), (3.26) уравнения индукции, (3.27) – уравнение изменения энергии магнитного поля для ячейки, а

$$\bar{\Phi}^n_k = \hat{\delta}^n\left(H^n_\xi \frac{\partial S^n}{\partial \xi_k} + H^n_\mu \frac{\partial S^n}{\partial \mu_k}\right), \quad k \in \mathbb{Z}_2(ij)$$

Используя разностные соотношения

$$\frac{1}{2}\left(V^{n+1}+V^n\right) = V(t_{n+1/2}) + O(\tau^2)$$

$$0.5\left(H^{n+1}_\xi \bar{\Phi}^n_k + H^n_\xi \bar{\Phi}^{n+1}_k\right) = \left(H_\xi \bar{\Phi}_k\right)_{t_{n+1/2}} + O(\tau^2) \qquad \frac{H^{n+1}_\mu \bar{\Phi}^n_k + H^n_\mu \bar{\Phi}^{n+1}_k}{2} = \left(H_\mu \bar{\Phi}_k\right)_{t_{n+1/2}} + O(\tau^2)$$

совместно с равенствами (3.10), нетрудно показать, что приведенная разностная система (3.23)-(3.27) аппроксимирует со вторым порядком по временному шагу τ дифференциально-разностную систему (3.15)-(3.19), а значит и непрерывные уравнения вмороженности, индукции и энергии магнитного поля. Нетрудно также показать, что система (3.23)-(3.27) согласована в смысле, указанном для дифференциально-разностных уравнений.

При исследовании вопросов полной консервативности потребуется развернутая форма уравнений (3.27):

$$\frac{E^{n+1}_H - E^n_H}{\tau_n} = \frac{H^{n+1}_\xi H^n_\xi}{\tau_n}\left[\hat{\delta}^{n+1}\frac{\partial S^{n+1}}{\partial \xi_k}\xi^n_k - \hat{\delta}^n \frac{\partial S^n}{\partial \xi_k}\xi^{n+1}_k\right] + \frac{H^{n+1}_\mu H^n_\mu}{\tau_n}\left[\hat{\delta}^{n+1}\frac{\partial S^{n+1}}{\partial \mu_k}\mu^n_k - \hat{\delta}^n \frac{\partial S^n}{\partial \mu_k}\mu^{n+1}_k\right]$$

$$+ \frac{H^{n+1}_\xi H^n_\mu}{\tau_n}\left[\hat{\delta}^{n+1}\frac{\partial S^{n+1}}{\partial \xi_k}\mu^n_k - \hat{\delta}^n \frac{\partial S^n}{\partial \mu_k}\xi^{n+1}_k\right] + \frac{H^n_\xi H^n_\mu}{\tau_n}\left[\hat{\delta}^{n+1}\frac{\partial S^{n+1}}{\partial \mu_k}\xi^n_k - \hat{\delta}^n \frac{\partial S^n}{\partial \xi_k}\mu^{n+1}_k\right] \quad (3.28)$$

В заключении этого параграфа, покажем, что из разностных условий вмороженности в виде (3.10) и (3.11) следует соленоидальность магнитного поля во все моменты времени при таком выборе значений потоков, чтобы дивергенция магнитного поля равнялась нулю

в начальный момент.

Для узла (ij) рассмотрим следующее выражение, полученное из (3.10),(3.11) несложными преобразованиями

$$\left(\frac{\hat{\xi}_k}{2h_\beta} H_{\xi_k} \mu_{k\alpha} - \frac{\hat{\xi}_k}{2h_\alpha} H_{\xi_k} \mu_{k\beta}\right) +$$

$$\left(\frac{\hat{\xi}_k}{2h_\beta} H_{\xi_k} \xi_{k\alpha} - \frac{\hat{\xi}_k}{2h_\beta} H_\mu \xi_{k\beta}\right) = -\sum_{k \in \Pi_1(ij)} \left(\frac{c_1^0}{2h_\beta} - \frac{c_2^0}{2h_\alpha}\right)_k \qquad (3.29)$$

Как нетрудно видеть, левая часть (3.29) аппроксимирует со вторым порядком точности дифференциальное выражение

$$\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\xi^{\ell-1} H_\xi \frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\xi^{\ell-1} H_\xi \frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\right)\right] + \frac{1}{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(H_\mu \frac{\partial\xi^\ell}{\partial\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(H_\mu \frac{\partial\xi}{\partial\beta}\right)\right]\right\}_{ij},$$

представляющей собой условие соленоидальности магнитного поля записанное в переменных α, β. Отсюда следует, что для соленоидальности магнитного поля в разностном случае необходимо в начальный момент выбрать потоки такими, чтобы

$$\sum_{k \in \Pi_1(ij)} \left(\frac{c_1^0}{2h_\beta} - \frac{c_2^0}{2h_\alpha}\right)_k = 0 \qquad (ij) \in \omega$$

Условие соленоидальности можно переписать в более компактной форме:

$$\hat{\xi}_k \left(H_{\xi_k} \frac{\partial S_k}{\partial \xi} + H_{\mu_k} \frac{\partial S_k}{\partial \mu}\right) = 0 \quad , \quad k \in \Pi_1(ij)$$

§ 4. Дифференциально-разностные уравнения магнитной гидродинамики и некоторые их свойства

В этом параграфе получены выражения для пондеромоторных сил, обусловленных наличием вмороженного магнитного поля, а также выписаны дифференциально-разностные уравнения МГД для всех рассматриваемых случаев. Показано, что полученные уравнения полностью консервативны.

П.I. В работе [I] было показано, что варьирование дискретного функционала действия S^h при соответствующих ограничениях приводит к дифференциально-разностным уравнениям лагранжа 2-го рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}^h}{\partial \dot{\xi}_{ij}} - \frac{\partial \mathcal{L}^h}{\partial \xi_{ij}} = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}^h}{\partial \dot{\mu}_{ij}} - \frac{\partial \mathcal{L}^h}{\partial \mu_{ij}} = 0 \end{cases} \qquad (4.I)$$

Из соотношений $\mathcal{L}^h = \mathcal{L}^h_{\text{газ}} + \mathcal{L}^h_{\text{н}}$ и $\frac{\partial \mathcal{L}^h_{\text{н}}}{\partial \dot{\xi}_{ij}} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{L}^h_{\text{н}}}{\partial \dot{\mu}_{ij}} = 0$ следует, что пондеромоторные силы $\vec{FH}_{ij}$ полностью определяются для динамических уравнений следующими выражениями:

$$\vec{FH}_{ij} = \left\{ -\frac{\partial \mathcal{L}^h_{\text{н}}}{\partial \xi_{ij}}, -\frac{\partial \mathcal{L}^h_{\text{н}}}{\partial \mu_{ij}} \right\} \qquad (4.I')$$

П.2. Рассмотрим случай $\vec{z} = (\xi, 0, 0)$, соответствующий одномерному течению. Пусть $\vec{H}$ имеет одну компоненту H перпендикулярную ξ. Из условия вмороженности, которое для одномерного течения совпадает с (3.3), нетрудно получить соотношения:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_i}{\partial \xi_i} = -\frac{H_i}{S_i}\frac{\partial S_i}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial H_{i-1}}{\partial \xi_i} = -\frac{H_{i-1}}{S_{i-1}}\frac{\partial S_{i-1}}{\partial \xi_i} \end{cases} \qquad (4.2)$$

Определяя $FH_i = -\frac{\partial \mathcal{L}^h_H}{\partial \xi_i}$ с использованием (4.2) и

учитывая уравнение гидродинамики приходим к динамическому уравнению МГД в дифференциально-разностной форме:

$$M_i \frac{du_i}{dt} - P_k \frac{\partial V_k}{\partial \xi_i} - \frac{H_k^2}{8\pi}\left(2\hat{\xi}_k \frac{\partial S_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial V_k}{\partial \xi_i}\right) = 0, \; k = i, i-1 \qquad (4.3)$$

Напомним, что в случае одной пространственной переменной

$$\hat{\xi}_i = \frac{\xi_i^{\ell 4} + \xi_{i+1}}{2}, \quad S_i = \xi_{i+1} - \xi_i, \quad V_i = \frac{\xi_{i+1}^{\ell} \xi_i^{\ell}}{\ell}$$

По виду лагранжиана $\mathcal{L}^h$ и динамических уравнений можно получить [I] уравнение изменения потенциальной энергии ячейки $m_i \varepsilon_i + \frac{H_i^2}{8\pi} V_i$ в виде

$$m_i \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_i + \frac{H_i^2}{8\pi \rho_i}\right) = -\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right)_i \frac{dV_i}{dt} + \frac{H_i^2}{4\pi} S_i \frac{d\hat{\xi}_i}{dt} \qquad (4.4)$$

Как показано в § 3, согласованное с условиями вмороженности магнитного поля уравнение изменения магнитной энергии имеет вид

$$\frac{d}{dt} V_i \frac{H_i^2}{8\pi} = -\frac{H_i^2}{8\pi}\frac{dV_i}{dt} + \frac{H_i^2}{4\pi} S_i \frac{d\hat{\xi}_i}{dt} \qquad (4.5)$$

Если использовать при получении системы уравнений МГД уравнение (4.5) для магнитной энергии, то из (4.4) вытекает, что удельная внутренняя энергия будет изменяться таким же образом, как и при отсутствии магнитного поля, т.е. имеет энтропийный вид:

$$m_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} = -p_i \frac{dV_i}{dt} = -p_i\left(\frac{\partial V_i}{\partial \xi_i} u_i + \frac{\partial V_i}{\partial \xi_{i+1}} u_{i+1}\right) \qquad (4.6)$$

Суммируя (4.3) по множеству $\omega' = \{N1 < i < N2\}$ получим выражение для изменения импульса

$$\frac{d}{dt}\sum_{i\in\omega'} M_i u_i - \sum_{i\in\omega'}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)_i S_i = F_{BH}$$

где
$$F_{BH} = \left(P_{i1-1}+\frac{H^2_{i1-1}}{8\pi}\right)\frac{\partial V_{i1-1}}{\partial \xi_{i1}} - \frac{H^2_{i1-1}}{4\pi} S_{i1-1}\frac{\partial \hat{\xi}_{i1-1}}{\partial \xi_{i1}} - \left(P_{i2}+\frac{H^2_{i2}}{8\pi}\right)\frac{\partial V_{i2}}{\partial \xi_{i2}} - \frac{H^2_{i2}}{4\pi} S_{i2}\frac{\partial \hat{\xi}_{i2}}{\partial \xi_{i2}} \qquad (4.7)$$

Из (4.7) видно, что (4.3) консервативны по импульсам.

Для системы (4.3)-(4.6) справедлив закон сохранения полной энергии в форме

$$\frac{d}{dt}\sum_{i\in\omega'}\left(m_i\frac{u^2_{i1}+u^2_{i1+1}}{4} - m_i E_i + \frac{H_i^2}{8\pi}V_i\right) = \left[\left(P_{i1-1}+\frac{H^2_{i1-1}}{8\pi}\right)\frac{\partial V_{i1-1}}{\partial \xi_{i1}}u_{i1} - \frac{H^2_{i1-1}}{4\pi}S_{i1-1}\frac{\partial \hat{\xi}_{i1-1}}{\partial \xi_{i1}}u_{i1}\right] - \left[\left(P_{i2}+\frac{H^2_{i2}}{8\pi}\right)\frac{\partial V_{i2}}{\partial \xi_{i2}}u_{i2} - \frac{H^2_{i2}}{4\pi}S_{i2}\frac{\partial \hat{\xi}_{i2}}{\partial \xi_{i2}}u_{i2}\right] \qquad (4.8)$$

Доказательство проводится аналогично приведенному в [I] : Следовательно система дифференциально-разностных уравнений МГД (см. приложение №2а) обладает свойством полной консервативности.

