ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

А.Н.Тихонов А.А.Самарский Л.А.Заклязьминский
П.П.Волосевич Д.А.Гольдина Л.М.Дегтярев
С.П.Курдюмов Ю.П.Попов В.Н.Равинская
В.С.Соколов А.П.Фаворский

ЭФФЕКТ Т-СЛОЯ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Москва 1969год

Аннотация

В работе дается обзор результатов, связанных с исследованием эффекта Т-слоя в плазме. Показано, что при нестационарном движении в магнитном поле сжимаемой среды, электропроводность которой увеличивается с повышением температуры, в ней может образовываться самоподдерживающийся, высокотемпературный, электропроводный слой (Т-слой), приводящий к резкому увеличению эффективности взаимодействия среды с магнитным полем. Образование Т-олоя обусловлено существованием обратных нелинейных связей между электро- и газодинамическими величинами и происходит в том месте среды и в тот момент, когда параметр гидромагнитного взаимодействия становится по порядку величины равным единице.

Методом исследования является анализ автомодельных решений и результатов расчетов на ЭВЦМ ряда одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики с учетом нелинейной теплопроводности и электропроводности.

Введение

В настоящей работе дается последовательное изложение цикла теоретических исследований, которые привели к обнаружению физического эффекта в магнитной гидродинамике, названного Т-слоем.

Исследования проводились с целью изучения взаимодействия движущейся плазмы с магнитным полем.

В теоретическом отношении изучение особенностей поведения плотной плазмы в магнитном поле может быть проведено в ряде случаев в рамках магнитогидродинамического приближения.

Однако система уравнений магнитной гидродинамики с учетом диссипативных процессов (конечная проводимость, теплопроводность и т.д.) весьма сложна из-за нелинейности самих уравнений и нелинейной зависимости коэффициентов переноса от термодинамического состояния среды. Поэтому постановка задач магнитной гидродинамики и их математических анализ связан с определенными трудностями. Различные приближенные и аналитические методы, как правило, дают возможность построить решение лишь в некоторых предельных случаях при дополнительных упрощающих предположениях. В общем случае при анализе нелинейных процессов эти методы оказываются мало эффективными.

В силу этого особое значение приобретают численные методы решения таких задач на ЭВМ.

Было бы неправильно рассматривать ЭВМ лишь как способ ускорения громоздких вычислений. Быстродействующие электронные вычислительные машины в сочетании с современными численными методами поднимают теоретические исследования физических процессов и явлений на более высокий уровень. Они позволяют рассматривать но-

вые сложные задачи, недоступные для теоретического анализа другими средствами. По аналогии с экспериментом физическим можно говорить о своеобразном "вычислительном эксперименте", основанном на расчетах с помощью ЭВМ. Естественно, такой "вычислительный эксперимент" ограничен рамками принятой физической модели, выраженной соответствующей системой уравнений.

Иллюстрацией высказанных соображений может служить эффект Т-слоя (температурного слоя) в магнитной гидродинамике, обнаруженный путем чисто теоретических исследований с использованием ЭВМ [1-3].

Т-слой представляет собой высокотемпературное самоподдерживающееся образование, связанное с фиксированными частицами среды. Он возникает и развивается в плазме при определенных условиях в процессе ее взаимодействия с магнитным полем. Появление Т-слоя, как показывают расчеты, в ряде случаев может привести к коренной перестройке первоначальной картины течения плазмы. Возникновение и самоподдержание Т-слоя обусловлено наличием нелинейных связей между электро- и газодинамическими процессами и происходит вследствие преимущественного выделения джоулева тепла в некоторой массе газа.

В настоящее время известен ряд работ [4-6], в которых авторы при исследовании некоторых магнитогидродинамических задач встречались с локальным повышением температуры в плазме, вызванным джоулевым нагревом.

В работе [4] изучалась задача магнитной кумуляции. Показано, что при обжатии взрывом полого медного цилиндра с магнитным полем на внутренней поверхности цилиндра образуется область паров меди, нагретых до высокой температуры. Эта область играет

определяющую роль для удержания поля на поздних стадиях процесса кумуляции.

В работе [5] исследован скин-слой в несжимаемой жидкости при учете электропроводности и теплопроводности, зависящих от температуры. Показано, что на границе проводника, движущегося с постоянной скоростью в магнитном поле, возникает зона повышенной температуры. Это ухудшает проникновение магнитного поля в вещество и приводит к сокращению эффективной толщины скин-слоя. Однако результаты, содержащиеся в [5], не дают основания утверждать, что подобное явление будет иметь место в сжимаемой среде.

В работе [6] развита магнитогидродинамическая теория пинч-эффекта в двухтемпературном приближении. По мере развития процесса сжатия столба плазмы на ее границе появляется пик температуры, ширина которого сокращается со временем.

В работах [4–6] повышение температуры всегда отмечалось на границе плазмы с магнитным полем. Авторы указанных работ рассматривали это явление как нелинейный скин-эффект.

В силу специфики задач (несжимаемость среды в [5], высокая начальная электропроводность плазмы в [6], рассмотрение лишь стадии сжатия в [4], [6]) в них не могли быть установлены характерные свойства Т-слоя, определяющие его как самостоятельный физический эффект.

Вывод о существовании Т-слоя как самостоятельного физического явления был сделан в 1965 году на основе анализа расчетов на ЭВМ задач различных типов [1–3].

Основную роль при обнаружении и исследовании Т-слоя сыграли численные методы расчета задач на ЭВМ, которые разработаны в

ИПМ АН СССР под руководством А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [8-II].

При численном решении система одномерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики аппроксимируется неявными однородными разностными схемами. Для обеспечения сквозного счета течений с ударными волнами использовалась искусственная вязкость [I2]. Предусмотрена возможность решения задач при различных граничных условиях и произвольных уравнениях состояния вещества. Учитывается также, что среда может состоять из нескольких областей с различными сильно меняющимися физическими свойствами. Метод расчета проверялся на аналитических и автомодельных решениях [I3-I6]. Отдельные методические вопросы, возникающие при решении конкретных задач, обсуждаются в соответствующих главах.

Физическая и математическая постановка задач, анализ результатов, а также построение аналитических решений производилось совместно сотрудниками ИПМ АН СССР и ИТПМ СО АН СССР.

Первая попытка экспериментального обнаружения Т-слоя была предпринята в ИТПМ СО АН СССР [7]. В главе IУ описаны некоторые результаты этого эксперимента и проведено качественное сравнение экспериментальных данных с результатами расчетов на ЭВМ.

Работа содержит четыре главы.

В I гл ве рассматривается процесс расширения цилиндрического столба плазмы в магнитном поле. Показано, что при определенных условиях происходит локализация джоулева тепла в некоторой массе газа. Следствием этого является образование высокотемпературного электропроводного слоя газа (Т-слоя). На основании про-

веденных расчетов дается качественное объяснение механизма его образования.

В главе П изучаются свойства Т-слоя на основе анализа автомодельных решений двух задач. В первой задаче рассматривается движение электропроводного газа между двумя поршнями. Во второй - разлет плазмы в вакуум при сильноточном разряде с заданным режимом полного тока. Автомодельные решения сопоставляются с расчетами соответствующей системы уравнений в частных производных.

В главе Ш изучается возможность образования Т-слоя путем искусственного создания необходимых условий (индуцированный Т-слой). Для этого в стационарный сверхзвуковой поток слабопроводящего газа вносится локальное конечное возмущение электропроводности.

Сформулирован критерий развития вносимого возмущения в Т-слой и отмечена зависимость условий возникновения Т-слоя от характера течения.

В главе IУ рассматривается задача о падении ударной волны на "магнитную стенку". Эта задача представляет еще один тип магнитогидродинамических течений, в которых возникает Т-слой. В частности, такого рода течение было использовано в первой попытке экспериментального обнаружения Т-слоя.

Показано, что динамика процессов, происходящих при "ударе" волны о магнитное поле, существенным образом зависит от особенностей закона изменения проводимости среды с температурой $\sigma = \sigma(T, \rho)$, а также от величины напряженности магнитного поля.

Основные результаты по теоретическому исследованию свойств Т-слоя, условий его возникновения и т.д. докладывались на семи-

наре, руководимом академиком И.К. Кикоиным в ИАЭ им. Курчатова (1965 г.), на семинаре, руководимом академиком М.В. Келдышем в ИПМ АН СССР (1967 г.), на семинаре, руководимом чл.-корр. АН СССР Е.П. Велиховым в ИАЭ им. Курчатова (1968 г.), на Ш Всесоюзном съезде по механике (г. Москва, 1968 г.), на Ш Всесоюзном совещании по тепломассообмену (г. Минск, 1968 г.), на семинаре по магнитной гидродинамике, руководимом Г.А. Любимовым в НИИ механики МГУ (1968 г.), на П Всесоюзной конференции по низкотемпературной плазме (г. Минск, 1968 г.).

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Н.Г.Басова, Я.Б. Зельдовича, И.К. Кикоина, М.Д. Миллионщикова, С.А. Христиановича, Е.П. Велихова, А.Е. Шейндлина, В.А. Дмитриевского, О.Н. Крохина, Г.А. Любимова, И.В. Немчинова, В.Б. Розанова и других товарищей, принявших участие в обсуждениях.

Авторы благодарны А.А. Иванову за создание ряда программ для решения автомодельных задач и проведение большой серии численных расчетов на ЭВМ.

Авторы признательны А.М. Захаровой, Л.И. Лукьяновой, Н.И. Тепловой, Н.П. Марецкой, В.М. Марченко и Т.А. Кашеваровой, проделавшим большую работу по обработке результатов.

Глава I.

РАСШИРЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ I. Введение

В настоящей главе рассмотрен процесс расширения цилиндрического столба электропроводного газа (плазмы) в магнитном поле из некоторого начального состояния. Выбор задачи был обусловлен простотой и наглядностью ее постановки. Исследование процесса проводилось на основе численных расчетов и последовательного анализа ряда конкретных вариантов, часть которых описана ниже. В качестве параметров варьировались отношение начальных значений магнитного и газового давлений, магнитное число Рейнольдса, а также начальное пространственное распределение температуры, магнитного поля, скорости и т.д. Менялись, кроме того, термодинамические (газовая постоянная, коэффициент теплопроводности) и электрофизические (зависимость электропроводности от температуры и плотности) свойства газа.

Ожидалось, что расширение плазменного цилиндра в вакуум, заполненный магнитным полем, должно сопровождаться охлаждением газа, уменьшением его электропроводности и асимптотическим выходом на известный в газодинамике режим истечения газа в вакуум.

В действительности процесс может перестроиться и стать качественно иным, вследствие нестационарного взаимодействия движущейся плазмы с магнитным полем.

Оказывается, что при определенных условиях происходит локализация джоулева тепла в некоторой массе газа. Это приводит к образованию в ней высокотемпературного, электропроводного слоя газа, названного Т-слоем.

На основании произведенных расчетов дается качественное объяснение механизма развития Т-слоя. Изучены основные закономерности и следствия, к которым приводит перестройка процесса, связанная с появлением Т-слоя. Важнейшим из этих следствий является существенное усиление эффективности взаимодействия относительно холодного газа с магнитным полем благодаря наличию своеобразного "электропроводного поршня", роль которого играет Т-слой.