П.2. $\vec{\tau} = \{\xi, \mu, 0\}$. Рассмотрим случай, когда магнитное поле представлено компонентой H , перпендикулярной плоскости течения. Из условий (3.3) находятся соотношения:

$$\left\{ \frac{\partial H}{\partial \xi_k} = -\frac{H}{S}\frac{\partial S}{\partial \xi} \qquad k \in \omega_2(ij) \right.$$

$$\left| \frac{\partial H}{\partial \mu_k} = -\frac{H}{S}\frac{\partial S}{\partial \mu}, \quad \text{для } (ij) \in \overline{\omega} \right.$$

Определяя пондеромоторные силы FH_ξ, FH_μ из (4.9), получаем дифференциально-разностные динамические уравнения МГД для рассматриваемого случая, записанные в безиндексной форме

$$\begin{cases} M\dfrac{du}{dt} - P_k\dfrac{\partial V_k}{\partial \xi} - \dfrac{H_k^2}{8\pi}\left(2\hat{\xi}_k\dfrac{\partial S_k}{\partial \xi} - \dfrac{\partial V_k}{\partial \xi}\right) = 0 & (4.10) \\ M\dfrac{dv}{dt} - P_k\dfrac{\partial V_k}{\partial \mu} - \dfrac{H_k^2}{8\pi}\left(2\hat{\xi}_k\dfrac{\partial S_k}{\partial \mu} - \dfrac{\partial V_k}{\partial \mu}\right) = 0 & (4.11) \\ k \in \mathbb{Ш}_1(ij), \ (ij) \in \overline{\omega} \end{cases}$$

Уравнения изменения удельной внутренней и магнитной энергий, полученные по виду $\mathcal{L}^h = \mathcal{L}^h_{ГАЗ} + \mathcal{L}^h_H$ с использованием (4.10) и (4.11), имеют соответственно вид:

$$m\frac{d\varepsilon}{dt} = -P\frac{dV}{dt} \qquad (4.12)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{H^2}{8\pi}V\right) = -H\frac{dV}{dt} + \frac{H^2}{4\pi}S\frac{d\hat{\xi}}{dt}, \ (ij) \in \omega \qquad (4.13)$$

Покажем, что система дифференциально-разностных уравнений (4.10)-(4.13) совместно с условием вмороженности (3.3) и неразрывности (2.12), а также кинематическим соотношением

$$\vec{r} = \left\{\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\mu}{dt}\right\}$$

обладает свойством полной консервативности.

Нетрудно показать, что для консервативности динамических уравнений по импульсам необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$\sum_{k \in \mathbb{Ш}_2(ij)} \frac{\partial V}{\partial \xi_k} = S \qquad (4.14)$$

$$\sum_{k\in \mathbb{W}_2(ij)} \frac{\partial V}{\partial \mu_k} = 0 \quad , \quad (ij)\in \overline{\omega} \tag{4.14}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условия (4.14) всегда выполнены и, следовательно, появление пондеромоторных сил не меняет свойства консервативности динамических уравнений. Уравнение изменения импульса по ξ для множества узлов $\overline{\omega}' = \{i_1 < i < i_2 , j_1 < j < j_2\} \in \overline{\omega}$ приведено в приложении 4а.

Для рассматриваемой системы дифференциально-разностных уравнений справедлив закон сохранения полной энергии в виде:

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{ij\in\overline{\omega}}\left[\sum_{k\in(ij)} m_{ij}\frac{u_k^2+v_k^2}{8} + m_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{H_{ij}^2}{8\pi}V_{ij}\right]\right\} = A^1_{BH} \tag{4.15}$$

где A^1_{BH} выражение для работы внешних сил давления и магнитного поля A^1_{BH} приведено в приложении 4б.

Таким образом, поскольку уравнение для изменения ε (4.12) записано в энтропийной форме, а условие вмороженности и изменения энергии магнитного поля взаимосогласованы, дифференциально-разностная система уравнений (4.10)-(4.13) полностью консервативна.

П.3. $\vec{r} = \{\xi, \mu, 0\}$; $\vec{H} = (H_\xi, H_\mu, 0)$ Из условий вмороженности магнитного поля (3.15),(3.16) посредством дифференцирования определяются соотношения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_\xi}{d\xi_k} = -\dfrac{\partial V}{\partial \xi_k}\dfrac{H_\xi}{V} + \Phi_k \\ \dfrac{\partial H_\xi}{\partial \mu_k} = -\dfrac{H_\xi}{V}\dfrac{\partial V}{\partial \mu_k} \\ \dfrac{\partial H_\mu}{\partial \mu_k} = -\dfrac{H_\mu}{V}\dfrac{\partial V}{\partial \mu_k} + \Phi_k \\ \dfrac{\partial H_\mu}{\partial \xi} = -\dfrac{H_\mu}{V}\dfrac{\partial V}{\partial \xi_k} \quad , \quad k\in \mathbb{W}_2(ij) \end{cases} \tag{4.16}$$

Используя (4.16) и определяя соответствующие пондеромоторные силы, приходим к динамическим уравнениям:

$$M\frac{du}{dt} = p_k\frac{\partial V_k}{\partial \xi} + \frac{H_{\xi k}^2 + H_{\mu k}^2}{8\pi}\frac{\partial V_k}{\partial \xi} - \frac{H_{\xi k}\Phi^k}{4\pi} \qquad (4.17)$$

$$M\frac{dv}{dt} = p_k\frac{\partial V_k}{\partial \mu} + \frac{H_{\xi k}^2 + H_{\mu k}^2}{8\pi}\frac{\partial V_k}{\partial \mu} - \frac{H_{\mu k}\Phi^k}{4\pi}, \quad k \in \mathrm{III}_1(ij) \qquad (4.18)$$

Или после подстановки значений $\Phi^k = \hat{\xi}_k^{\ell-1}\left(H_{\xi k}\frac{\partial S_k}{\partial \xi} + H_{\mu k}\frac{\partial S_k}{\partial \mu}\right)$ в (4.17) и (4.18) получаем:

$$M\frac{du}{dt} = p_k\frac{\partial V_k}{\partial \xi} + \frac{H_{\xi k}^2 + H_{\mu k}^2}{8\pi}\frac{\partial V_k}{\partial \xi} - \frac{H_{\xi k}^2\hat{\xi}_k^2}{4\pi}\frac{\partial S_k}{\partial \xi} - \frac{H_{\xi k}H_{\mu k}\hat{\xi}_k}{4\pi}\frac{\partial S_k}{\partial \mu} \qquad (4.17')$$

$$M\frac{dv}{dt} = p_k\frac{\partial V_k}{\partial \mu} + \frac{H_{\xi k}^2 + H_{\mu k}^2}{8\pi}\frac{\partial V_k}{\partial \mu} - \frac{H_{\mu k}^2\hat{\xi}_k}{4\pi}\frac{\partial S_k}{\partial \mu} - \frac{H_{\xi k}H_{\mu k}\hat{\xi}_k}{4\pi}\frac{\partial S_k}{\partial \xi} \qquad (4.18')$$

Уравнения для внутренней и магнитной энергии в этом случае имеют следующий вид:

$$m\frac{d\varepsilon}{dt} = -p\frac{dV}{dt} \qquad (4.19)$$

$$\frac{d}{dt}\left(V\frac{H_\xi^2 + H_\mu^2}{8\pi}\right) = -\frac{H_\xi^2 + H_\mu^2}{8\pi}\frac{\partial V}{dt} + \frac{H_\xi\Phi_k u_k}{4\pi} + \frac{H_\mu\Phi_k v_k}{4\pi} \qquad (4.20)$$

Нетрудно показать, что для уравнений (4.17)-(4.20) выполнены все те свойства, которые рассматривались в предыдущих пунктах.

Условие на консервативность динамических уравнений по импульсам, как видно из (4.17),(4.18) аналогичны (4.14)— следовательно, уравнения (4.17) консервативны.

Уравнение для магнитной энергии (4.20) тождественно совпадает с (3.19) – выведенного эквивалентными преобразованиями из условии вмороженности магнитного поля.

Для рассматриваемой системы (4.17)-(4.20) дифференциально-разностных уравнений справедлив закон сохранения полной энергии в виде

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{ij\in\omega}\left[m_{ij}\sum_{k\in\Pi_2(ij)}\frac{u_k^2+v_k^2}{8}+m_{ij}\varepsilon_{ij}+V_{ij}\frac{H_{\xi ij}+H_{\mu ij}}{8\pi}\right]\right\}=A^2_{BH}$$

выражение для A^2_{BH} приведено в приложении 5б.

В силу этого система уравнений (4.17)-(4.20) совместно с условиями неразрывности (2.12) и вмороженности магнитного поля обладает свойством полной консервативности.

В заключение этого пункта рассмотрим вопрос о сбалансированности (см. § 2) динамических уравнений. Пусть $p_{ij}=const$ и $\vec{H}_{ij}=const$ [$H_k=0$ для случая $\vec{r}=(R,0,z)$. Тогда система должна оставаться в положении равновесия при нулевых начальных скоростях на любых расчетных сетках.

Из динамических уравнений следует, что для сбалансированности достаточно выполнение равенств

$$\sum_{k\in\Pi_1(ij)}\frac{\partial N_k}{\partial\xi}=\sum_{k\in\Pi_2(ij)}\frac{\partial N_k}{\partial\mu}=0 \qquad (4.21)$$

$$\sum_{k\in\Pi_1(ij)}\frac{\partial S_k}{d\xi}=\sum_{k\in\Pi_2(ij)}\frac{\partial S_k}{\partial\mu}=0 \qquad (4.21\ )$$

Условия (4.21) всегда выполнены. Следовательно сбалансированность дифференциально-разностных уравнений МГД полностью определяется выбором выражения для вычисления объема V .

§ 5. Об аппроксимации дифференциально-разностных уравнений магнитной гидродинамики

В § 3 было показано, что дифференциально-разностные уравнения индукции и изменения магнитной энергии, условие вмороженности магнитного поля аппроксимируют соответствующие непрерывные уравнения со вторым порядком точности. Из работы [2] следует, что уравнение для внутренней энергии и уравнение неразрывности так же обладают вторым порядком аппроксимации по пространственным переменным α, β. В этом параграфе рассматриваются вопросы аппроксимации динамических уравнений и интегральных законов сохранения.

П.I. Дифференциально-разностное динамическое уравнение для случая одной пространственной переменной ξ – (4.3) после несложных преобразований может быть записано в следующем виде:

$$\frac{1}{2\ell}\left[\rho_i \frac{\xi^\ell_{i+1}-\xi^\ell_i}{h_\alpha} + \rho_{i-1}\frac{\xi^\ell_i-\xi^\ell_{i-1}}{h_\alpha}\right]\frac{du_i}{dt} + \xi^{\ell-1}_i \frac{P_i-P_{i-1}}{h_\alpha} + \frac{\xi^{\ell-1}}{8\pi}\frac{H_i^2-H_{i-1}^2}{h_\alpha} + \frac{1}{4\pi}\left[H_i\frac{\xi^{\ell-1}_{i+1}-\xi^{\ell-1}_i}{2} - H_{i-1}\frac{\xi^{\ell-1}_i-\xi^{\ell-1}_{i-1}}{2}\right]=0 \qquad (5.I)$$

Из (5.I) нетрудно получить равенство

$$\left[\frac{1}{\ell}\left(\rho\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\alpha}\right)_i + O(h_\alpha^2)\right]\frac{du_i}{dt} + \xi^{\ell-1}_i\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(P+\frac{H^2}{8\pi}\right)_i + O(h_\alpha^2)\right] + \left(\frac{H^2}{4\pi}\frac{\partial\xi^{\ell-1}}{\partial\alpha}\right)_i + O(h_\alpha^2)=0$$

откуда следует, что динамическое уравнение (4.3) аппроксимирует соответствующее непрерывное уравнение (I.4) с точностью $O(h_\alpha^2)$

П.2. $\vec{r}=(\xi,\mu,0)$. Вектор $\vec{H}$ имеет одну компоненту, совпадающую с H_z и с H_φ соответственно для декартовых и цилиндрических координат.