§ 2. Система уравнений магнитной гидродинамики

Рассматривается модель проводящей жидкости при следующих предположениях:

1. Электронная, ионная и нейтральная компоненты среды находятся в термодинамическом равновесии, т.е. рассматривается одножидкостная магнитная гидродинамика.

2. Анизотропная проводимость отсутствует, т.е. циклотронный радиус значительно превосходит длину свободного пробега электрона.

3. Характерное время процесса достаточно велико, так что можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости.

4. Физическая вязкость не учитывается.

5. Процессы теплопереноса учитываются в приближении нели-

нейной теплопроводности.

При сформулированных предположениях система уравнений магнитной гидродинамики в абсолютной гауссовой системе единиц в лагранжевых массовых переменных имеет вид:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = v$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(z^{\nu-1} v\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -z^{\nu-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{H_z^2}{8\pi}\right) - \frac{1}{z^{\nu-1}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\left(z^{\nu-1}H_\varphi\right)^2}{8\pi}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -H_z \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(z^{\nu-1} v\right) + \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho z^{2(\nu-1)} \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = -H_\varphi z^{\nu-1}\rho \frac{\partial v}{\partial x} + \rho z^{\nu-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(z^{\nu-1}H_\varphi\right)\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad E = \varepsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{H_z^2 + H_\varphi^2}{8\pi\rho} \qquad (1.1)$$

$$q = z^{\nu-1} v\left(p + \frac{H_z^2 + H_\varphi^2}{8\pi}\right) - \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\rho z^{\nu-1}\left[H_z z^{\nu-1}\frac{\partial H_z}{\partial x} + H_\varphi \frac{\partial}{\partial x}\left(z^{\nu-1}H_\varphi\right)\right] + W$$

$$W = -\varkappa z^{2(\nu-1)}\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$p = \rho R T, \quad \varepsilon = c_v T$$

$$\sigma = \sigma(T, \rho), \quad \varkappa = \varkappa(T, \rho)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

t - время,

r - эйлерова координата,

x - массовая координата,

v - радиальная компонента скорости,

ρ - плотность,

p - статическое давление,

ε - внутренняя энергия,

R - газовая постоянная,

c_v - удельная теплоемкость при постоянном объеме,

H_z, H_φ - компоненты магнитного поля,

W - поток тепла,

c - скорость света,

$\varkappa(\rho, T)$ - коэффициент теплопроводности,

$\sigma(\rho, T)$ - коэффициент электропроводности.

Используемая в дальнейшем зависимость электропроводности σ от плотности и температуры основана на известном представлении [17]. Предполагается, что удельное сопротивление складывается из двух членов:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_{en}} + \frac{1}{\sigma_{ei}} \qquad (I.2)$$

Первый член в формуле (I.2) обусловлен столкновениями электронов с нейтральными атомами (близкое взаимодействие). Второй член возникает из-за столкновений электронов с ионами (дальнее взаимодействие). В ряде случаев мы ограничимся следующим конкретным видом формулы (I.2)

$$\sigma = \sigma_0 \left\{ a \cdot \rho^{\kappa_1} / T^{\kappa_0} + b \cdot \rho^{\kappa_2} / T^{3/2} \right\}^{-1}$$

где $a, b, \kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$ - заданные постоянные.

§3. Постановка задачи

Пусть в начальный момент времени $t=0$ плазма заполняет бесконечно длинный цилиндр радиуса $r_к$, который находится в вакууме или в незлектропроводном газе (фиг. I). Магнитное поле, силовые линии которого параллельны оси цилиндра, раопределено по радиусу, а вне плазмы оно постоянно и его напряженность равна H_{z_0}. Давление плазмы P_0 постоянно по пространству и превышает полное давление в окружающей среде, которое складывается из материального давления P^* (для вакуума $P^*=0$) и магнитного давления $g^* = H_0^2/8\pi$. Вследствие этого при $t>0$ начинается процесс расширения электропроводного газа, который описывается уравнениями магнитной гидродинамики (I.I).

Краевые условия для этих уравнений при $r=0$ следуют из условия симметрии задачи

$$v=0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial r}=0$$

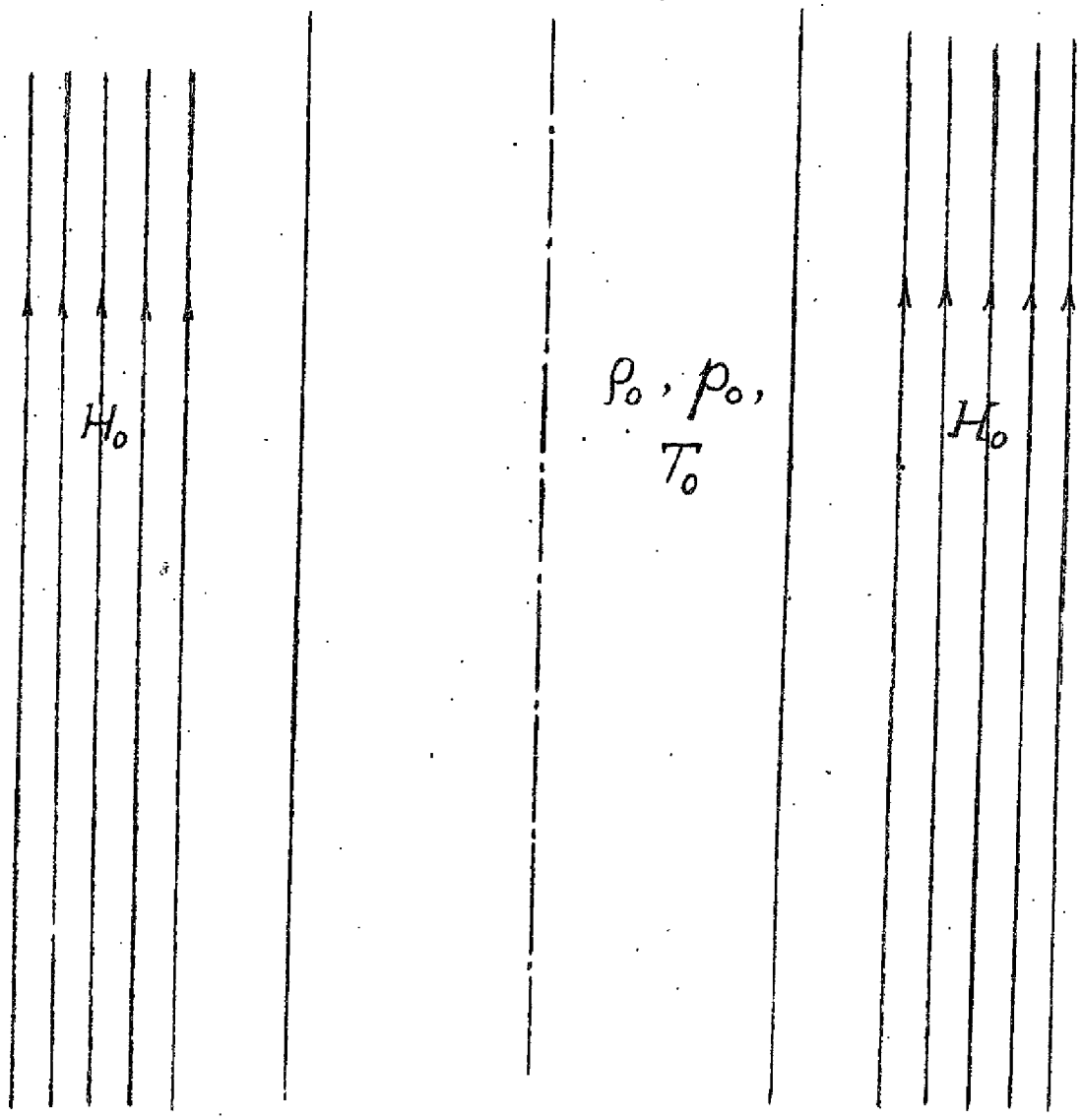
На внешней границе плазмы поддерживается заданное давление $P=P^*$ или скорость $v=v^*$. Значение магнитного поля H_z^* вне плазмы и на ее внешней границе также поддерживается постоянным или является заданной функцией времени

$$H_z^* = H_0(t)$$

В случае наличия теплопереноса при $r=0$ имеет место условие симметрии $W=0$, а на внешней границе задается температура T^*.

Начальные значения температуры и скорости в общем случае предполагались распределенными по радиусу. В ряде задач газ считался идеальным с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$.

Анализ результатов численных расчетов проводился по харак-



ФИГ. 1

теру распределения параметров в газе на различные моменты времени, а также по интегральным характеристикам процесса. Во всех задачах на каждый момент времени определялись полный и электрический коэффициенты полезного действия

$$\eta = \frac{E_0 - E_t}{E_0}$$

$$\eta_{эл} = \frac{E_0 - E_t}{E_0 - E_t + Q_{дж}} \qquad (I.3)$$

где

$$E_t = \int_0^{x_0} \left(c_p \cdot T + \frac{v^2}{2}\right) dx$$

полная энергия всей массы газа x_0 на момент времени t и E_0 – её значение в момент $t=0$,

$$Q_{дж} = \int_0^t \int_0^{x_0} \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 \cdot dx \cdot dt$$

джоулево тепло, выделенное во всей массе газа за время t .

Разность $E_0 - E_t$ представляет собой полезную работу, совершаемую в процессе расширения электропроводного газа в магнитном поле. Если эта величина положительна, то энергию отдает газ, если же она отрицательна, то газ получает энергию от магнитного поля.

Значение η характеризует величину энергии, отданной внешнему магнитному полю. Электрический к.п.д., как следует из его определения, характеризует степень изэнтропичности процесса.

Более выгодным с точки зрения преобразования энергии является такой процесс, в котором доля $Q_{дж}$ мала по отношению к изменению $E_0 - E_t$, так как джоулево тепло приводит к увеличению полной энергии газа E_t , то-есть к уменьшению η и $\eta_{эл}$.

§ 4. Результаты расчетов

Рассмотрим ряд типичных примеров расчетов, позволяющих достаточно полно выявить характерные особенности изучаемого процесса.

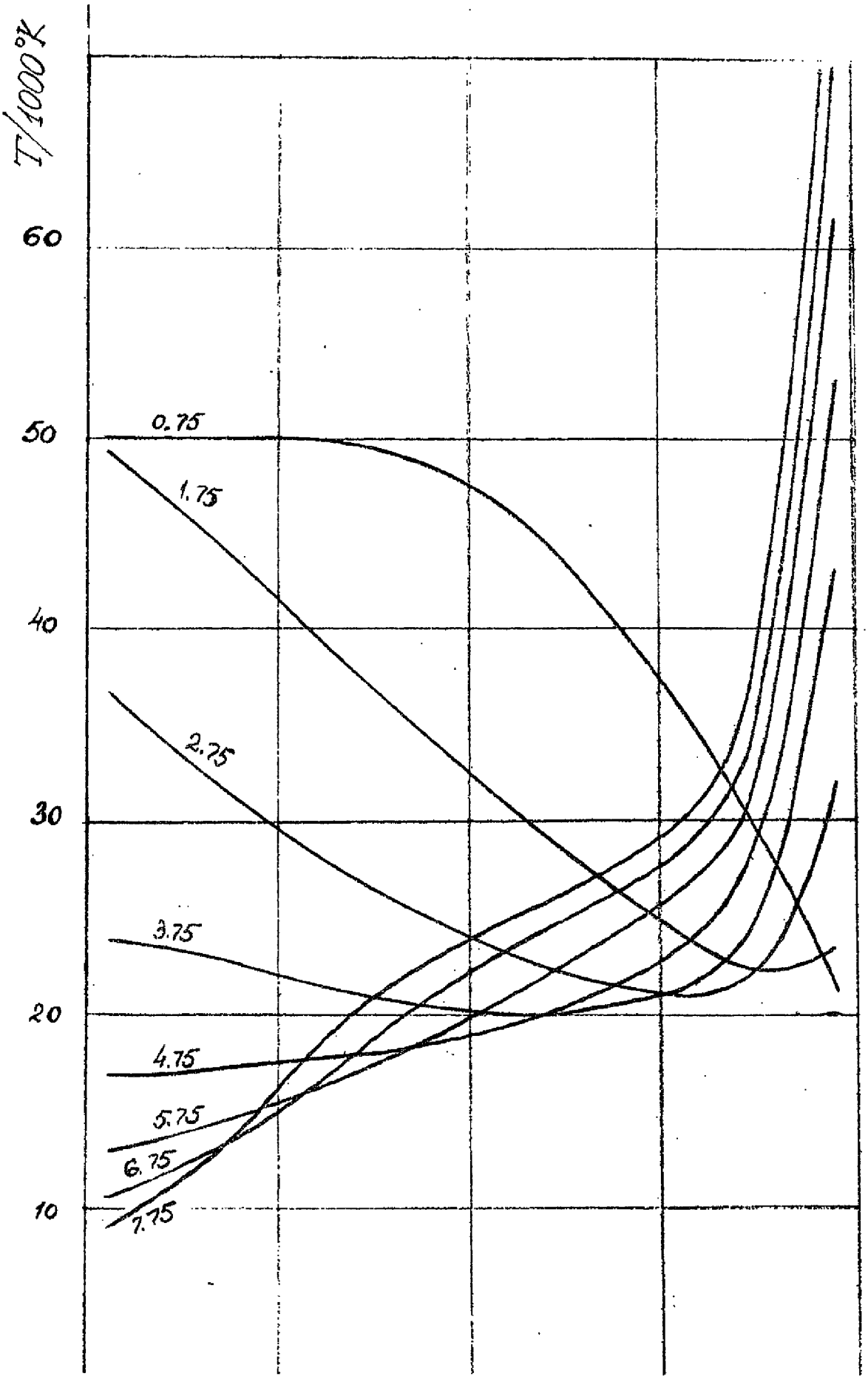
I. Пусть плазменный цилиндр помещен в вакуум. В начальный момент времени температура и давление электропроводного газа постоянны по массе и равны соответственно $T = 5 \cdot 10^4$ °К и $\rho_0 = 50$ атм. Внешний радиус $r_k = 1.58$ м, скорость газа равна нулю, магнитное поле заполняет все пространство и равно $1{,}6 \cdot 10^4$ эрстед. Это же значение поля используется в качестве краевого условия. Электропроводность, задаваемая формулой

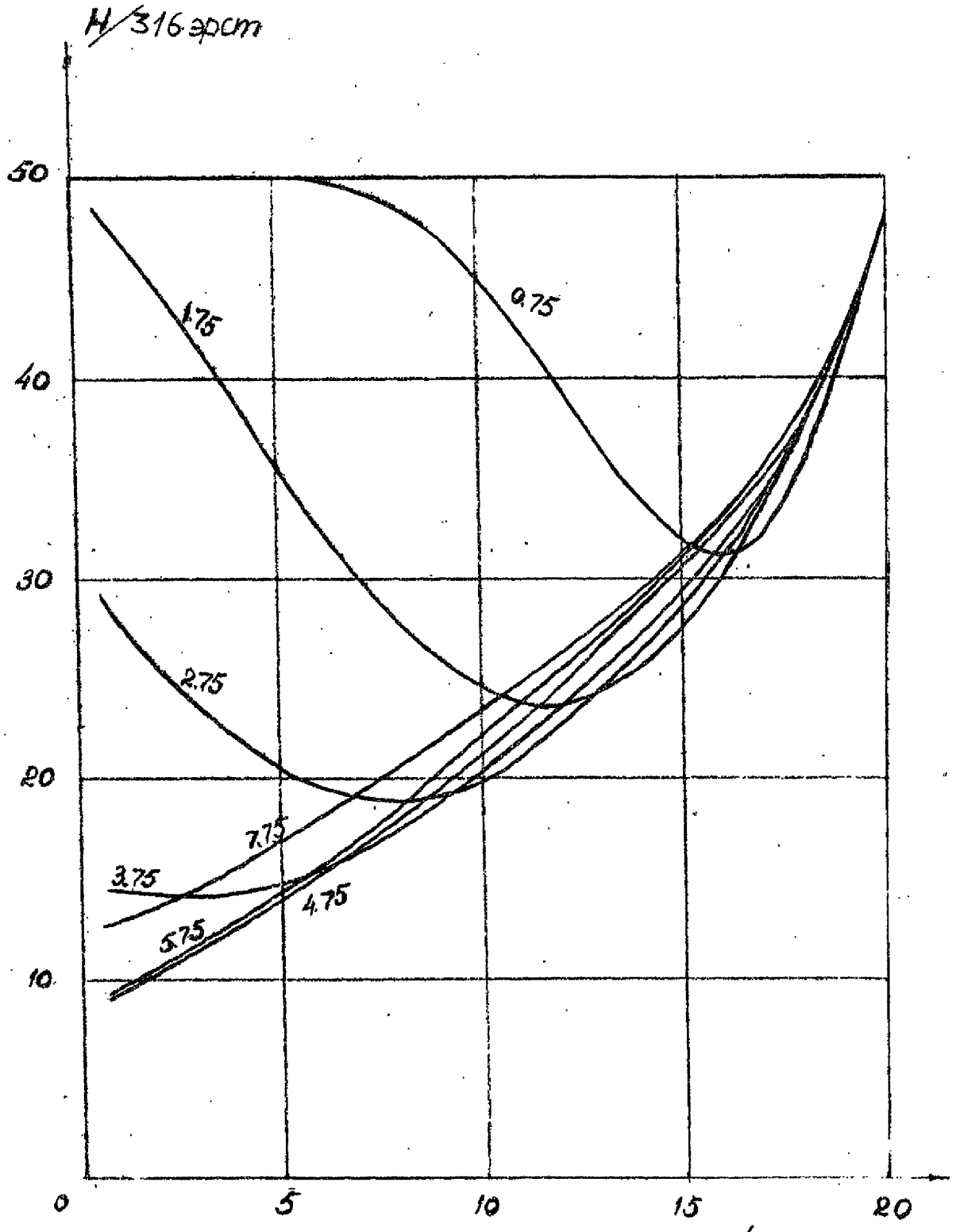
$$\sigma = \sigma_0 T^{3/2} \rho^{-1}$$

в начальный момент времени равна 30 $\frac{\text{мо}}{\text{см}}$. Теплопроводность отсутствует.

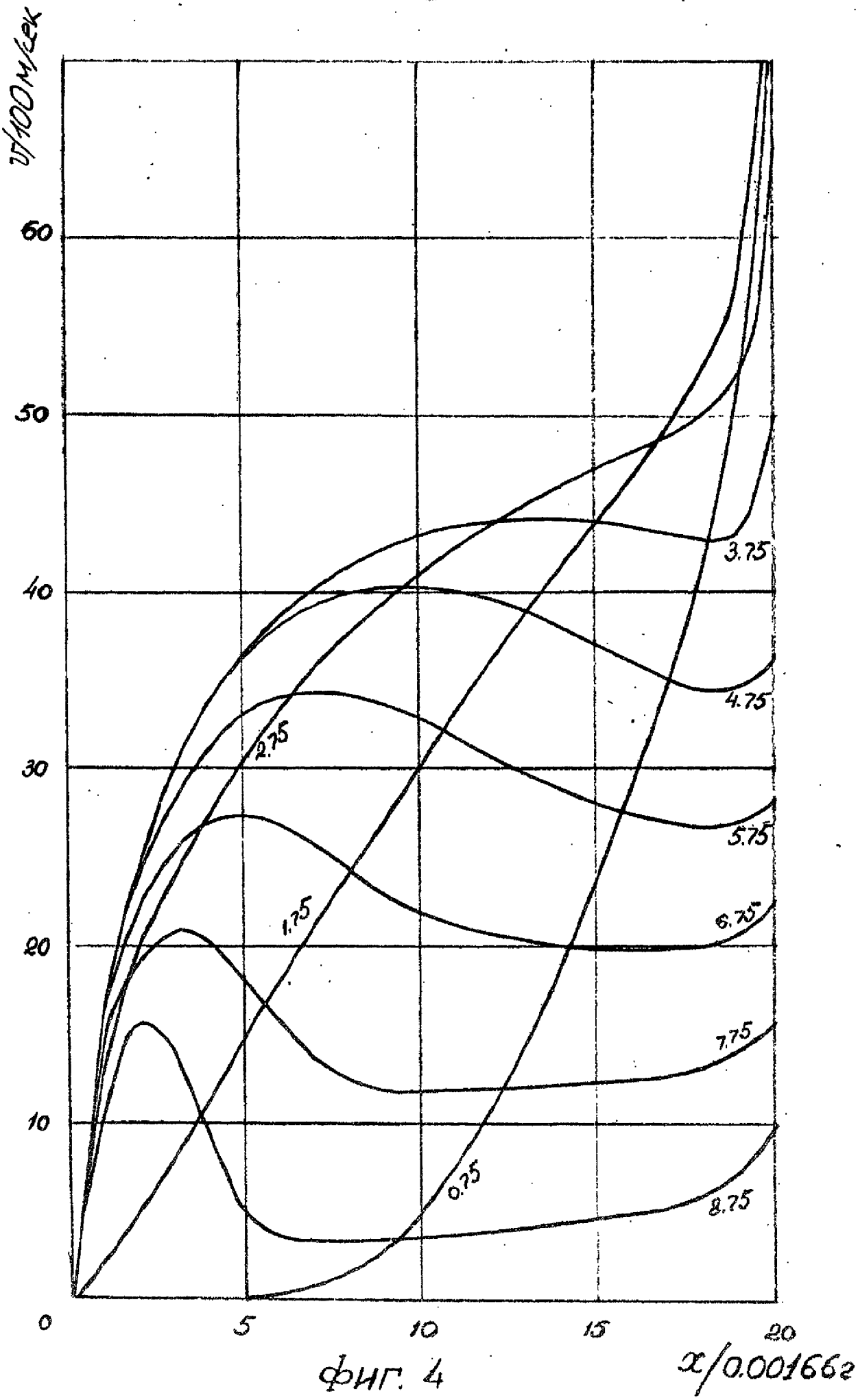
На фиг. 2-5 представлены последовательные стадии развития процесса во времени на примере функций $T(x,t)$, $H(x,t)$, $v(x,t)$ и $r(x$ т.е. даны распределения профилей величин по массе газа на разные моменты времени. В качестве масштаба времени выбрано значение $t_0 = 10^{-2}$ сек. Вначале процесса внешняя граница цилиндрического столба, не испытывая сопротивления (r_0 t $H=0$, $p=0$) ускоряется, а прилегающие к ней слои газа расширяются и охлаждаются. Движение газа приводит к появлению в нем индуцированных токов, а также к понижению напряженности магнитного поля в объеме, занятом газом.