Прежде чем перейти к аппроксимации динамических уравнений,

заметим, что во все непрерывные уравнения входят выражения типа

$$\xi^{\ell-1}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(f\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(f\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\right)\right]$$

и

$$-\frac{1}{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(f\frac{\partial\xi^{\ell}}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(f\frac{\partial\xi^{\ell}}{\partial\alpha}\right)\right]$$

где $f=f(\alpha,\beta)$ некая достаточно гладкая функция. Пусть f_{ij} относится к центрам соответствующих ячеек (ij) — $f_{ij}=f(\alpha_{i+1/2},\beta_{j+1/2})$. Докажем, что имеют меото следующие равенства:

$$\frac{1}{h_\alpha h_\beta}f_K\frac{\partial V_K}{\partial\xi}=-\left\{\xi^{\ell-1}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(f\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(f\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\right)\right]\right\}_{ij}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2) \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{h_\alpha h_\beta}f_K\frac{\partial V_K}{\partial\mu}=\frac{1}{\ell}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[f\frac{\partial\xi^{\ell}}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(f\frac{\partial\xi^{\ell}}{\partial\alpha}\right)\right\}_{ij}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2) \quad (5.3)$$

Действительно, несложными алгебраическими преобразованиями находим, что (рис.2):

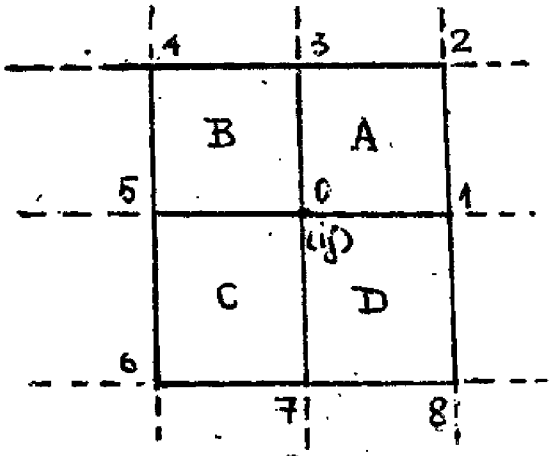

Рис.2.

$$\frac{1}{h_\alpha h_\beta}f_K\frac{\partial V_K}{\partial\xi}=\frac{1}{h_\alpha h_\beta}\left(f_A\frac{\partial V_A}{\partial\xi}+f_B\frac{\partial V_B}{\partial\xi}\right.$$

$$\left.+f_C\frac{\partial V_C}{\partial\xi}+f_D\frac{\partial V_D}{\partial\xi}\right)=$$

$$=-\frac{\xi_0^{\ell-1}}{h_\alpha h_\beta}\left[f_A\frac{\mu_3-\mu_1}{2}+f_B\frac{\mu_5-\mu_3}{2}+f_C\frac{\mu_7-\mu_5}{2}+f_D\frac{\mu_1-\mu_7}{2}\right]=$$

$$=-\xi_0^{\ell-1}\left[\frac{1}{h_\alpha}\left(f_A\frac{\mu_3+\mu_2-\mu_1-\mu_0}{2h_\beta}+f_D\frac{\mu_0+\mu_1-\mu_8-\mu_7}{2h_\beta}-f_B\frac{\mu_3+\mu_4-\mu_0-\mu_5}{2h_\beta}\right.\right.$$

$$- f_C \frac{\mu_5+\mu_0-\mu_6-\mu_7}{2h_\beta}\Big) - \frac{1}{h_\beta}\Big(f_A \frac{\mu_2+\mu_1-\mu_0-\mu_3}{2h_\alpha} + f_B \frac{\mu_3+\mu_0}{2h_\alpha} -$$

$$- f_B \frac{\mu_4+\mu_3}{2h_\alpha} - f_D \frac{\mu_0+\mu_6-\mu_6-\mu_7}{2h_\alpha} - f_C \frac{\mu_0+\mu_7-\mu_5-\mu_6}{2h_\alpha}\Big)\Big] \tag{5.2'}$$

$$\frac{1}{h_\alpha h_\beta} f_K \frac{\partial \pi_K}{\partial \mu} = \frac{1}{\ell h_\alpha h_\beta}\Big[f_A \frac{\xi_2^\ell - \xi_1^\ell}{2} + f_B \frac{\xi_5^\ell - \xi_3^\ell}{2} + f_C \frac{\xi_7^\ell - \xi_3^\ell}{2} + f_D \frac{\xi_1^\ell - \xi_7^\ell}{2}\Big] =$$

$$= \frac{1}{\ell}\Big[\frac{1}{2h_\alpha}\Big(f_A \frac{\xi_3^\ell+\xi_2^\ell-\xi_1^\ell-\xi_0^\ell}{2h_\beta} + f_D \frac{\xi_0^\ell+\xi_1^\ell-\xi_2^\ell-\xi_7^\ell}{2h_\beta} - f_B \frac{\xi_4^\ell+\xi_3^\ell-\xi_0^\ell-\xi_5^\ell}{2h_\beta}$$

$$- f_C \frac{\xi_5^\ell+\xi_0^\ell-\xi_6^\ell-\xi_7^\ell}{2h_\beta}\Big) - \frac{1}{2h_\beta}\Big(f_A \frac{\xi_2^\ell+\xi_1^\ell-\xi_3^\ell-\xi_0^\ell}{2h_\alpha} + f_B \frac{\xi_0^\ell+\xi_3^\ell-\xi_4^\ell-\xi_5^\ell}{2h_\alpha} - \tag{5.3'}$$

$$f_D \frac{\xi_1^\ell+\xi_2^\ell-\xi_0^\ell-\xi_7^\ell}{2h_\alpha} - f_C \frac{\xi_0^\ell+\xi_7^\ell-\xi_5^\ell-\xi_6^\ell}{2h_\alpha}\Big)\Big]$$

Из (5.2′) и (5.3′), как нетрудно видеть, следует справедливость (5.2) и (5.3), если учеоть, что

$$f_A \mu_{A,\alpha} = f_A \frac{\mu_2+\mu_1-\mu_0-\mu_3}{2h_\alpha} = \left(f\frac{\partial \mu}{\partial \alpha}\right)_A + O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$$

$$f_A \xi^\ell_{A,\alpha} = f_A \frac{\xi_2^\ell+\xi_1^\ell-\xi_0^\ell-\xi_3^\ell}{2h_\alpha} = \left(f\frac{\partial \xi^\ell}{\partial \alpha}\right)_A + O(h_\alpha^2+h_\beta^2) \tag{5.4}$$

$$f_A \mu_{A\beta} = f_A \frac{\mu_2+\mu_3-\mu_0-\mu_1}{2h_\beta} = \left(f\frac{\partial \mu}{\partial \beta}\right)_A + O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$$

$$f_A \xi^\ell_{A,\beta} = f_A \frac{\xi_2^\ell+\xi_3^\ell-\xi_0^\ell-\xi_1^\ell}{2h_\beta} = \left(f\frac{\partial \xi^\ell}{\partial \beta}\right)_A + O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$$

Аналогично и для других ячеек.

Перепишем динамические уравнения (4.10) и (4.11) в виде

$$\left(\frac{1}{4}\rho_k\frac{V_k}{h_\alpha h_\beta}\right)\frac{du}{dt}-\frac{P_k}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial V_k}{\partial\xi}-\frac{1}{8\pi}\frac{H_k^2}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial V_k}{\partial\xi}+\frac{H_k^2}{4\pi}\frac{S_k}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial\hat{\xi}_k}{\partial\xi}=0 \qquad (4.10')$$

$$\left(\frac{1}{4}\rho_k\frac{V_k}{h_\alpha h_\beta}\right)\frac{dv}{dt}-\frac{P_k}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial V_k}{\partial\mu}-\frac{1}{8\pi}\frac{H_k^2}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial V_k}{\partial\mu}+\frac{H_k^2}{4\pi}\frac{S_k}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial\hat{\xi}_k}{\partial\mu}=0 \qquad (4.11')$$

Используя соотношения (5.2) и (5.3), а также равенства:

$$\frac{V_k}{h_\alpha h_\beta}=\left(\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]_k+O(h_\alpha^2+h_\beta^2),\quad \frac{S_k}{h_\alpha h_\beta}=\left[\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]_k+O(h_\alpha^2+h_\beta^2),$$

$$\hat{\xi}_k=\frac{1}{4}\sum_{k'\in\mathrm{Ш}_2(k)}\xi_{k'}^{k-1}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2), \qquad (5.5)$$

$$\frac{\partial\hat{\xi}_k}{\partial\xi}=\frac{\ell-1}{4}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2),\quad \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial\mu}=(\ell-1)\,O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$$

Устанавливаем, что (4.10′) и (4.11′) аппроксимируют непрерывные динамические уравнения (4.17) и (4.18) соответственно со вторым порядком по α,β

II.3. $\vec{v}=\{\xi,\mu,0\}$, $\vec{H}=\{H_\xi,H_\mu,0\}$. В этом случае дифференциально-разностные динамические уравнения могут быть записаны в форме, аналогичной (4.10′) и (4.11′)

$$\left(\frac{1}{4}\rho_k\frac{V_k}{h_\alpha h_\beta}\right)\frac{du}{dt}=\frac{P_k}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial V_k}{\partial\xi}-\frac{H_{\xi k}^2-H_{\mu k}^2}{8\pi h_\alpha h_\beta}\frac{\partial V_k}{\partial\xi}-\frac{(H_\xi H_\mu)_k}{4\pi h_\alpha h_\beta}\frac{\partial V_k}{\partial\mu}+\frac{H_k^2}{4\pi}\frac{S_k}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial\hat{\xi}_k}{\partial\xi}$$

$$\left(\frac{1}{4}\rho_k\frac{V_k}{h_\alpha h_\beta}\right)\frac{dv}{dt}=\frac{P_k}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial V_k}{\partial\mu}-\frac{H_{\mu k}^2-H_{\xi k}^2}{8\pi h_\alpha h_\beta}\frac{\partial V_k}{\partial\mu}-\frac{(H_\xi H_\mu)_k}{4\pi h_\alpha h_\beta}\frac{\partial V_k}{\partial\xi}+\frac{(H_\xi H_\mu)_k}{4\pi}\frac{S_k}{h_\alpha h_\beta}\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial\mu}$$

Откуда с учетом соотношения (5.3) следует, что непрерывные уравнения (I.32) и (I.33) аппроксимируютоя в точностью $O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$.

II.4. Исследуем аппроксимацию интегральных законов оохранения. Для простоты изложения рассмотрим закон изменения импульса в случае, когда напряженность магнитного поля имеет одну компоненту. Покажем, что дифференциально-разностное выражение (I) см. приложение 4а приводится к виду, аппроксимирующему интегральный закон изменения импульса (I.23), записанный для прямоугольника $G'(\alpha,\beta)=\{\alpha_{i1}\le\alpha\le\alpha_{i2},\beta_{j1}\le\beta\le\beta_{j2}\}$ с точностью второго порядка по h_α и h_β.

Вычтем из (I) динамические уравнения граничных узлов, взятые с соответствующими весами $\varkappa$. Для граничного узла K

$$\varkappa_K=\frac{1}{4}\frac{\overline{M}_K}{M_K}$$

где $\overline{M}_K$ – оумма масс прилегающих к узлу внешних граничных ячеек, M_K – как обычно маоса узла, (например, для узла ($i1,j$), взятого на левой границе $\varkappa_{i1j}=\frac{m_{A'}+m_{B'}}{4M_0}$ см. рис.3). Как нетрудно видеть, при таком выборе $\varkappa$ левая часть (I) приобретает вид:

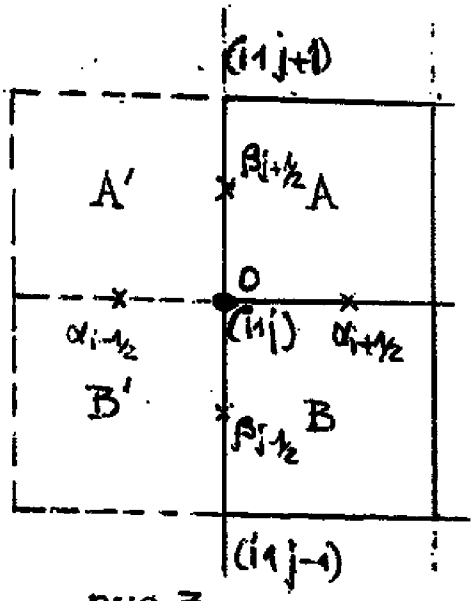

рис 3

$$\frac{d}{dt}\Big\{\sum_{(ij)\in\omega} m_{ij}\sum_{k\in\Omega_2(ij)} u_k\Big\}-(\ell-1)\sum_{(ij)\in\omega}\Big(P_{ij}-\frac{H_{ij}^2}{8\pi}\Big)S_{ij}$$

аппроксимирующей левую часть (I.23) с точностью $O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$. Правая часть (I) также преобразуется, и будет в результате аппроксимировать интеграл по границе в (I.23). Рассмотрим, например, граничный узел $(i1j)$, для которого в правой части (I) имеется выражение

$$Q_{i1j}=\frac{m_B+m_A}{4M_0}\Big[P^*_{A'}\frac{\partial\Gamma_{A'}}{\partial\xi}+P^*_{B'}\frac{\partial\Gamma_{B'}}{\partial\xi}\Big]-\frac{m_{A'}+m_{B'}}{4M_0}\Big[P^*_A\frac{\partial\Gamma_A}{\partial\xi}+P^*_B\frac{\partial\Gamma_B}{\partial\xi}\Big]-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{m_A+m_B}{4M_0}\left(\frac{H_A^2 S_{A'}}{4}+\frac{H_B^2 S'_{B'}}{4}\right)-\frac{m_{A'}+m_{B'}}{4M_0}\left(\frac{H_A^2 S_A}{4}+\frac{H_B^2 S_B}{4}\right)\right]$$

Покажем, что

$$Q_{ij}=\int\limits_{\beta_{j-1/2}}^{\beta_{j+1/2}}\xi^{\ell-1}p^*d\mu+O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$$