Максимальные токи текут во внешних слоях газа, электропроводность которых ниже, чем в остальной части из-за начального охлаждения. Это вызывает наиболее интенсивное выделение джоуле-

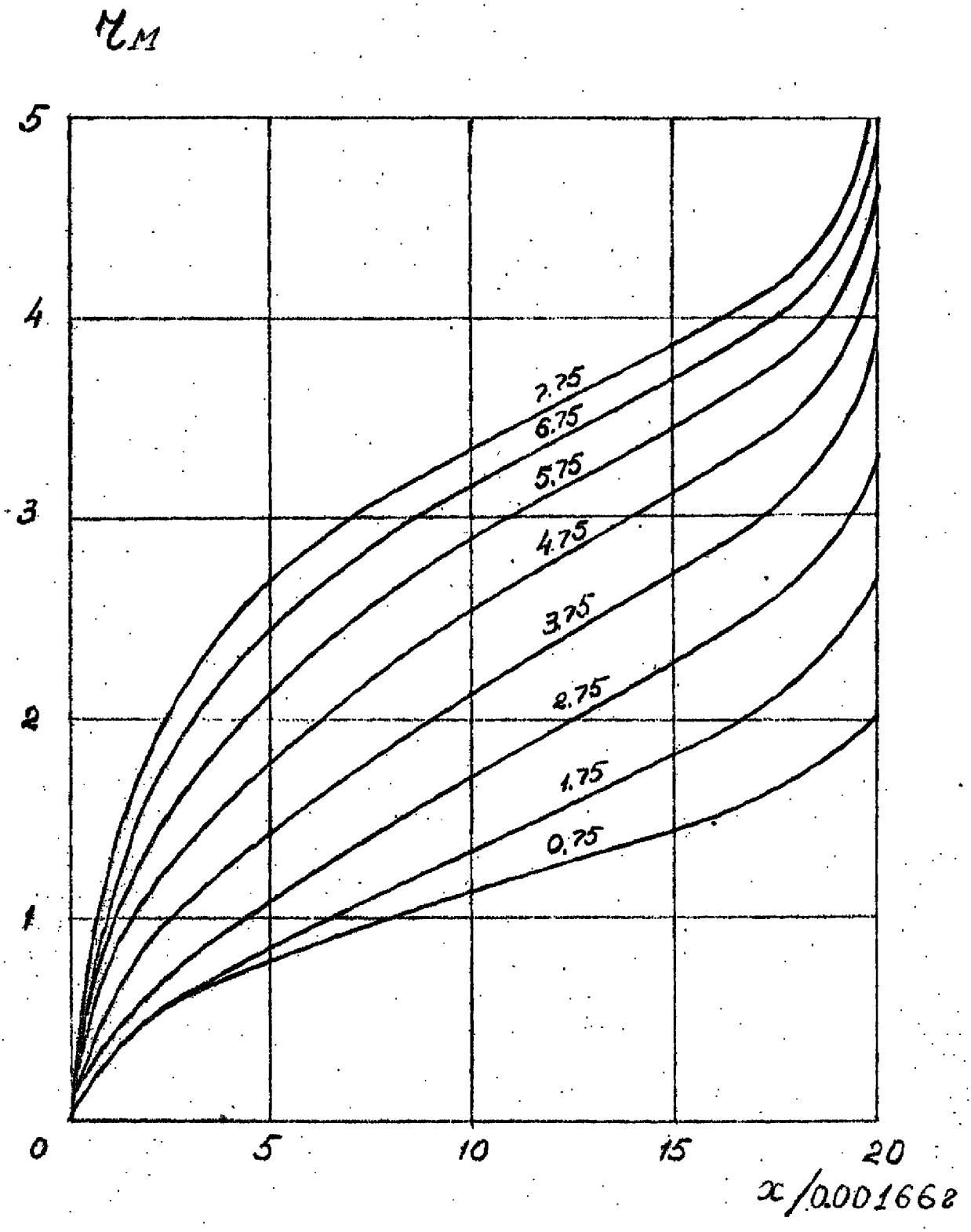

T/1000°K
60
50
40
30
20
10
0.75
1.75
2.75
3.75
4.75
5.75
6.75
7.75


Н/316 эрст
50
40
30
20
10
0
5
10
15
20
1.75
0.75
2.75
7.75
3.75
4.75
5.75
см/0.00166 г

ФИГ. 3


v/100м/сек
60
50
40
30
20
10
0
5
10
15
20
x/0.00166г
0.75
1.75
2.75
3.75
4.75
5.75
6.75
7.75
8.75

фиг. 4

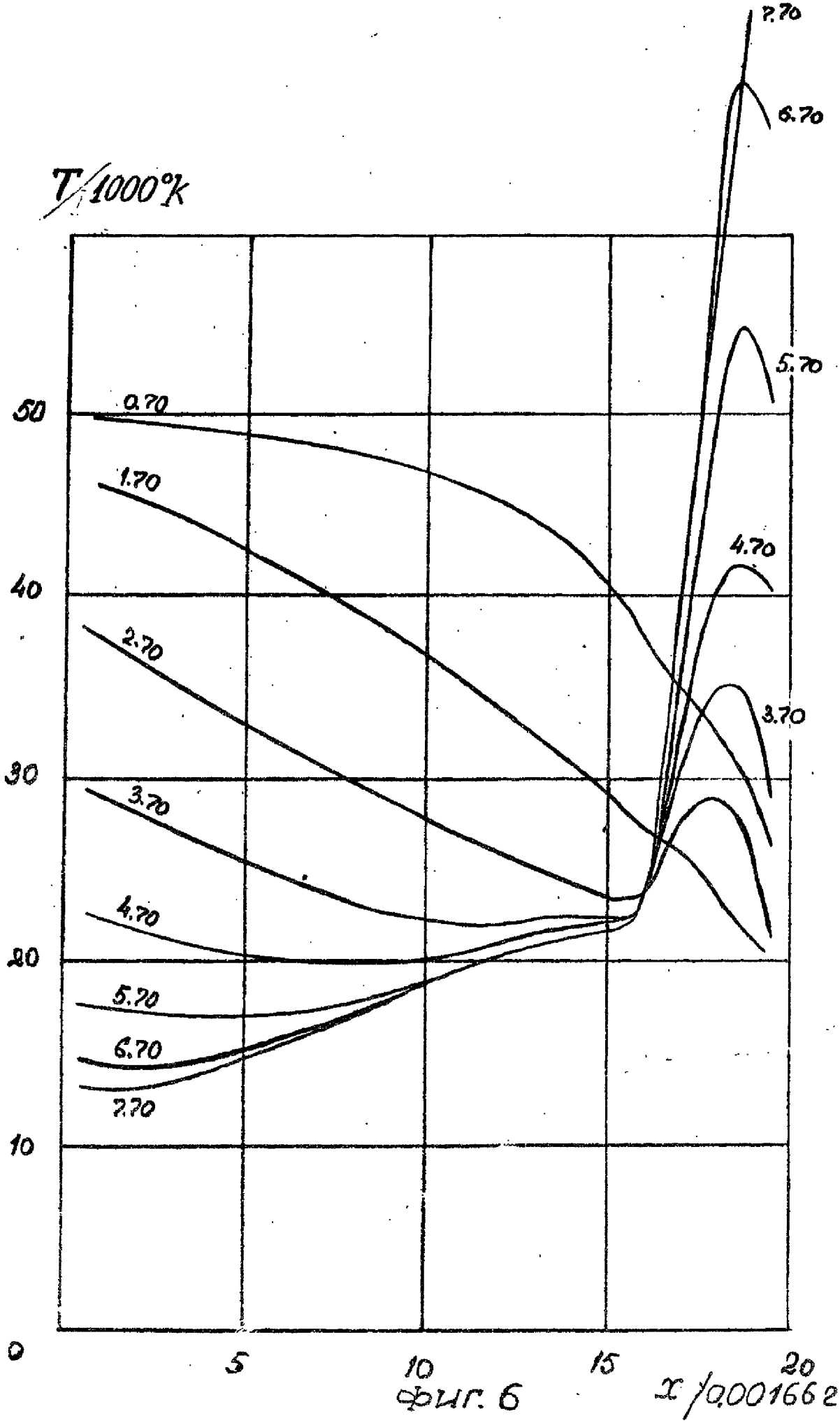


Фиг. 5

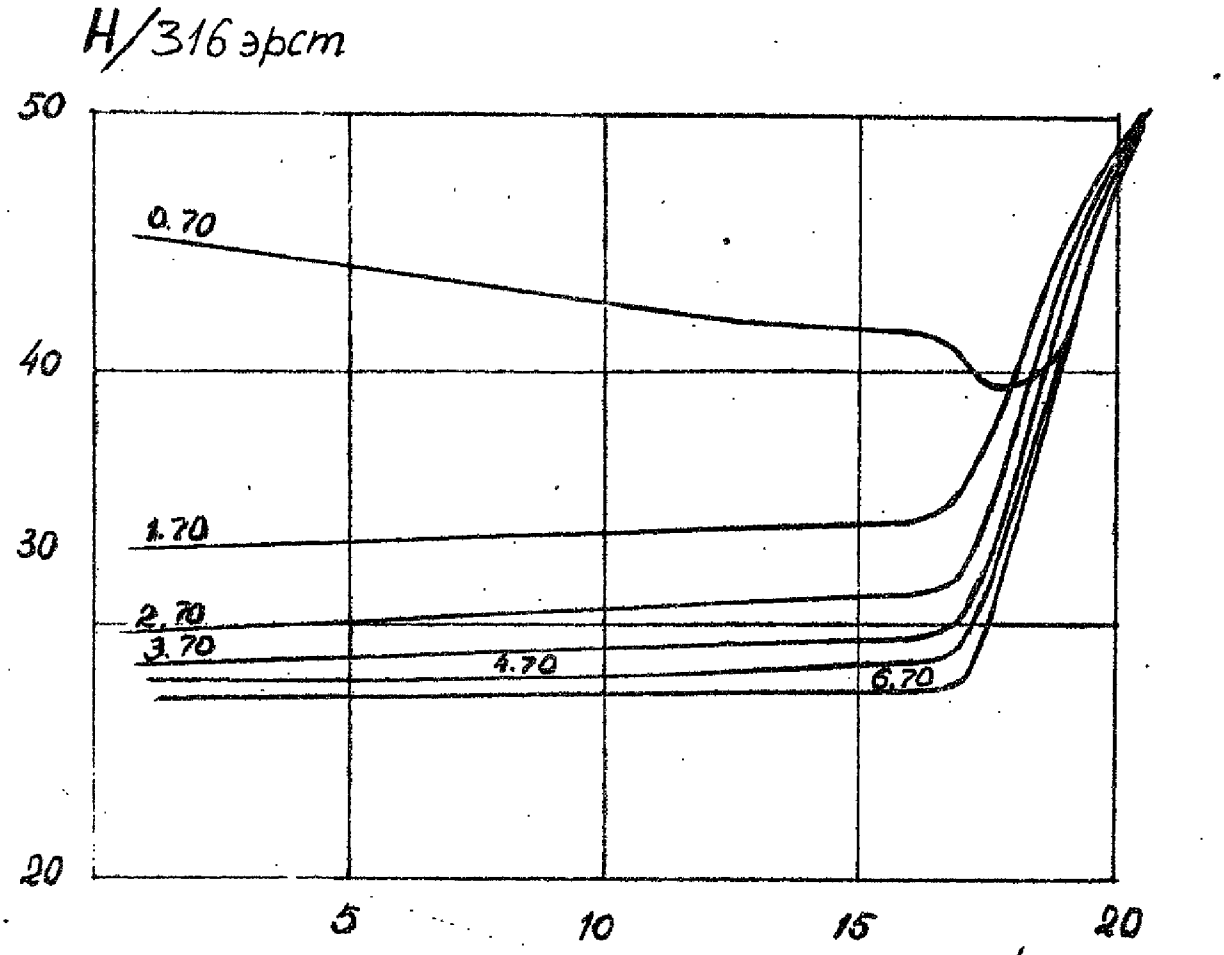
ва тепла во внешних слоях газа, следствием чего является перестройка всего процесса. Начиная с некоторого момента времени (t = 0,0175 сек), понижение температуры граничной массы газа прокращается и начинается ее рост, в то время как температура основной массы газа продолжает уменьшаться. По мере расширения газа наступает такой момент, когда лоренцова сила $\frac{1}{c}[\vec{j}\times\vec{H}]$ вблизи внешней границы начинает превосходить силу, обусловленную градиентом давления газа. Вследствие этого внешние слои газа начинают тормозиться и разогреваться вследствие интенсивного выделения джоулева тепла. Торможение приводит к появлению волны сжатия, распространяющейся к оси цилиндра.

Таким образом, процесс расширения электропроводного газа в магнитном поле можно разделить на две стадии. В первой стадии преобладает расширение газа и, как следствие, его охлаждение. Во второй - индуцированные электрические токи приводят к локальному разогреву газа, повышению его температуры и электропроводности вблизи границы, где эти токи максимальны, и к усилению взаимодействия плазмы с магнитным полем. На основании отмеченных свойств процесса расширения можно предположить, что на второй стадии эффективность взаимодействия проводящего газа с магнитным полем обеспечивается в основном высокой электропроводностью наружного высокотемпературного слоя.

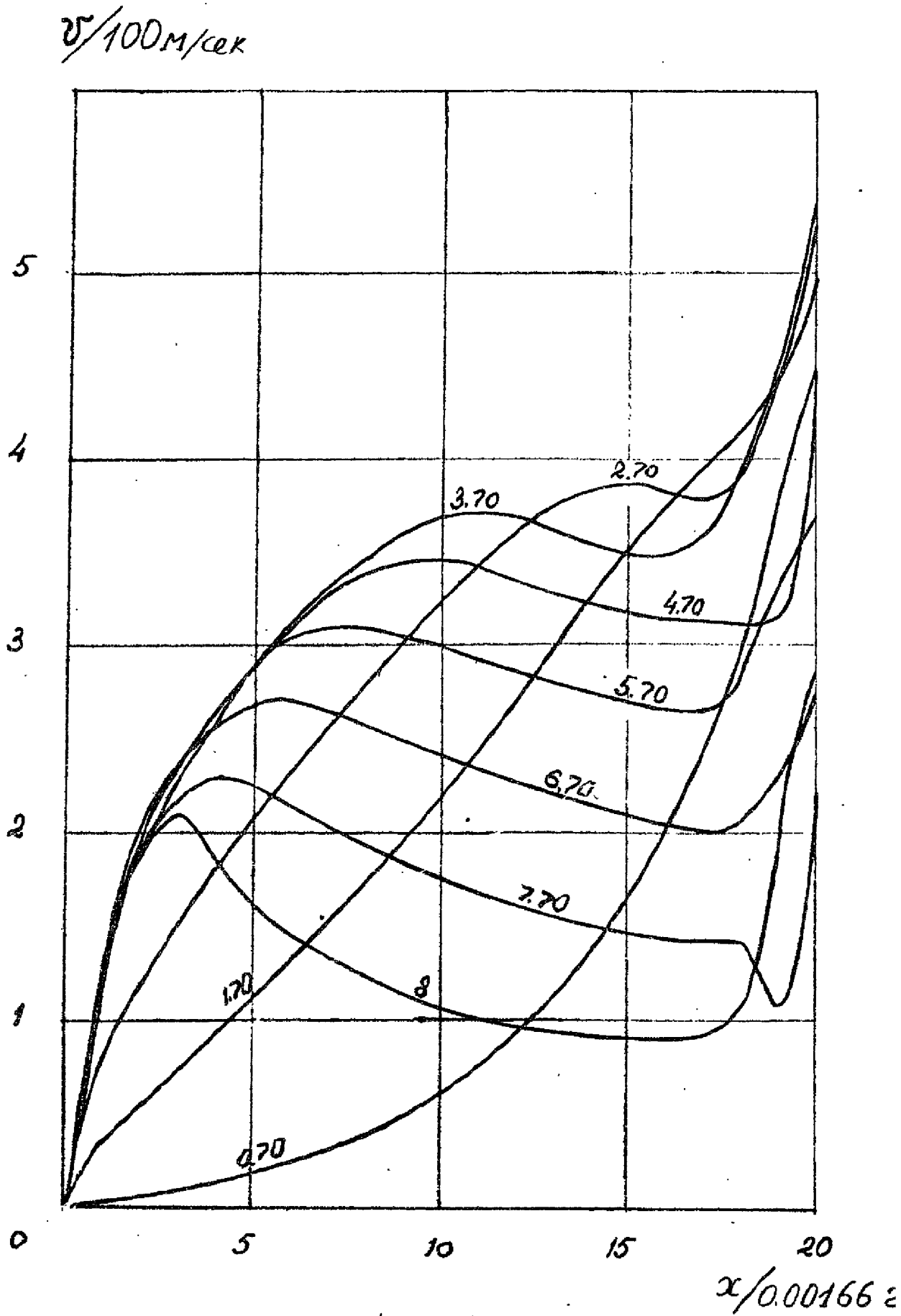
Для проверки этого факта был проведен расчет аналогичной задачи, отличающейся тем, что электропроводность наружного слоя (15% всей массы газа) определялась прежней формулой, а в остальной массе газа была на два порядка ниже. На фиг. 6-9 представлены результаты расчета этой задачи. Распределение всех функций по массе газа, особенно магнитного поля, отличается от предыду-


T/1000°K
0.70
1.70
2.70
3.70
4.70
5.70
6.70
7.70
50
40
30
20
10
0
5
10
15
20
x/0.001662

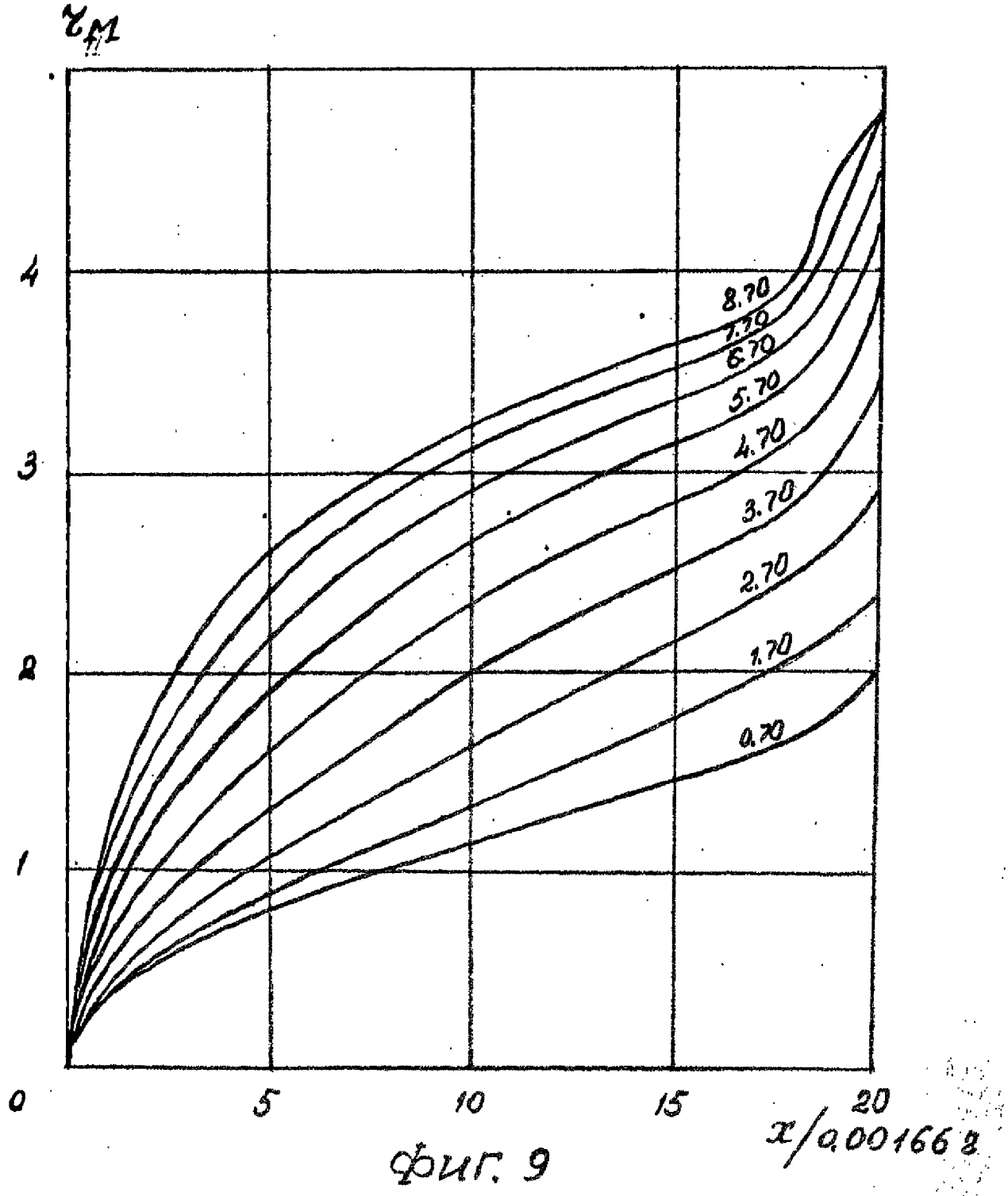
фиг. 6



фиг. 7


v/100м/сек
5
4
3
2
1
0
5
10
15
20
x/0.00166 г
0.70
1.70
2.70
3.70
4.70
5.70
6.70
7.70
8