Используя разностные соотношения

$$\frac{\partial\Gamma_{A'}}{\partial\xi_0}=\frac{1}{2}\xi_0^{\ell-1}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)_{A'}h_\alpha+\left(\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_{A'}h_\beta\right]$$

$$\frac{\partial\Gamma_{B'}}{\partial\xi_0}=\frac{1}{2}\xi_0^{\ell-1}\left[-\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)_{B'}h_\alpha+\left(\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_{B'}h_\beta\right]$$

$$\frac{\partial\Gamma_{A}}{\partial\xi_0}=\frac{1}{2}\xi_0^{\ell-1}\left[-\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)_{A}h_\alpha+\left(\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_{A}h_\beta\right]$$

$$\frac{\partial\Gamma_{B}}{\partial\xi_0}=\frac{1}{2}\xi_0^{\ell-1}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)_{B}h_\alpha+\left(\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_{B}h_\beta\right]$$

легко убедиться, что из (5.6) следует соотношение

$$Q_{ij}=\frac{\xi^{\ell-1}}{2}\left\{\frac{m_A+m_B}{4M_0}\left[p^*_{A'}\left(\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_{A'}+p^*_{B'}\left(\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_{B'}\right]+\frac{m_{A'}+m_{B'}}{4M_0}\left[p^*_A\left(\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_A+p^*_B\left(\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_B\right]\right\}+O(h_\alpha^3+h_\beta^3)$$

которое может быть приведено к следующему виду:

$$Q_{ij}=\xi^{\ell-1}\left[\frac{m_A+m_B}{4M_0}\left(p^*\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_{\alpha_{i+1/2}\beta_j}+\frac{m_{A'}+m_{B'}}{4\pi}\left(p^*\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_{\alpha_{i+1/2}\beta_j}\right]h_\beta+O(h_\alpha^3+h_\beta^3)$$

Это следует из очевидных равенств:

$$\frac{1}{2}\left[\left(p^*\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_A+\left(p^*\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_B\right]=\left(p^*\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_{\alpha_{i+1/2}\beta_j}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(p^*\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_{A'}+\left(p^*\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_{B'}\right]=\left(p^*\frac{\partial H}{\partial\beta}\right)_{\alpha_{i-1/2}\beta_j}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$$

Введем теперь переменную z определенную следующим образом

$$z=2\int\limits_{\alpha'_{i-1}}^{\alpha'_i}\frac{\varrho}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,H)}{D(\alpha',\beta)}d\alpha'$$

Тогда имеют место разложения:

$$\left(p^*\frac{\partial\Gamma}{\partial\beta}\right)_{\alpha_{i+1/2}\beta_j}=\left(p^*\frac{\partial\Gamma}{\partial\beta}\right)_{\alpha_i\beta_j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(p^*\frac{\partial\Gamma}{\partial\beta}\right)_{\alpha_i\beta_j}\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)_{\alpha_{i+1/2}\beta_j}h_\alpha+O(h_\alpha^2)=$$

$$= \left(P^*\frac{\partial H}{\partial \beta}\right)_{\alpha_i\beta_j} + (m_A' + m_B)\frac{\partial}{\partial z}\left(P^*\frac{\partial H}{\partial \beta}\right)_{\alpha_i\beta_j} h_\alpha + O(h_\alpha^2)$$

$$\left(P^*\frac{\partial H}{\partial \beta}\right)_{\alpha_i\beta_j} = \left(P^*\frac{\partial H}{\partial \beta}\right)_{\alpha_i\beta_j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(P^*\frac{\partial H}{\partial \beta}\right)_{\alpha_i\beta_j}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)_{\alpha_{i+1/2}} h_\alpha + O(h_\alpha^2) =$$

$$= \left(P^*\frac{\partial H}{\partial \beta}\right)_{\alpha_i\beta_j} + (m_A + m_B)\frac{\partial}{\partial z}\left(P^*\frac{\partial H}{\partial \beta}\right)_{\alpha_i\beta_j} h_\alpha + O(h_\alpha^2)$$

Помножим (5.10) на $\xi_0^{\ell-1}(m_A + m_B)$ (5.11) на $\xi_0^{\ell-1}(m_A + m_B)$ и сложим их. После несложных преобразований с учетом (5.9) получим:

$$Q_{ij} = \xi^{\ell-1}\left(P^*\frac{\partial H}{\partial \beta}\right)_{\alpha_i\beta_j} h_\alpha + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$$

откуда и следует справедливость (5.7). Действуя аналогичным образом для всех граничных узлов, можно показать, что правая часть (I) аппроксимирует интеграл по границе в (I.23) с точностью до $O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$

Отметим, что для всех узлов верхней и нижней границы оценки типа (5.10),(5.11) получаются введением переменной

$$z' = z \int_{\beta_{ij}}^{\beta} \frac{\rho}{\ell}\frac{D(\xi^\ell, H)}{D(\alpha\beta)}\, d\beta$$

Аппроксимация всех остальных интегральных законов показывается аналогично.

§ 6. Разностные уравнения магнитной гидродинамики.

Аппроксимация по времени

П.I. Рассмотрим одномерное течение . Перейдем от дифференциально-разностных уравнений к разностным. Для этого отрезок времени $[T_1, T_2]$ разбиваем обычным образом $T_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T_2$ вводя шаг по времени $\tau_n = t_{n+1} - t_n$. Все рассматриваемые величины будем относить к моментам времени t_n , как и в случае "чистой" гидродинамики при отсутствии магнитного поля. Заменяя производные по времени конечными разностями в дифференциально-разностных уравнениях МГД, получаем 11 параметрическое семейство схем:

$$
(\mathrm{II})\quad \begin{cases}
\dfrac{u^{n+1}-u^n}{\tau_n} - P_k^{(\sigma_1)}\dfrac{\partial V_k^{(\sigma_2)}}{\partial \xi} - \dfrac{\hat{H}_k^2}{8\pi}\left(2\hat{\xi}_k^{(\sigma_3)}\dfrac{\partial \delta_k^{(\sigma_4)}}{\partial \xi} - \dfrac{\partial V_k^{(\sigma_5)}}{\partial \xi}\right) = 0 . & (6.1)\\
m\,\dfrac{\varepsilon^{n+1}-\varepsilon^n}{\tau_n} = -P_i^{(\sigma_6)}\left(\dfrac{\partial V_k^{(\sigma_8)}}{\partial \xi_k}u_k^{(\sigma_7)} + \dfrac{\partial V_{k+1}^{(\sigma_8)}}{\partial \mu_{k+1}}u_{k+1}^{(\sigma_7)}\right) & k=i, i-1 \quad (6.2)\\
\dfrac{V^{n+1}(H^{n+1})^2 - V^n(H^n)^2}{8\pi\tau} = -\hat{H}^2\dfrac{\partial V_k^{(\sigma_9)}}{\partial \xi_k}u_k^{(\sigma_9)} + \dfrac{\hat{H}^2}{4\pi}S^{(\sigma_{11})} & (6.3)\\
\rho^n V^n = m & k=i, i+1 \quad (6.4)\\
S^n H^n = \Phi & (6.5)\\
\dfrac{\xi^{n+1}-\xi^n}{\tau_n} = u^{(\sigma_{10})} & (6.6)
\end{cases}
$$

где $\hat{H}^2$ некая комбинация H^n, H^{n+1} , которую определим в дальнейшем, $\sigma_\alpha \in [0,1]$, $\alpha = 1, \ldots, 11$

Определим значения σ_α из требования полной консервативности системы (II)

Для изэнтропийности уравнения (6.2) надо положить $\sigma_7 = \sigma_{10}$

$\sigma_5=0.5$ [1] . При этом (6.2) может быть записано в алгебраически эквивалентных формах:

$$m\,\frac{\varepsilon^{n+1}-\varepsilon^{n}}{\tau_n}=-P^{(\sigma_1)}\frac{V^{n+1}-V^{n}}{\tau_n}\,,\quad \frac{\varepsilon^{n+1}-\varepsilon^{n}}{\tau_n}=\frac{1}{\rho^{n+1}\rho^{n}}\,\frac{\rho^{n+1}-\rho^{n}}{\tau_n} \qquad (6.7)$$

Нетрудно заметить, что динамическое уравнение при любых σ_α консервативно по импульсам.

Для алгебраической согласованности уравнений изменения магнитной энергии (5.3) с условием вмороженности магнитного поля (5.5) выберем $\sigma_8=\sigma_{11}=0.5$, $\sigma_9=\sigma_{10}$ и положим $\hat{H}^2=H^{n+1}H^{n}$. Тогда (5.3) тождественно уравнению

$$\frac{1}{\tau^n}\left(E_H^{n+1}-E_H^{n}\right)=-\frac{H^{n+1}H^{n}}{8\pi\tau_n}\left(\xi^{n}S^{n+1}-\xi^{n+1}S^{n}\right)$$

и как показано в § 3 согласовано с (5.5).

Можно показать, что при $\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=\sigma_5=0.5$ и $\sigma_{10}=0.5$ для системы справедлив закон сохранения полной энергии в виде:

$$\frac{1}{\tau_n}\sum_{i\in\omega}\left(m_i\,\frac{u_{i+1}^2+u_i^2}{4}+m_i\varepsilon_i+V_i\frac{H_i^2}{8\pi}\right)$$
$$=\left[\left(P_{i+1}^{(\sigma_1)}+\frac{H_{i+1}^{n+1}H_{i+1}^{n}}{8\pi}\right)\frac{\partial V_{i+1}^{(0.5)}}{\partial\xi_{i1}}u_{i1}^{(\sigma_{10})}-\frac{H_{i+1}^{n+1}H_{i+1}^{n}}{4\pi}\frac{S_{i+1}^{(0.5)}}{2}u_{i1}^{(0.5)}\right] \qquad (6.8)$$
$$-\left[\left(P_{i2}^{(\sigma_2)}+\frac{H_{i2}^{n+1}H_{i2}^{n}}{8\pi}\right)\frac{\partial V_{i2}^{(0.5)}}{\partial\xi_{i2}}u_{i2}^{(\sigma_{10})}-\frac{H_{i2}^{n+1}H_{i2}^{n}}{4\pi}\frac{S_{i2}^{(0.5)}}{2}u_{i2}^{(0.5)}\right]$$

Действительно, если умножить (5.I) на $u^{(0.5)}=\frac{u^{n+1}+u^{n}}{2}$ и сложить с (5.2) и (5.3), получим (5.8) после несложных преобразований. Таким образом, система разностных уравнений (5.I)-(6.6) при $\sigma_\alpha=0.5$ $(\alpha=2,\dots,11)$, σ_1 произвольно и $\hat{H}^2=H^{n+1}H^{n}$ обладает свойством полной консервативности.

Используя разностные соотношения (3.10) легко показывается, что при $\sigma_1=0.5$ система (5.1)-(6.6) аппроксимирует соответственно непрерывную систему с точностью $O(\tau^2)$.

П.2. Координаты ξ, μ. Пусть

$$\vec{H}=H=\begin{cases} H_z, \text{ для } & \xi=x,\ \mu=y \\ H_\varphi, \text{ для } & \xi=R,\ \mu=z \end{cases}$$

Дискретизацию по времени вводим аналогично п.1. Система разностных уравнений записывается в следующем виде

$$M\,\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau_n}=P_k^{(\sigma_1)}\left(\frac{\partial V_k}{\partial \xi}\right)_*^{(\sigma_2)}+\frac{\hat{H}_k^2}{8\pi}\left[2\hat{\xi}_k^{(\sigma_3)}\frac{\partial S_k^{(\sigma_4)}}{\partial \xi}-\left(\frac{\partial V_k}{\partial \xi}\right)^{(\sigma_5)}\right] \tag{6.9}$$

$$M\,\frac{v^{n+1}-v^n}{\tau_n}=P_k^{(\sigma_1)}\left(\frac{\partial V_k}{\partial \mu}\right)^{(\sigma_2)}+\frac{\hat{H}_k^2}{8\pi}\left[2\hat{\xi}_k^{(\sigma_3)}\frac{\partial S^{(\sigma_4)}}{\partial \xi}-\left(\frac{\partial V_k}{\partial \xi}\right)^{(\sigma_5)}\right] \tag{6.10}$$

$$k\in \mathbb{W}_1(ij)$$

$$m\,\frac{\varepsilon^{n+1}-\varepsilon^n}{\tau_n}=-P^{(\sigma_6)}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial \xi_k}\right)_*^{(\sigma_8)}u_k^{(\sigma_7)}+\left(\frac{\partial V}{\partial \mu_k}\right)_*^{(\sigma_8)}v_k^{(\sigma_7)}\right\} \tag{6.11}$$

$$\frac{E_H^{n+1}-E_H^n}{\tau_n}=-\frac{\hat{H}^2}{8\pi}\left[2\hat{\xi}^{(\sigma_9)}\left(\frac{\partial S^{(\sigma_9)}}{\partial \xi_k}u_k^{(\sigma_{10})}+\frac{\partial S^{(\sigma_9)}}{\partial \mu_k}v_k^{(\sigma_{10})}\right)-\right. \tag{6.12}$$

$$\left.-\left(\frac{\partial V}{\partial \xi_k}\right)_*^{(\sigma_{11})}u_k^{(\sigma_{12})}-\left(\frac{\partial V}{\partial \mu_k}\right)^{(\sigma_{11})}v_k^{(\sigma_{12})}\right]$$

$$k\in \mathbb{W}_2(ij)$$

$$\rho^n V^n=m \tag{6.13}$$

$$H^n S^n=\Phi \tag{6.14}$$

$$\frac{\xi^{n+1}-\xi^n}{\tau_n}=v^{(\sigma_{13})} \tag{6.15}$$

$$\frac{\mu^{n+1}-\mu^n}{\tau_n}=v^{(\sigma_{13})} \tag{6.17}$$

Исследуем систему уравнений (6.9)-(6.17) при различных $\sigma_\varkappa$

При $\sigma_6 = 0.5$, $\sigma_7 = \sigma_{13}$ уравнение для внутренней энергии приобретает энтропийную форму, аналогичную (6.2). Если взять $\sigma_8 = \sigma_9 = \sigma_{11} = 0.5$, $\sigma_{10} = \sigma_{12} = \sigma_{13}$, $\hat{H}^2 = H^{n+1} H^n$, то непосредственной проверкой можно убедиться, что условие (6.14) и уравнение (6.12) алгебраически эквивалентны, т.е. условия вмороженности и уравнение изменения энергии магнитного поля взаимосогласованы. Динамические уравнения консервативны по импульсам.

Можно показать, что при $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0.5$, $\sigma_{13} = 0.5$ для системы (6.9)-(6.17) справедлив закон сохранения полной энергии в форме:

$$\frac{1}{\tau_n} \sum_{j \in \omega'} \left\{ m_{ij} \sum_{k \in \Omega_2(j)} \frac{(u_{kj}^{n+1})^2 + (v_{kj}^{n+1})^2 - (u_{kj}^n)^2 - (v_{kj}^n)^2}{8} + m_{ij}(\varepsilon_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{ij}^n) + \frac{V_{ij}^{n+1}(H_{ij}^{n+1})^2 - V_{ij}^n (H_{ij}^n)^2}{8\pi} \right\} = A_1^{(\sigma)}$$

где $A_1^{(\sigma)}$ получена из A_1 (см. приложение 4б) соответствующим "взвешиванием" входящих величин параметрами σ_α.

Таким образом при $\sigma_\alpha = 0.5 (\alpha = 2, \ldots 13)$, σ_1 произвольной, $\hat{H}^2 = H^{n+1} H^n$ система разностных уравнений (6.9)-(6.17) обладает свойством полной консервативности. Также как и в одномерном случае при $\sigma_1 = \frac{1}{2}$ система (6.9)-(6.17) аппроксимирует соответствующую систему дифференциальных уравнений со вторым порядком по времени:

Отметим, что при $P_{ij} \equiv const$ и $H = const$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv 0$ следовательно, система сбалансирована.

П.3. $\vec{\tau} = \{\xi, \mu, 0\}$, $\vec{H} = \{H_\xi, H_\mu, 0\}$. Переход к разностным уравнениям в этом случае производится аналогично. В результате получается параметризованная система уравнений:

$$M \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau_n} = P_k^{(\sigma_1)} \left(\frac{\partial N_k}{\partial \xi}\right)_*^{(\sigma_2)} + \frac{\hat{H}_{\xi_k}^2 + \hat{H}_{H_k}^2}{8\pi} \left(\frac{\partial N_k}{\partial \xi}\right)_*^{(\sigma_3)} - \frac{(\Phi^k H_{\xi_k})_*}{4\pi} \quad (6.19)$$

$$M\frac{v^{n+1}-v^n}{\tau_n}=P_k^{(\sigma_1)}\left(\frac{\partial V_k}{\partial\mu}\right)_*^{(\sigma_2)}+\frac{\hat{H}_{\xi k}^2+\hat{H}_{\mu k}^2}{8\pi}\left(\frac{\partial V_k}{\partial\mu}\right)_*^{(\sigma_3)}-\frac{(H_{\mu k}\Phi^k)_*}{4\pi} \qquad (6.20)$$

$$k\in\mathrm{III}_1(ij)$$

$$m\frac{\varepsilon^{n+1}-\varepsilon^n}{\tau_n}=-p^{(\sigma_1)}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\xi_k}\right)_*^{(\sigma_4)}u_k^{(\sigma_5)}+\left(\frac{\partial V}{\partial\mu_k}\right)_*^{\sigma_4}v_k^{(\sigma_5)}\right] \qquad (6.21)$$

$$\frac{E_H^{n+1}-E_H^n}{\tau_n}=-\frac{\hat{H}_\xi^2+\hat{H}_\mu^2}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\xi_k}\right)_*^{(\sigma_6)}u_k^{(\sigma_7)}+\left(\frac{\partial V}{\partial\mu_k}\right)_*^{(\sigma_6)}v_k^{(\sigma_7)}\right]+ \qquad (6.22)$$

$$\frac{(H_\xi\Phi_k)_*u_k^{(\sigma_8)}}{4\pi}+\frac{(H_\mu\Phi_k)_*v_k^{(\sigma_8)}}{4\pi},\quad k\in\mathrm{III}_2(ij)$$

$$\nabla^n\rho^n=m \qquad (6.23)$$

$$\Phi_k^n=\Phi_k^{n+1}=\Phi_k \qquad (6.24)$$

$$\frac{\xi^{n+1}-\xi^n}{\tau_n}=u^{(\sigma_9)} \qquad (6.25)$$

$$\frac{\mu^{n+1}-\mu^n}{\tau_n}=v^{(\sigma_9)} \qquad (6.26)$$

$$P^n=P(\rho^n,\varepsilon^n) \qquad (6.27)$$

Напомним, что $\Phi_k=\hat{\xi}\left(H_\xi\frac{\partial S}{\partial\xi_k}+H_\mu\frac{\partial S}{\partial\mu_k}\right)$ (6.24)

$$\Phi^k=\hat{\xi}_k\left(H_{\xi k}\frac{\partial S_k}{\partial\xi}+H_{\mu k}\frac{\partial S_k}{\partial\mu}\right)$$

В (6.24) для Φ^k повторяющихся индекс K не означает суммирование как обычно.

Так как уравнение для изменения удельной внутренней энергии (6.2I) совпадает с (6.II), то для получение энтропийной формы (6.2I) достаточно положить $\sigma_4=0.5$ и $\sigma_5=\sigma_9$ при этом (6.2I) эквивалентно алгебраическим уравнениям::

$$m\frac{\varepsilon^{n+1}-\varepsilon^n}{\tau_n}=-p^{(\sigma_1)}\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau_n},\quad \frac{\varepsilon^{n+1}-\varepsilon^n}{\tau_n}=\frac{1}{\rho^n\rho^{n+1}}\frac{\rho^{n+1}-\rho^n}{\tau_n}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что необходимые

и достаточные условия консервативности по импульсам (4.14),(4.14) для динамических уравнений (6.19), (6.20) выполнены.

Для алгебраической согласованности уравнений изменения магнитной энергии (6.22) и условия постоянства магнитных потоков (6.24) выберем $\sigma_8=\sigma_{10}=\sigma_{11}=0.5$, $\sigma_9=\sigma_{12}=\sigma_{13}$ и положим

$$\hat{H}_\xi^2=H_\xi^{n+1}H_\xi^n,\quad \hat{H}_\mu^2=H_\mu^{n+1}H_\mu^n,\quad (\vec{H}\Phi)_*=\frac{1}{2}(\vec{H}^{n+1}\Phi^n+\vec{H}^n\Phi^{n+1})$$

Тогда (6.22) преобразуется к виду

$$\left[\frac{(H_\xi^{n+1})^2+(H_\mu^{n+1})^2}{8\pi\tau_n}V^{n+1}-\frac{(H_\xi^n)^2+(H_\mu^n)^2}{8\pi\tau_n}V^n\right]= \tag{6.28}$$

$$-\frac{H_\xi^{n+1}H_\xi^n-H_\mu^{n+1}H_\mu^n}{8\pi}\,\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau_n}+\frac{H_\xi^{n+1}\Phi_k^n+H_\xi^n\Phi_k^{n+1}}{8\pi}\,\frac{\xi_k^{n+1}-\xi_k^n}{\tau_n}+ \tag{6.29}$$

$$+\frac{H_\mu^{n+1}\Phi_k^n+H_\mu^n\Phi_k^{n+1}}{8\pi}\,\frac{\mu_k^{n+1}-\mu_k^n}{\tau_n}\qquad k\in Ш_2(ij)$$

для этого достаточно использовать равенство:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\xi_k}\right)_*^{(0.5)}\frac{\xi_k^{n+1}-\xi_k^n}{\tau_n}+\left(\frac{\partial V}{\partial\mu_k}\right)_*^{(0.5)}\frac{\mu_k^{n+1}-\mu_k^n}{\tau_n}=\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau_n}$$

Уравнение (6.28) совпадает тождественно с (3.27), которое, как было показано, алгебраически эквивалентна условиям вмороженности магнитного поля (6.24)

При $\sigma_2=\sigma_3=0.5$ и $\sigma_{13}=0.5$, $(H_\xi\Phi)_*$ и $(H_\mu\Phi)_*$ выбранным согласно (2.28) для системы разностных уравнений справедлив закон сохранения полной энергии в следующем виде:

$$\frac{1}{\tau_n}\sum_{(ij)\in ш}\left[m_{ij}\sum_{k\in Ш_k(ij)}\frac{(u_k^{n+1})^2+(v_k^{n+1})^2-(u_k^n)^2-(v_k^n)^2}{8}+m_{ij}(\varepsilon_{ij}^{n+1}-\varepsilon_{ij}^n)+(E_{H_{ij}}^{n+1}-E_{H_{ij}}^n)\right]=A_2^{(\sigma)} \tag{6.30}$$

где $A_2^{(\sigma)}$ дискретизированная соответствующим образом выражение для работы внешнего давления и магнитного поля на границе, (см. прил.5б).

Следовательно, система разностных уравнений МГД (6.19),(6.26) удовлетворяет всем требованиям полной консервативности при $\sigma_2=\frac{1}{2}$ ($\alpha=2,\ldots,9$, σ_1 – произвольна), $\hat{H}_\xi^2=\hat{H}_\xi^{n+1}H_\xi^n$, $\hat{H}_\mu^2=H_\mu^{n+1}H_\mu^n$, $(H_\xi\Phi)_*$, $(H_\mu\Phi)_*$ выбранных согласно (6.28).

В § 3 было показано, что:

$$
\begin{aligned}
&(H_\xi\Phi)_* = (H_\xi\Phi)_{t_{n+1/2}} + O(\tau_n^2)\\
&(H_\mu\Phi)_* = (H_\mu\Phi)_{t_{n+1/2}} + O(\tau_n^2)\\
&H_\xi^{n+1}H_\xi^n + H_\mu^{n+1}H_\mu^n = H_\xi^2(t_{n+1/2}) + H_\mu^2(t_{n+1/2}) + O(\tau_n^2)
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

Можно также показать справедливоть разностных соотношений:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_*^{(0.5)} = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_{t_{n+1/2}} + O(\tau_n^2)\\
&\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)_*^{(0.5)} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)_{t_{n+1/2}} + O(\tau_n^2)
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

В силу (6.31) и (6.32) динамические уравнения (6.19),(6.20) аппроксимируют соответствующие дифференциально-разностные уравнения с точностью $O(\tau_n^2)$ при $\sigma_1=0.5$. Второй порядок аппроксимации по α,β для уравнений изменения магнитной энергии псказывается в § 3. Уравнения вмороженности магнитного поля (6.24) и уравнения непрерывности (6.23) и состояния (6.27) аппроксимируются точно. Для уравнений изменения удельной внутренней энергии (в энтропийной форме) (6.21) и "кинематических" уравнений (6.25),(6.26) отнесенных ко времени $t_{n+1/2}$, второй порядок аппроксимации пс τ_n очевиден. Следовательно, полностью консервативная система разностных уравнений МГД (2.19)-(2.26) при $\sigma_1=0.5$ аппроксимируем соответствующую непрерывную систему уравнений с точностью $O(\tau_n^2+h_\alpha^2+h_\beta^2)$

Система (2.19)-(2.26), как нетрудно заметить, сбалансирована.