фиг. 8



Фиг. 9

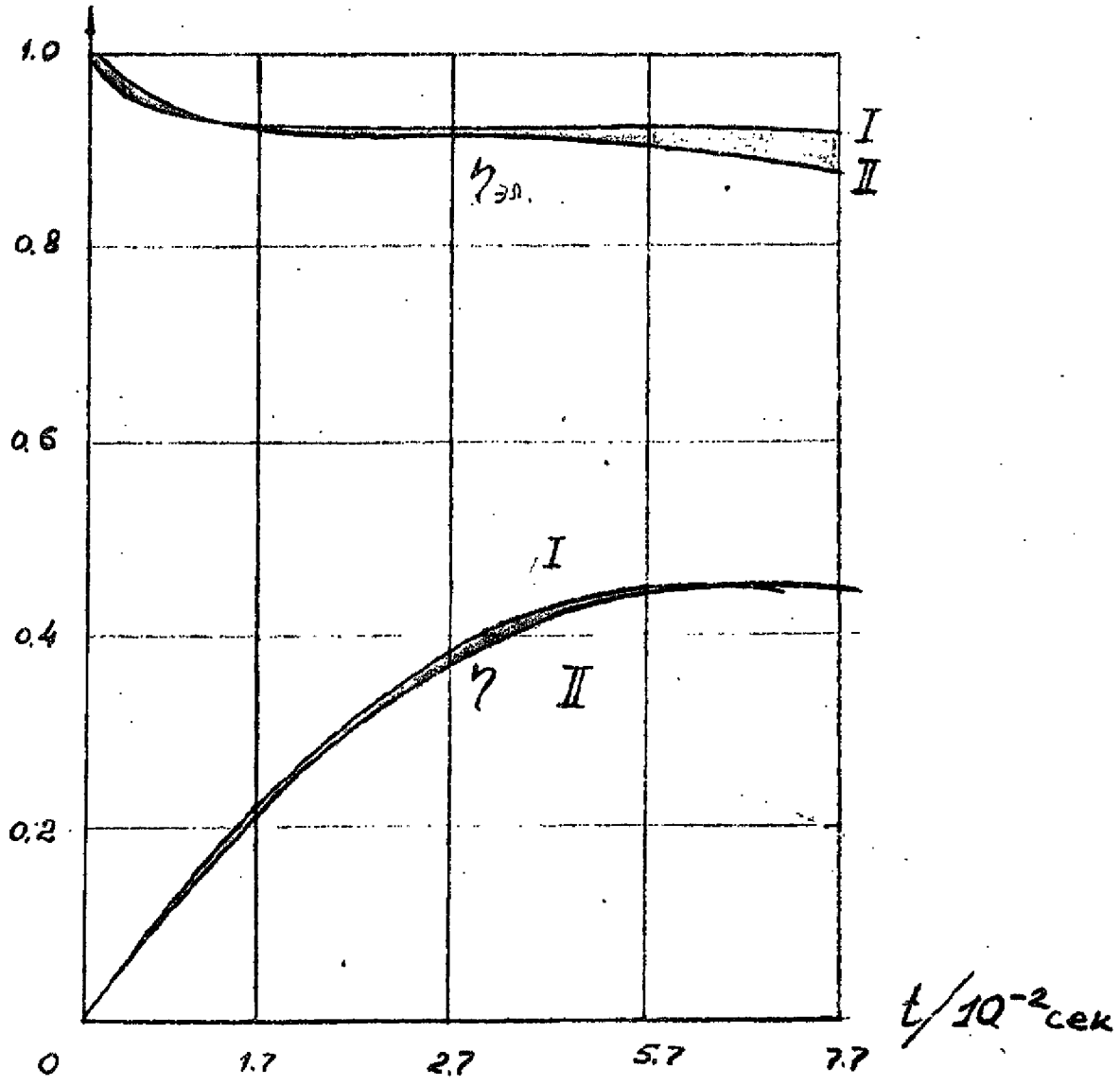
щего варианта. Однако, интегральные характеристики процеоса η и $\eta_{эл}$ (фиг. IO) практически совпадают, причем степень расширения газа в момент достижения максимального значения η в обоих случаях одна и та же (внешний радиус на этот момент времени равен 5 м).

Как и ранее, начальное охлаждение наружного слоя газа сменяется его последующим разогревом и повышением температуры.

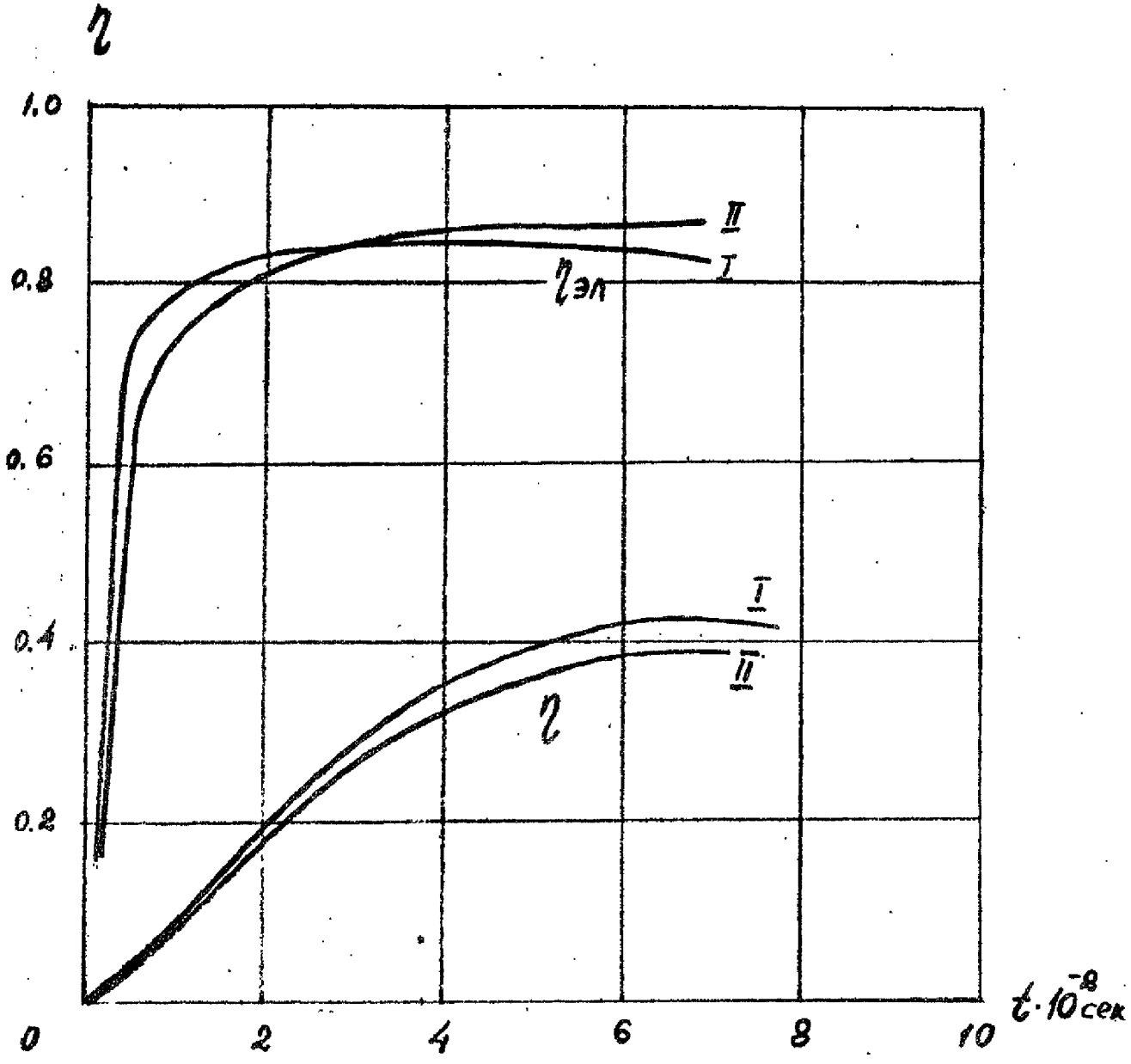
Отметим, что в обоих вариантах высокое значение электрспроводности в высокотемпературном слое и его сравнительно небольшая толщина приводят к относительному уменьшению выделения джоулева тепла и увеличению электрического к.п.д. процесса $\eta_{эл}$, котсрый достигает величины 0.9.

2. Изменим теперь начальные условия для магнитного поля. Пусть в отличие от предыдущих вариантов в момент времени $t=0$ магнитное поле внутри плазмы отсутствует и задано только на ее границе, где поддерживается постоянным во все время процесса. Отсутствие поля в плазме приводит в начальной стадии процесса к относительно большему выделению джоулева тепла за счет высокой плотности индуцированных токов, обуоловленных проникновением магнитного поля в плазму и, следовательно, малым значениям $\eta_{эл}$ (фиг. II). Однако быстро возникающий Т-слой приводит к резкому уменьшению джоулева нагрева и повышению $\eta_{эл}$. Из фиг. IO, II видно, что несмотря на различные начальные условия по магнитному полю и различие в протекании начальной стадии процесса величины η и $\eta_{эл}$ в обеих задачах за одно и то же время достигают своих максимальных значений, причем последние также мало отличаются друг от друга.