§ 7. О граничных условиях

Как отмечалось в § 4, динамические уравнения МГД во всех рассматриваемых случаях справедливы только для внутренних точек разностной сетки. Получим теперь динамические уравнения, определяющие движение граничных узлов для двух типов граничных условий:

а) условия на свободной границе с внешними силами давления $P^{вн}$ и магнитного поля $\vec{H}^{вн}$,

б) условия на прямолинейной неподвижной границе "жидкость-твердый диэлектрик" (при отсутствии трения).

При написании динамических уравнений для граничных узлов будем исходить из требовании их однородности [8], означающего, что вычисления скоростей должны производиться по одинаковым формулам для всех точек расчетной области, включая и ее границу.

П.I. Возьмем некий граничный узел (i,M) на верхней границе области $\mathfrak{D}$ (рис.4). В качестве примера рассмотрим случай, когда:

$$\vec{r}=\{x,y,0\},\ \vec{H}=\{H_x,H_y,0\}$$

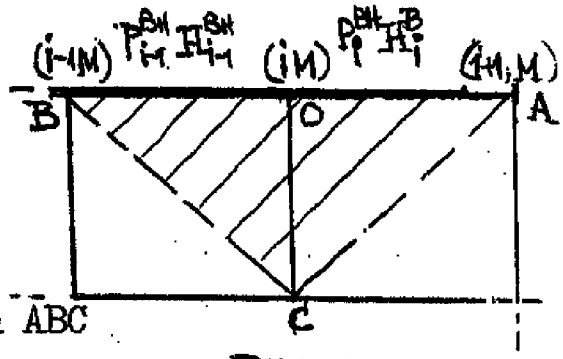

Рис 4

Чтобы получить динамическое уравнение для узла (iM), запишем закон изменения полного импульса для треугольника ABC

$$\iint\limits_{ABC} \rho\frac{d\vec{V}}{dt}\,d\sigma = -\iint\limits_{ABC}\left\{\nabla\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)-(\vec{H}\nabla)\vec{H}\right\}d\sigma \qquad (7.I)$$

Переходя в правой части (7.I) к контурному интегралу получим выражение (для проекции на ось x)

$$2M_{iM}\frac{du_{iM}}{dt}+O(h_\alpha^2+h_\beta^2)=$$

$$= -\int\limits_{BA}\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)dy - H_x\left(H_x dy - H_y dx\right) - \int\limits_{ACB}\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)dy - H_x\left(H_x dy - H_y dx\right) \quad (7.2)$$

Заметим, что второй интеграл в правой части (7.2) определяет изменение импульса граничного узла (i,M), под действием сил давления и магнитного поля только со стороны жидкости. Можно показать, что:

$$\int\limits_{ABC}\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)dy - H_x\left(H_x dy - H_y dx\right) = \ell\left[\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)_{iM-1}\frac{\partial y_{iM-1}}{\partial x} + \left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)_{iM-1}\frac{\partial y_{iM-1}}{\partial x} - \frac{1}{4\pi}\left(H_{x_{i-1M}}\Phi^{i-1M-1} + H_{x_{iM-1}}\Phi^{iM-1}\right)\right] + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2) \quad (7.3)$$

Первый же интеграл в (7.2) дает импульс сил внешнего давления и магнитного поля, и может быть аппроксимирован следующим образом:

$$-\int\limits_{BA}\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)dy - H_x\left(H_x dy - H_y dx\right) = -\left[\left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)^{BH}_{iM}\left(y_{i+1M}-y_{iM}\right) + \left(p+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)^{BH}_{iM}\left(y_{i+1M}-y_{iM}\right) + \frac{H^{BH}_{x_{iM}}\Phi^{iM\,BH}}{4\pi} + \frac{H^{BH}_{x_{iM}}\Phi^{iM\,BH}}{4\pi}\right] + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2) \quad (7.4)$$

Здесь величины p^{BH}, $\vec{H}^{BH}$ измеряются в серединах граничных отрезков (на плоскости α,β), а

$$\Phi^{iM\,BH} = \left\{H^{BH}_{x_{iM}}\left(y_{iM}-y_{i+1M}\right) - H^{BH}_{y_{iM}}\left(x_{iM}-x_{i+1M}\right)\right\} = H^{BH}_n\left|\vec{r}_{iM}-\vec{r}_{i+1M}\right| \quad (7.5)$$

где H^{BH}_n – составляющая $\vec{H}$, перпендикулярная границе.

Таким образом динамическое уравнение полностью определено выражениями (7.3) и (7.4). Динамическое уравнение по оси y получается аналогично. Не составляет труда получить уравнения для гра-

ничных точек и на других участках границы, а также и в угловых точках. Для того, чтобы динамические уравнения для граничных узлов формально совпадали с уравнениями движения внутренних узлов, воспользуемся широко распространенным приемом введения "фиктивных" граничных ячеек, определяющих ω. Возьмем границу, состоящую из узлов

$(i,M)\ \{i=1,\dots N\}$ (рис 5)

Как видно из рисунка, дополнительный $M+1$ слой образует граничные фиктивные ячейки. Пусть

$$\tau_{iM+1}=\tau_{iM}$$
$$m_{iM}=0 \qquad (7.6)$$

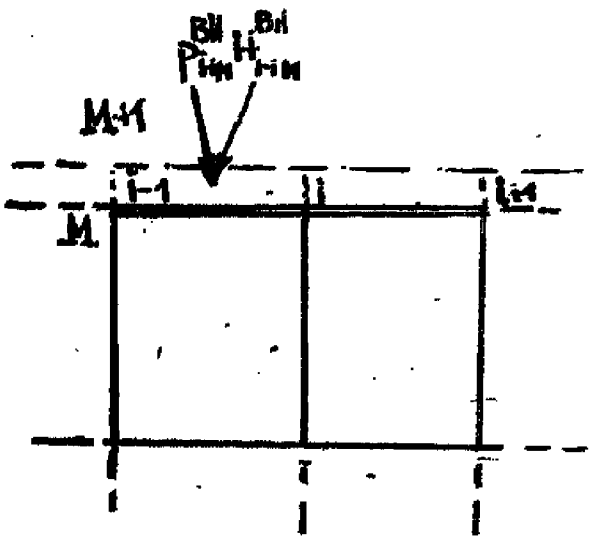

Рис 5

Значения величин в фиктивных ячейках зададим также, как и в "реальных". Поскольку для введенных таким образом фиктивных ячеек имеются только одна диагональ, то и условие вмороженности будет одно. Как нетрудно проверить, условие

$$H^{вн}_{x\,iM}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{i+1/2\,M+1/2}-H^{вн}_{y\,iM}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)_{i+1/2\,M}=c^{\circ}_{i+1/2\,M}$$

аппроксимирует с точностью $O(h_\alpha^2+h_\beta^2)$ непрерывное условие вмороженности и эквивалентно (7.5) если положить $\Phi^{вн}_{iM}=c^{\circ}_{i+1/2\,M}h_\alpha$. Теперь очевидно, что если для граничного узла (iM) записать динамическое уравнение (4.17), то оно полностью совпадет с полученным на основании (7.3) и (7.4) уравнением движения.

Можно показать, что введение фиктивных ячеек позволяет формально пользоваться для граничных узлов динамическими уравнениями, которые справедливы для внутренних узлов во всех рассмотренных

в препринте случаях.

П.2. Условие непротекания жидкости сквозь неподвижную прямоугольную границу может быть реализовано также введением фиктивных ячеек. Для этого делается шаг по времени в предположении, что граница является свободной (величина противодавления полагается при этом равной нулю). Получающиеся скорости граничных узлов раскладываются на тангенциальную и нормальную составляющие. Нормальная составляющая зануляется, если она направлена в диэлектрик. Находя разложения полученных таким образом составляющих скоростей по осям координат, находим скорости для следующего шага по времени.

В заключение отметим, что для окаймленной фиктивными ячейками области все интегральные законы изменения аппроксимируются с точностью $O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I.а. Одномерные дифференциальные уравнения МГД в лагранжевых переменных $\vec{r}=(\xi,0,0)$, $\vec{H}=(0,H,0)$

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\alpha}\frac{du}{dt}+\xi^{\ell-1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(P+\frac{H^2}{8\pi}\right)+\frac{H^2}{4\pi}(\ell-1)\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}=0$$

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\alpha}\frac{d\varepsilon}{dt}=-P\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\ell}\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{dH}{dt}=-H\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\ell}\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\alpha}\frac{H^2}{8\pi}\right)=-\frac{H^2}{8\pi}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\ell}\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\alpha}\right)+\frac{H^2}{4\pi}(\ell-1)\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}$$

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\alpha}=\rho_0(\alpha)\ ,\quad H\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}=\Phi_0(\alpha)$$

$$\frac{d\xi}{dt}=u\ ,\quad P=P(\rho,\varepsilon)$$

I.б. $\vec{r}=(\xi,\mu)$, $\vec{H}$ перпендикулярна плоскости течения:

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{du}{dt}+\xi^{\ell-1}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(P+\frac{H^2}{8\pi}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\beta}-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(P+\frac{H^2}{8\pi}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\right]+\frac{H^2}{4\pi}(\ell-1)\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}=0$$

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(P+\frac{H^2}{8\pi}\right)\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(P+\frac{H^2}{8\pi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\right]=0$$

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{d\varepsilon}{dt}=-P\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]$$

$$\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{dH}{dt}=-H\frac{d}{dt}\left[\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{H^2}{8\pi}\right]=-\frac{H^2}{8\pi}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]+\frac{H^2}{4\pi}\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}(\ell-1)u$$

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}=\rho_0(\alpha,\beta)\ ,\quad H\frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)}=\Phi_0(\alpha,\beta)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{V}\ ,\quad P=P(\rho,\varepsilon)$$

I.в. $\vec{r}=(\xi,\mu)$, $\vec{H}$ лежит в плоскости течения:

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{du}{dt}+\xi^{\ell-1}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\left(P+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right\}-\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\left(P+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\right\}\right]=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{H_\xi c_2}{4\pi}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{H_\xi c_1}{4\pi}$$

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{d\vec{v}}{dt}-\frac{1}{\ell}\left\{\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\left(P+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\alpha}\right]-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(P+\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right)\frac{\partial\xi^\ell}{\partial\beta}\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{c_2\vec{H}_\mu}{4\pi}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{c_1\vec{H}_\mu}{4\pi}$$

$$\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{d\vec{H}}{dt}=-\vec{H}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]+c_2\frac{\partial\vec{v}}{\partial\alpha}-c_1\frac{\partial\vec{v}}{\partial\beta}$$

$$\frac{1}{\ell}\frac{d}{dt}\left[\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\right]=-\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right]+\frac{\vec{H}}{4\pi}\cdot\left(c_2\frac{\partial\vec{v}}{\partial\alpha}-c_1\frac{\partial\vec{v}}{\partial\beta}\right)$$

$$c_1(\alpha,\beta)=\xi^{\ell-1}\left(H_\xi\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}-H_\mu\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\right)$$

$$c_2(\alpha,\beta)=\xi^{\ell-1}\left(H_\xi\frac{\partial\mu}{\partial\beta}-H_\mu\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\right)$$

$$\frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\frac{d\varepsilon}{dt}=-P\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\ell}\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}\right],\quad \frac{1}{\ell}\rho\frac{D(\xi^\ell,\mu)}{D(\alpha,\beta)}=\rho_0(\alpha,\beta)$$

2.а. одномерная система дифференциально-разностных уравнений (случай рас. в I.а.):

$$M\frac{du}{dt}-\left(P_k+\frac{H_k^2}{8\pi}\right)\frac{\partial V_k}{\partial\xi}+\frac{H_k^2}{4\pi}\frac{(\ell-1)S_k}{2}=0\quad,\ k=i,i-1$$

$$m\frac{d\varepsilon}{dt}=-P\frac{dV}{dt}=-P\left(\frac{\partial V}{\partial\xi_i}u_i+\frac{\partial V}{\partial\xi_{i+1}}u_{i+1}\right)$$

$$S\frac{dH}{dt}=-H\frac{dS}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}V\frac{H^2}{8\pi}=-\frac{H^2}{8\pi}\frac{dV}{dt}+\frac{H^2}{4\pi}(\ell-1)S\frac{u_i+u_{i+1}}{2}$$

$$HS=\Phi\ ,\quad \rho V=m$$

$$\frac{d\xi}{dt}=u\ ,\quad P=P(\rho,\varepsilon)\quad,\quad 1\le i\le N$$

2.б. Двумерная система ДРС в случае рассмотренном в I.б:

$$M\frac{du}{dt}-P_k\frac{\partial V_k}{\partial\xi}-\frac{H_k^2}{8\pi}\left(2\frac{\partial S_k}{\partial\xi}\hat{\xi}_k-\frac{\partial V_k}{\partial\xi}\right)=0$$

$$M\frac{dv}{dt}-P_k\frac{\partial V_k}{\partial\mu}-\frac{H_k^2}{8\pi}\left(2\frac{\partial S_k}{\partial\mu}\hat{\xi}_k-\frac{\partial V_k}{\partial\mu}\right)=0\quad,\ k\in\mathrm{III}_1(ij)$$

$$m\frac{d\varepsilon}{dt}=-P\frac{dV}{dt}=-P\left(\frac{\partial V}{\partial\xi_k}u_k+\frac{\partial V}{\partial\mu_k}v_k\right)\quad,\quad k\in\mathrm{III}_2(ij)$$

$$HS=\Phi\ ,\quad \rho V=m$$

$$S\frac{dH}{dt}=-H\frac{dS}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}V\frac{H^2}{8\pi}=-\frac{H^2}{8\pi}\frac{dV}{dt}+\frac{H^2}{4\pi}S\frac{d\hat{\xi}}{dt}\ ,\quad \hat{\xi}=V/S$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\ ,\quad p=p(\rho,\varepsilon)\ ,\qquad (ij)\in\overline{\omega}=\{1\le i\le N-1,\ 2\le j\le M-1\}$$

2.в. Двумерная система ДРУ в случае, рассмотренном в I.в:

$$M\frac{du}{dt}=\left(p_k+\frac{\vec{H}_k^2}{8\pi}\right)\frac{dV_k}{\partial\xi}-\frac{H_{\xi_k}\Phi^k}{4\pi}$$

$$M\frac{dv}{dt}=\left(p_k+\frac{\vec{H}_k^2}{8\pi}\right)\frac{dV_k}{\partial\mu}-\frac{H_{\mu_k}\Phi^k}{4\pi}\qquad k\in\omega_1(ij)$$

$$m\frac{d\varepsilon}{dt}=-p\frac{dV}{dt}$$

$$V\frac{d\vec{H}}{dt}=-\vec{H}\frac{dV}{dt}+\Phi_k\vec{v}_k$$

$$\frac{d}{dt}V\frac{\vec{H}^2}{8\pi}=-\frac{\vec{H}^2}{8\pi}\frac{dV}{dt}+\frac{\vec{H}\cdot\Phi\vec{v}_k}{4\pi}\ ,\qquad k\in\omega_2(ij)$$

$$\Phi^k_{k'}=\left(H_{\xi_k}\frac{\partial S_k}{\partial\xi_{k'}}+H_{\mu_k}\frac{\partial S_k}{\partial\mu_{k'}}\right)\hat{\xi}_k$$

$$m=\rho V\ ,\quad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}\ ,\quad p=p(\rho,\varepsilon)$$

3.а. Одномерная система резностных уравнений(см. I.а.):

$$M\,\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau_n}-P_k^{(0,5)}\frac{\partial V^{(0,5)}}{\partial\xi}-\frac{H_k^{n+1}H_k^n}{8\pi}\left(2\hat{\xi}_k^{(0,5)}\frac{\partial S_k^{(0,5)}}{\partial\xi}-\frac{\partial V_k^{(0,5)}}{\partial\xi}\right)=0$$

$$m\,\frac{\varepsilon^{n+1}-\varepsilon^n}{\tau_n}=-p^{(0,5)}\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau_n}$$

$$\frac{V^{n+1}(H^{n+1})^2-V^n(H^n)^2}{8\pi\tau_n}=-\frac{H^{n+1}H^n}{8\pi}\frac{V^{n+1}-V^n}{\tau_n}+\frac{H^{n+1}H^n}{4\pi\tau_n}S^{(0,5)}\frac{u_i^{(0,5)}+u_{i+1}^{(0,5)}}{2}$$

$$\rho^nV^n=m\ ,\quad S^nH^n=\Phi$$

$$\frac{\xi^{n+1}-\xi^n}{\tau}=\frac{u^{n+1}+u^n}{2}$$

3.б. Двумерная система разностных уравнений (см. I.б):

$$M\,\frac{u^{n+1}-u^{n}}{\tau_n}=p_k^{(\sigma)}\left(\frac{\partial r_k}{\partial \xi}\right)_*^{(0,5)}+\frac{H_k^{n+1}H_k^{n}}{8\pi}\left[2\hat{\xi}_k^{(0,5)}\frac{\partial S_k^{(0,5)}}{\partial \xi}-\left(\frac{\partial r_k}{\partial \xi}\right)_*^{(0,5)}\right]$$

$$M\,\frac{v^{n+1}-v^{n}}{\tau_n}=p_k^{(\sigma)}\left(\frac{\partial r_k}{\partial \mu}\right)_*^{(0,5)}+\frac{H_k^{n+1}H^{n}}{8\pi}\left[2\hat{\xi}_k^{(0,5)}\frac{\partial S_k^{(0,5)}}{\partial \mu}-\left(\frac{\partial r_k}{\partial \mu}\right)_*^{(0,5)}\right],\quad k\in Ш_1(ij)$$

$$m\,\frac{\varepsilon^{n+1}-\varepsilon^{n}}{\tau_n}=-p^{(\sigma)}\,\frac{V^{n+1}-V^{n}}{\tau_n}$$

$$\frac{E_H^{n+1}-E_H^{n}}{\tau_n}=-\frac{H^{n+1}H^{n}}{8\pi}\left[2\hat{\xi}^{(0,5)}\,\frac{S^{n+1}-S^{n}}{\tau_n}-\frac{V^{n+1}-V^{n}}{\tau_n}\right]$$

$$\rho^{n}V^{n}=m\,,\quad H^{n}S^{n}=\Phi\,,\qquad \frac{\vec{r}^{\,n+1}-\vec{r}^{\,n}}{\tau_n}=\frac{\vec{V}^{n+1}+\vec{V}^{n}}{2}$$

3.в. Двумерная система разностных уравнений (см. I.в.);

$$M\,\frac{u^{n+1}-u^{n}}{\tau_n}=p_k^{(\sigma)}\left(\frac{\partial r_k}{\partial \xi}\right)_*^{(0,5)}+\frac{H_{\xi k}^{n+1}H_{\xi k}^{n}+H_{\mu k}^{n+1}H_{\mu k}^{n}}{4\pi}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)_*^{(0,5)}+\frac{(\Phi^{k})^{n+1}H_{\xi k}^{n}+(\Phi^{k})^{n}H_{\xi k}^{n+1}}{8\pi}$$

$$M\,\frac{v^{n+1}-v^{n}}{\tau_n}=p_k^{(\sigma)}\left(\frac{\partial r_k}{\partial \mu}\right)_*^{(0,5)}+\frac{H_{\xi k}^{n+1}H_{\xi k}^{n}+H_{\mu k}^{n+1}H_{\mu k}^{n}}{4\pi}\left(\frac{\partial r}{\partial \mu}\right)_*^{(0,5)}+\frac{(\Phi^{k})^{n+1}H_{\mu k}^{n}+(\Phi^{k})^{n}H_{\mu k}^{n+1}}{8\pi}$$

$$m\,\frac{\varepsilon^{n+1}-\varepsilon^{n}}{\tau_n}=-p^{(\sigma)}\,\frac{V^{n+1}-V^{n}}{\tau_n}\qquad k\in Ш_1(ij)$$

$$\frac{E_H^{n+1}-E_H^{n}}{\tau_n}=-\frac{H_\xi^{n+1}H_\xi^{n}+H_\mu^{n+1}H_\mu^{n}}{8\pi}\,\frac{V^{n+1}-V^{n}}{\tau_n}+$$

$$+\frac{H_\xi^{n}\Phi_k^{n+1}u_k^{(0,5)}+H_\xi^{n+1}\Phi_k^{n}u_k^{(0,5)}}{8\pi}+\frac{H_\mu^{n}\Phi_k^{n+1}+H_\mu^{n+1}\Phi_k^{n}}{8\pi}\,v_k^{(0,5)}$$

$$\Phi_k^{n}=\Phi^{n+1}=\Phi_k$$

$$\frac{\xi^{n+1}-\xi^{n}}{\tau_n}=u^{(0,5)}\,,\quad \frac{\mu^{n+1}-\mu^{n}}{\tau_n}=v^{(0,5)}$$

$$\rho^{n}V^{n}=m\,,\quad p=p(\rho,\varepsilon)$$

(в приложении 3 приведены полностью консервативные варианты)

4.а. Уравнение изменения импульса по ξ для множества узлов $\bar{\omega}'\{i_1<i<i_2,\ j_1<j<j_2\}$ в случае, рассмотренном в I.б.

$$\frac{d}{dt}\sum_{(ij)\in\bar{\omega}'} M_{ij}u_{ij} - \sum_{(ij)\in\omega'}\left(P-\frac{H^2}{8\pi}\right)_{ij} S_{ij} = \sum_{i=i_1}^{i_2-1}\left\{P^*_{ij+1}\left(\frac{\partial V_{ij+1}}{\partial\xi_{ij}}+\frac{\partial V_{ij+1}}{\partial\xi_{i+1j}}\right)-\frac{H^2_{ij+1}}{4\pi}\frac{S^{\ell-1}_{ij+1}}{2}+\right.$$

$$\left.+P^*_{ij2}\left(\frac{\partial V_{ij2}}{\partial\xi_{ij2}}+\frac{\partial V_{ij2}}{\partial\xi_{i+1j2}}\right)-\frac{H^2_{ij2}}{4\pi}\frac{S^{\ell-1}_{ij2}}{2}\right\}+\sum_{j=j_1}^{j_2-1}\left\{P^*_{i_1j}\left(\frac{\partial V_{i_2j}}{\partial\xi_{i_2j}}+\frac{\partial V_{i_2j}}{\partial\xi_{i_2j+1}}\right)-\frac{H^2_{i_2j}}{4\pi}\frac{S^{\ell-1}_{i_2j}}{2}+\right.$$

$$\left.+P^*_{i_1+1j}\left(\frac{\partial V_{i_1+1j}}{\partial\xi_{i_1j}}+\frac{\partial V_{i_1+1j}}{\partial\xi_{i_1j+1}}\right)-\frac{H^2_{i_1+1j}}{4\pi}\frac{S^{\ell-1}_{i_1+1j}}{2}\right\}+P^*_{i_1j+1}\frac{\partial V_{i_1+1j+1}}{\partial\xi_{i_1j+1}}+P^*_{i_1+1j2}\frac{\partial V_{i_1+1j2}}{\partial\xi_{i_1j2}}+P^*_{i_2j+1}\frac{\partial V_{i_2j+1}}{\partial\xi_{i_2j+1}}+$$

$$+P_{i_2j2}\frac{\partial V_{i_2j2}}{\partial\xi_{i_2j2}}-\frac{H^2_{i_1+1j+1}}{4\pi}\frac{S^{\ell-1}_{i_1+1j+1}}{2}-\frac{H^2_{i_1+1j2}}{4\pi}\frac{S^{\ell-1}_{i_1+1j2}}{2}-\frac{H^2_{i_2j+1}}{4\pi}\frac{S^{\ell-1}_{i_2j+1}}{2}-\frac{H^2_{i_2j2}}{4\pi}\frac{S^{\ell-1}_{i_2j2}}{2}$$

где $P^*=P+\frac{H^2}{4\pi}$. Уравнение для оси μ записывается аналогично.

4.б. Закон изменения полной энергии :

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{(ij)\in\bar{\omega}'} M_{ij}\frac{u^2_{ij}+v^2_{ij}}{2}+\sum_{(ij)\in\bar{\omega}'}\left(m_{ij}\varepsilon_{ij}+\frac{H^2_{ij}}{8\pi}\right)\right\}=A^1_{вн}$$

$$A^1_{вн}=\sum_{i=i_1}^{i_2-1}\left\{P^*_{i_1+1j}\left(\frac{\partial V_{i_1+1j}}{\partial\xi_{i_1j}}u_{i_1j}+\frac{\partial V_{i_1+1j}}{\partial\xi_{i_1j+1}}u_{i_1j+1}+\frac{\partial V_{i_1+1j}}{\partial\mu_{i_1j}}v_{i_1j}+\frac{\partial V_{i_1+1j}}{\partial\mu_{i_1j+1}}v_{i_1j+1}\right)+\frac{H^2_{i_1+1j}}{4\pi}\times\right.$$

$$\frac{S^{\ell-1}_{i_1+1j}}{4}(u_{i_2j+1}+u_{i_1j})+P^*_{i_2j}\left(\frac{\partial V_{i_2j}}{\partial\xi_{i_2j}}u_{i_2j}+\frac{\partial V_{i_2j}}{\partial\xi_{i_2j+1}}u_{i_2j+1}+\frac{\partial V_{i_2j}}{\partial\mu_{i_2j}}v_{i_2j}+\frac{\partial V_{i_2j}}{\partial\mu_{i_2j+1}}v_{i_2j+1}\right)+\frac{H^2_{i_2j}}{4\pi}S^{\ell-1}_{i_2j}(u_{i_2j}+$$

$$\left.+u_{i_2j+1})\right\}+\sum_{i=i_1}^{i_2-1}\left\{P^*_{ij+1}\left(\frac{\partial V_{ij+1}}{\partial\xi_{ij+1}}u_{ij+1}+\frac{\partial V_{ij+1}}{\partial\xi_{i+1j+1}}u_{i+1j+1}+\frac{\partial V_{ij+1}}{\partial\mu_{ij+1}}v_{ij+1}+\frac{\partial V_{ij+1}}{\partial\mu_{i+1j+1}}v_{i+1j+1}\right)+\frac{H^2_{ij+1}}{4\pi}\times\right.$$

$$\frac{S^{\ell-1}_{ij+1}}{4}(u_{ij+1}+u_{i+1j+1})+P^*_{ij2}\left(\frac{\partial V_{ij2}}{\partial\xi_{ij2}}u_{ij2}+\frac{\partial V_{ij2}}{\partial\xi_{i+1j2}}u_{i+1j2}+\frac{\partial V_{ij2}}{\partial\mu_{ij2}}v_{ij2}+\frac{\partial V_{ij2}}{\partial\mu_{i+1j2}}v_{i+1j2}\right)+\frac{H^2_{ij2}}{4\pi}\times$$

$$\left.\frac{S^{\ell-1}_{ij2}}{4}(u_{ij2}+u_{i+1j2})\right\}+P^*_{i_1+1j_1}\left(\frac{\partial V_{i_1+1j_1}}{\partial\xi_{i_1j_1}}u_{i_1j_1}+\frac{\partial V_{i_1+1j_1}}{\partial\mu_{i_1j_1}}v_{i_1j_1}\right)+\frac{H^2_{i_1+1j_1}}{4\pi}S^{\ell-1}_{i_1+1j_1}u_{i_1j_1}+$$

$$+P^*_{i_1+1j2}\left(\frac{\partial V_{i_1+1j2}}{\partial\xi_{i_1j2}}u_{i_1j2}+\frac{\partial V_{i_1+1j2}}{\partial\mu_{i_1j2}}v_{i_1j2}\right)+\frac{H^2_{i_1+1j2}}{4\pi}\frac{S^{\ell-1}_{i_1+1j2}}{4}u_{i_1j2}+P^*_{i_2j+1}\left(\frac{\partial V_{i_2j+1}}{\partial\xi_{i_2j1}}u_{i_2j1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V_{i_2j+1}}{\partial\mu_{i_2j1}}v_{i_2j1}\right)+\frac{H^2_{i_2j+1}}{4\pi}S_{i_2j+1}u_{i_2j1}+P^*_{i_2j2}\left(\frac{\partial V_{i_2j2}}{\partial\xi_{i_2j2}}u_{i_2j2}+\frac{\partial V_{i_2j2}}{\partial\mu_{i_2j2}}v_{i_2j2}\right)+$$

$$+\frac{H^2_{i_2j2}}{4\pi}S_{i_2j2}u_{i_2j2}$$

5.а. Уравнение изменения импульса по ξ для $\vec{\omega}'$ в случае $\vec{H}=(H_\xi, H_\mu)$:

$$\frac{d}{dt}\sum_{ij\in\vec{\omega}} M_{ij}u_{ij} - \sum_{(ij)\in\omega} P^*_{ij} = \sum_{i=j1}^{i2-1}\Big\{P^*_{i+1j}\Big(\frac{\partial V_{i+1j}}{\partial\xi_{ij}} + \frac{\partial V_{i+1j}}{\partial\xi_{i+1j+1}}\Big) - \frac{H_{\xi i+1j}}{4\pi}\times$$

$$\Big(\Phi^{i+1j}_{ij} + \Phi^{i+1j}_{i+1j+1}\Big) + P^*_{ij}\Big(\frac{\partial V_{i2j}}{\partial\xi_{i2j}} + \frac{\partial V_{i2j}}{\partial\xi_{i2j+1}}\Big) + \frac{H_{\xi i2j}}{4\pi}\Big(\Phi^{i2j}_{i2j} + \Phi^{i2j}_{i2j+1}\Big)\Big\} + \sum_{i=j1}^{i2-1}\Big\{P^*_{ij+1}\Big(\frac{\partial V_{ij+1}}{\partial\xi_{ij}} + \frac{\partial V_{ij+1}}{\partial\xi_{i+1j+1}}\Big)$$

$$- \frac{H_{\xi ij+1}}{4\pi}\Big(\Phi^{ij+1}_{ij} + \Phi^{ij+1}_{i+1j+1}\Big) + P^*_{ij2}\Big(\frac{\partial V_{ij2}}{\partial\xi_{ij2}} + \frac{\partial V_{ij2}}{\partial\xi_{i+1j2}}\Big) - \frac{H^2_{\xi ij2}}{4\pi}\Big(\Phi^{ij2}_{ij2} + \Phi_{i+1j2}\Big)\Big\} + P^*_{i+1j+1}\frac{\partial V_{i+1j+1}}{\partial\xi_{i+1j+1}}$$

$$+ P^*_{i2j+1}\frac{\partial V_{i2j+1}}{\partial\xi_{i2j+1}} + P^*_{i+1j2}\frac{\partial V_{i+1j2}}{\partial\xi_{i2j+1}} + P^*_{i2j2}\frac{\partial V_{i2j2}}{\partial\xi_{i2j2}} - \frac{H_{\xi i+1j+1}}{4\pi}\Big(\Phi^{i+1j+1}_{ij+1}\Big) - \frac{H_{\xi i+1j2}\Phi^{i+1j2}_{i+1j2}}{4\pi} -$$

$$- \frac{H_{\xi i2j+1}}{4\pi}\Phi^{j+1j2}_{i2j+1} - \frac{H_{\xi i2j2}}{4\pi}\Phi^{i2j2}_{i2j2}$$

где $P^* = P + \frac{\vec{H}^2}{8\pi}$. Уравнение для оси μ записывается аналогично.

5.б. Закон изменения полной энергии:

$$\frac{d}{dt}\Big\{\sum_{(ij)\in\vec{\omega}'} M_{ij}\frac{u^2_{ij}+v^2_{ij}}{2} + \sum_{(ij)\in\omega}\Big(m_{ij}\epsilon_{ij} + \frac{H^2_{ij}}{8\pi}V_{ij}\Big)\Big\} = A^2_{BH}$$

$$A^2_{BH} = \sum_{i=j1}^{i2-1}\Big\{P^*_{ij}\Big(\frac{\partial V_{i+1j}}{\partial\xi_{ij}}u_{ij} + \frac{\partial V_{i+1j}}{\partial\mu_{ij}}v_{ij} + \frac{\partial V_{i+1j}}{\partial\xi_{ij+1}}u_{ij+1} + \frac{\partial V_{i+1j}}{\partial\mu_{ij+1}}v_{ij+1}\Big) - \frac{H_{\xi i+1j}}{4\pi}\times$$

$$\Big(\Phi^{i+1j}_{ij}u_{ij} + \Phi^{i+1j}_{ij+1}v_{ij+1}\Big) - \Big(\Phi^{i+1j}_{i+1j}v_{ij} + \Phi^{i+1j}_{i+1j+1}v_{ij+1}\Big)\frac{H_{\mu i+1j}}{4\pi} + P^*_{i2j}\Big(\frac{\partial V_{i2j}}{\partial\xi_{i2j}}u_{i2j} + \frac{\partial V_{i2j}}{\partial\xi_{i2j+1}}u_{i2j+1} +$$

$$+ \frac{\partial V_{i2j}}{\partial\xi_{i2j}}v_{i2j} + \frac{\partial V_{i2j}}{\partial\mu_{i2j+1}}v_{i2j+1}\Big) - \frac{\vec{H}_{i2j}}{4\pi}\Big(\Phi^{i2j}_{i2j}\vec{V}_{i2j} + \Phi^{i2j}_{i2j}\vec{V}_{i2j}\Big) +$$

$$\sum_{i=j1}^{i2-1}\Big\{P^*_{ij+1}\Big(\frac{\partial V_{ij+1}}{\partial\xi_{ij+1}}u_{ij+1} + \frac{\partial V_{ij+1}}{\partial\mu_{ij+1}}v_{ij+1} + \frac{\partial V_{ij+1}}{\partial\xi_{i+1j+1}}u_{i+1j+1} + \frac{\partial V_{ij+1}}{\partial\mu_{i+1j+1}}v_{i+1j+1}\Big) - \frac{\vec{H}_{ij+1}}{4\pi}\Big(\Phi^{ij+1}_{ij+1}\vec{V}_{ij+1} + \Phi^{ij+1}_{i+1j+1}\vec{V}_{i+1j+1}\Big)$$

$$P^*_{ij2}\Big(\frac{\partial V_{ij2}}{\partial\xi_{ij2}}u_{ij2} + \frac{\partial V_{ij2}}{\partial\mu_{ij2}}v_{ij2} + \frac{\partial V_{ij2}}{\partial\xi_{i+1j2}}u_{i+1j2} + \frac{\partial V_{ij2}}{\partial\mu_{i+1j2}}v_{i+1j2}\Big) - \frac{\vec{H}_{ij2}}{4\pi}\Big(\Phi^{ij2}_{ij2}\vec{V}_{ij2} + \Phi^{ij2}_{ij2}\vec{V}_{i+1j2}\Big)\Big\}$$

$$+ P^*_{i2j+1}\Big(\frac{\partial V_{i2j+1}}{\partial\xi_{i2j+1}}u_{i2j+1} + \frac{\partial V_{i2j+1}}{\partial\mu_{i2j+1}}v_{i2j+1}\Big) + P^*_{i+1j+1}\Big(\frac{\partial V_{i+1j+1}}{\partial\xi_{i+1j+1}}u_{i+1j+1} + \frac{\partial V_{i+1j+1}}{\partial\mu_{i+1j+1}}v_{i+1j+1}\Big) + P^*_{i+1j2}\Big(\frac{\partial V_{i+1j2}}{\partial\xi_{i+1j2}}\times$$

$$\times u_{i+1j2} + \frac{\partial V_{i+1j2}}{\partial\mu_{i+1j2}}v_{i+1j2}\Big) + P^*_{i2j2}\Big(\frac{\partial V_{i2j2}}{\partial\xi_{i2j2}}u_{i2j2} + \frac{\partial V}{\partial\mu_{i2j2}}v_{i2j2}\Big) - \frac{\vec{H}_{i+1j+1}}{4\pi}\Big(\Phi^{i+1j+1}_{i+1j+1}\vec{V}_{i+1j+1} + \Phi^{i+1j+1}_{i+1j+1}\vec{V}\Big)$$

$$- \frac{\vec{H}_{i+1j2}}{4\pi}\Phi^{i+1j2}_{i+1j2}\vec{V}_{i+1j2} - \frac{\vec{H}_{i2j+1}}{4\pi}\Phi^{i+1j2}_{i+1j2}\vec{V}_{i+1j2} - \frac{\vec{H}_{i2j2}}{4\pi}\Phi^{i2j2}_{i2j2}\vec{V}_{i2j2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Вариационный метод построения разностных схем магнитной гидродинамики. Препринт ИПМ АН СССР №65, 1976.
2. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Об аппроксимации двумерных вариационно-разностных уравнений гидродинамики. Препринт ИПМ АН СССР №34 1977.
3. Головизнин В.М., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Вариационный подход к построению разностных схем газодинамики в сферических координатах. Препринт ИПМ АН СССР №16 1977.
4. Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы магнитной гидродинамики. ЖВМ и МФ, 9, №4, 1969.
5. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Об искусственной вязкости и устойчивости разностных схем гидродинамики. Препринт ИПМ АН СССР №70, 1976.
6. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. Мир, Москва, 1964.
7. Seleger R.L., Whitham G.B. Variational principles in continum mechanics. Proceed. Roy. Soc. A-305, 1-25, 1968.
8. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. Наука, 1972, Москва.
9. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. Москва, 1962.