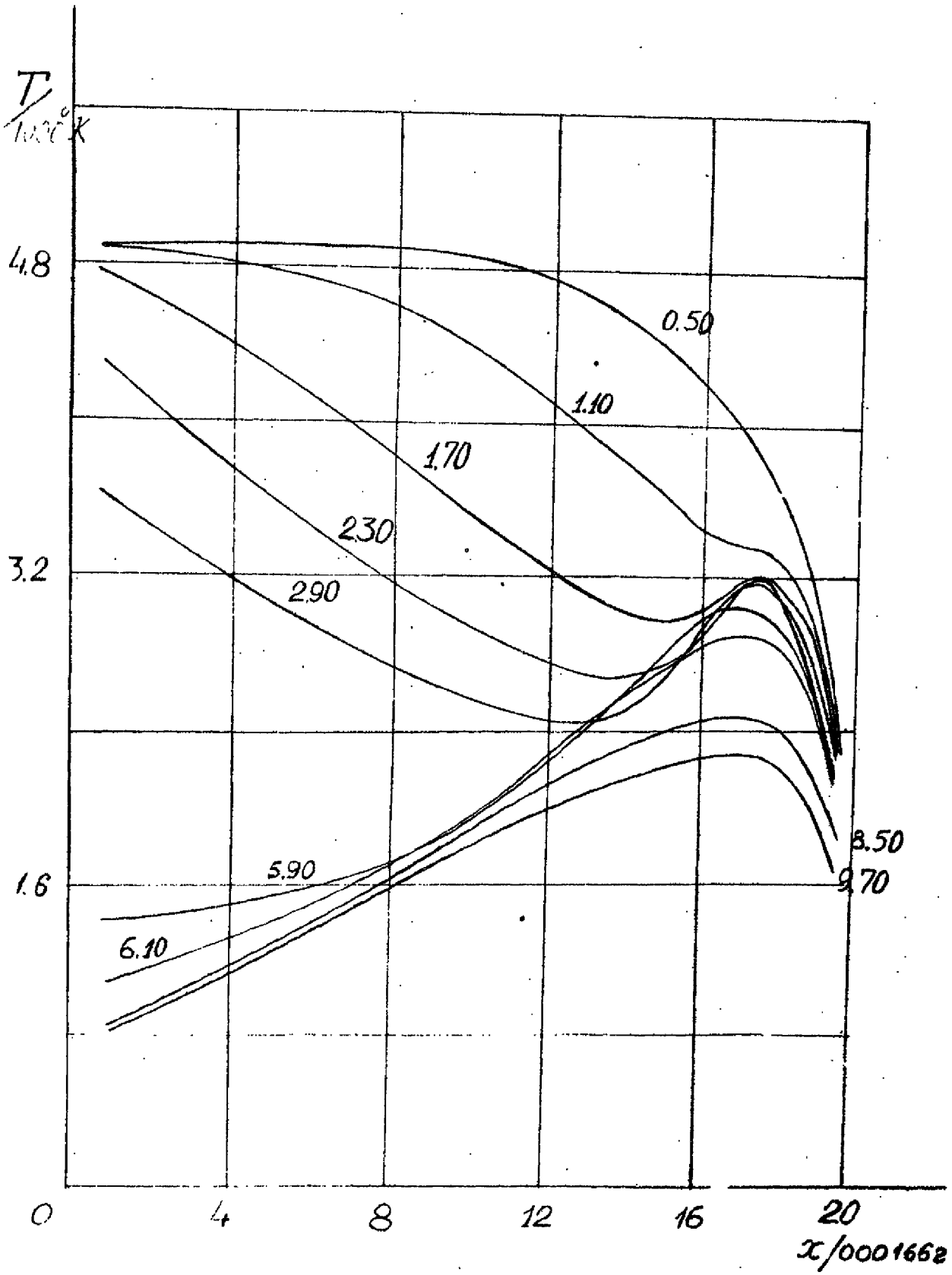
3. С целью изучения влияния теплопереноса был рассмотрен



Фиг. 10



фиг. 11


T
1.2°K
4.8
3.2
1.6
0
4
8
12
16
20
x/000166г
0.50
1.10
1.70
2.30
2.90
5.90
6.10
8.50
9.70

Фиг. 12

вариант задачи, в котором в отличие от предыдущих учитывалась теплопроводность с коэффициентом $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0 \cdot T^3/\rho$

Значение коэффициента $\mathcal{H}_0$ было выбрано так, что потеря энергии за счет теплоотдачи наружу в данном варианте к концу расчета составила около 30% от начальной энергии газа (фиг. I2). Тем не менее температура внешних слоев заметно выше, чем в основной массе газа. Наличие теплопроводности приводит к снижению роста температуры в Т-слое и его смещению к оси газового цилиндра.

Таким образом, температура внешних слоев газа формируется в результате динамического равновесия следующих процессов: охлаждение газа вследствие расширения и совершения работы, нагрева благодаря выделению джоулева тепла и регулирующему их процессу теплопереноса. Из фиг. I2 видно, что температура в Т-слое практически постоянна на стадии разлета и равновесие нарушается только при уменьшении скорости газа вследствие торможения лоренцовой силой.

4. Во всех предыдущих случаях Т-слой образовывался в непосредственной близости от внешней границы плазмы. Возникает вопрос о возможности возникновения Т-слоя во внутренних областях плазмы и характере течения в этом случае.

С этой целью рассмотрим задачу, в которой цилиндр "горячего" газа окружен слоем "холодного" газа. Оба газа подчиняются идеальному уравнению состояния, но с разными газовыми постоянными: $R_1 = 3{,}5 \cdot 10^5$ см^2/сек^2.град. для "горячего" и $R_2 = 3{,}5 \cdot 10^6$ см^2/сек^2.град. для "холодного" газа. В момент времени $t=0$ статическое давление в обеих областях постоянно и равно I0 атм. Температура во внутренней горячей области равна

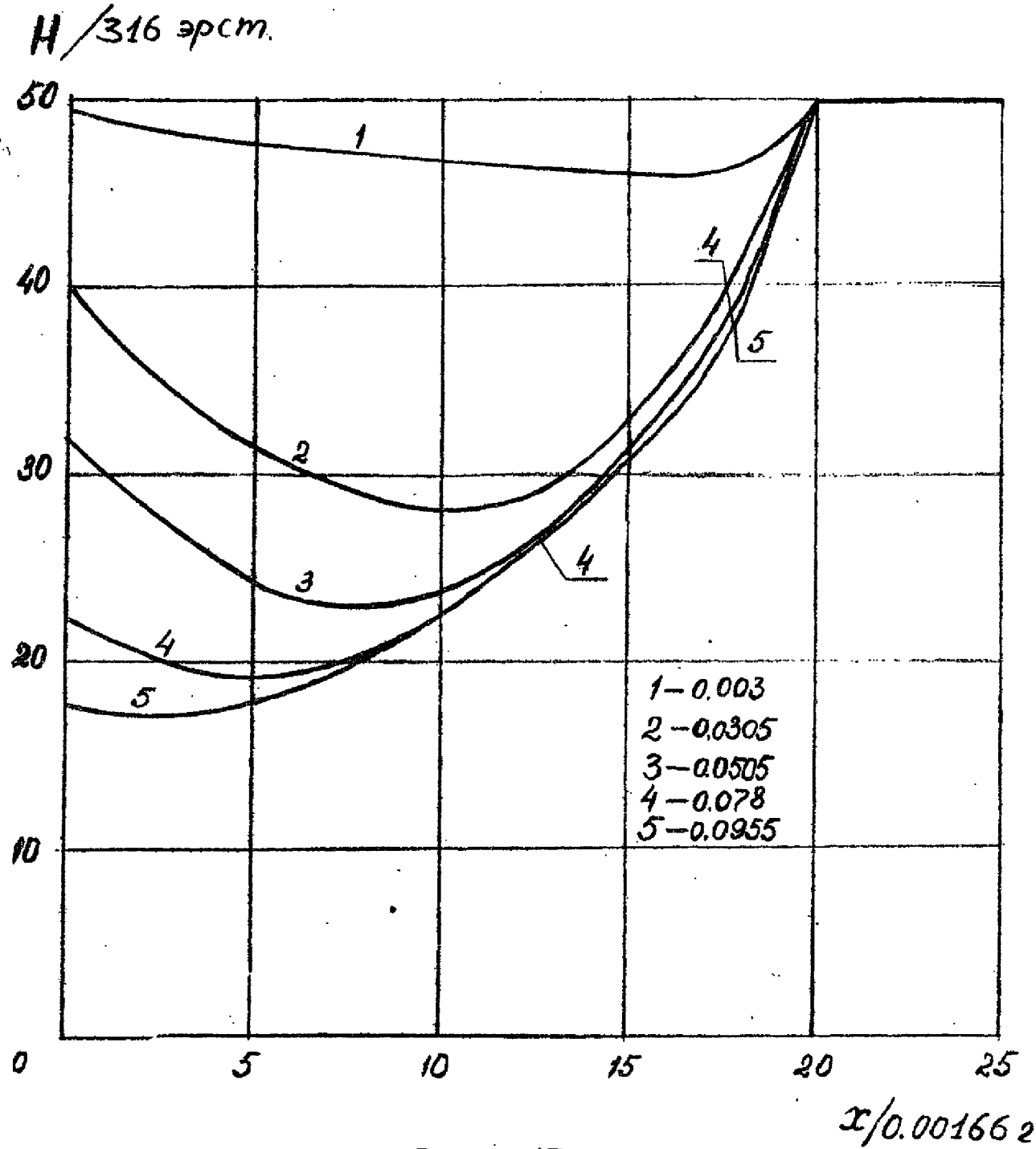
$10 \cdot 10^3$ °К, во внешней – $3 \cdot 10^3$ °К. Начальная скорость линейно распределена по всей массе газа. На внешней границе холодной области скорость постоянная во все время процесса и равна $v^* = 2000$ м/сек. Магнитное поле на внешней границе также постоянно и равно 15800 эрстед.

Рассматрим два варианта задачи, когда магнитное поле в начальный момент времени либо равномерно заполняет все пространство, либо отсутствует в области, занятой горячим газом. Магнитное число Рейнольдса Re_m, вычисляемое по параметрам на внешней границе холодного газа в момент $t = 0$ мало ($Re_m = 0{,}01$) и со временем убывает в обоих вариантах, так как скорость границы фиксирована, а электропроводность падает вместе с температурой благодаря расширению газа. Вследствие малости Re_m магнитное поле (фиг. 13, 15) в области "холодного" газа практически не возмущается и повышения температуры здесь нет.

На границе контактного разрыва, разделяющего горячий и "холодный" газы в обоих вариантах наблюдалось образование Т-слоя. В первом случае интенсивный джоулев нагрев, приводящий к возникновению Т-слоя начинается по истечении некоторого времени (фиг. 14), а во втором – образование Т-слоя начинается сразу (фиг. 16). Гидродинамическая картина течения в области горячего газа мало отличается от наблюдавшейся в ранее расомотренных задачах. В области холодного газа можно отметить дополнительное расширение вследствие торможения образующегося Т-слоя.

5. Рассмотрим далее случай непрерывного начального распределения параметров газа. Пусть температура при $t = 0$ распределена по массе газа следующим образом:

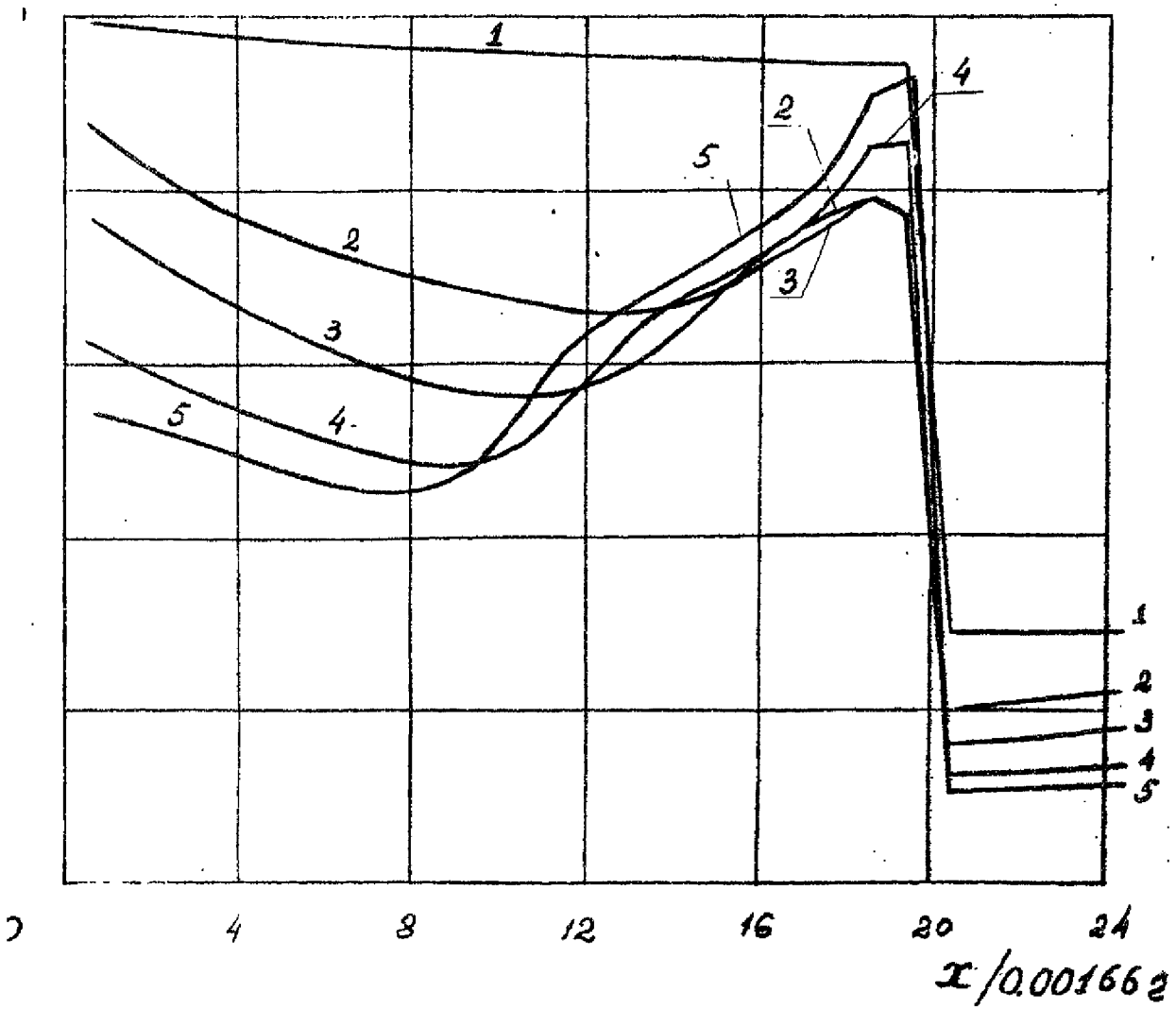
$$T = [6 + 4 \cdot \cos(\pi \cdot x/x_0)] \cdot 1000\,^{\circ}K$$


H/316 эрст.
50
40
30
20
10
0
5
10
15
20
25
x/0.00166 z
1
2
3
4
5
4
5
4
1 – 0.003
2 – 0.0305
3 – 0.0505
4 – 0.078
5 – 0.0955

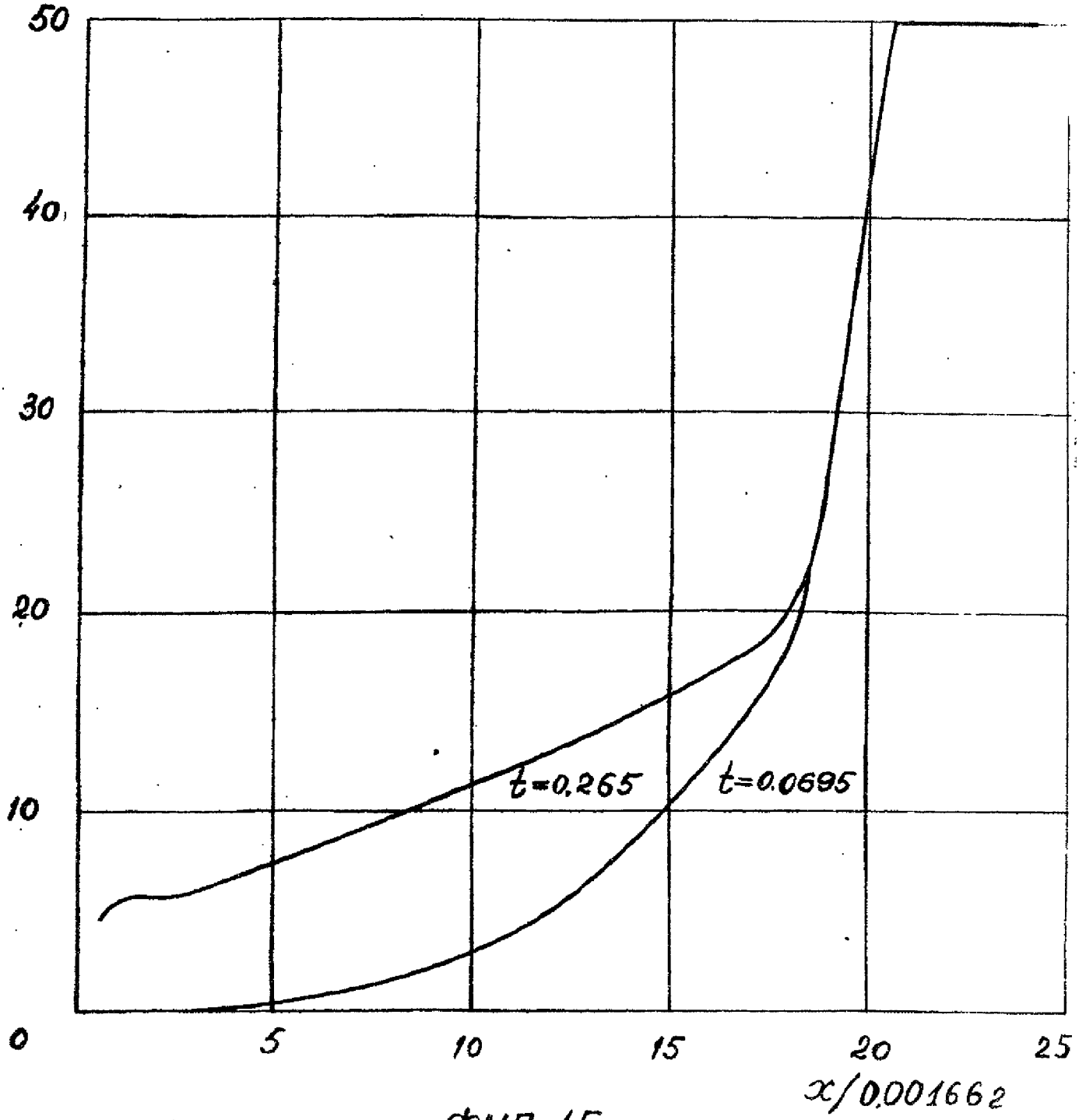
Фиг. 13

1 – 0.003
2 – 0.0305
3 – 0.0505
4 – 0.078
5 – 0.0955

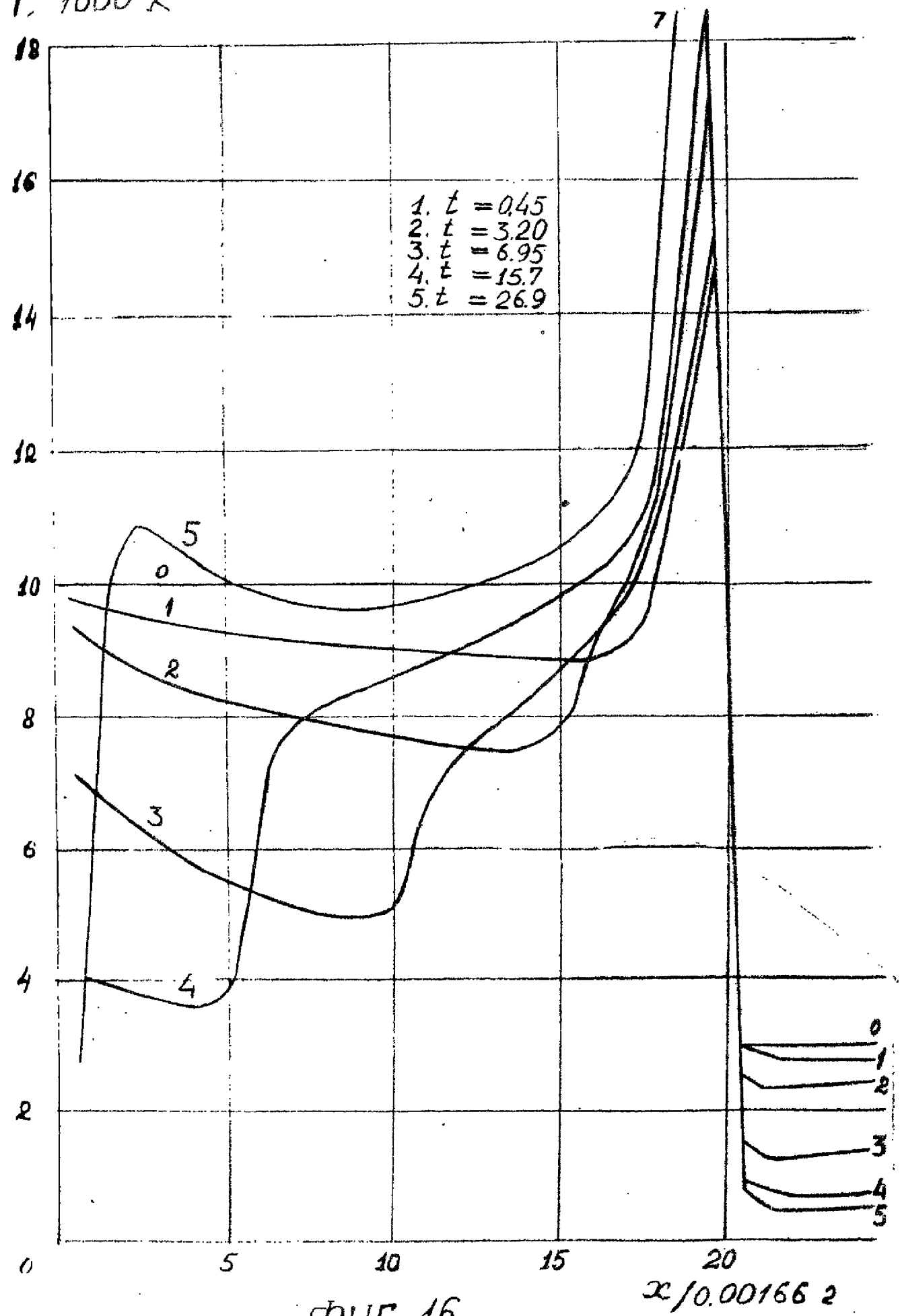
T/1000°K



Фиг. 14



фиг. 15


T, 1000°K
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
5
10
15
20
x/0.00166 2
1. t = 0.45
2. t = 3.20
3. t = 6.95
4. t = 15.7
5. t = 26.9
7
5
0
1
2
3
4
0
1
2
3
4
5

фиг. 16

где x_0 – полная масса газа. При этом давление по всей массе постоянно и равно 10 атм. Радиус плазменного цилиндра $r_к$ = 3,2 м, скорость газа равна нулю за исключением внешней границы, где v^* = 2000 $\frac{см}{сек}$ и поддерживается постоянной во все время процесса. Магнитное поле равномерно заполняет все пространство и равно H_0 .

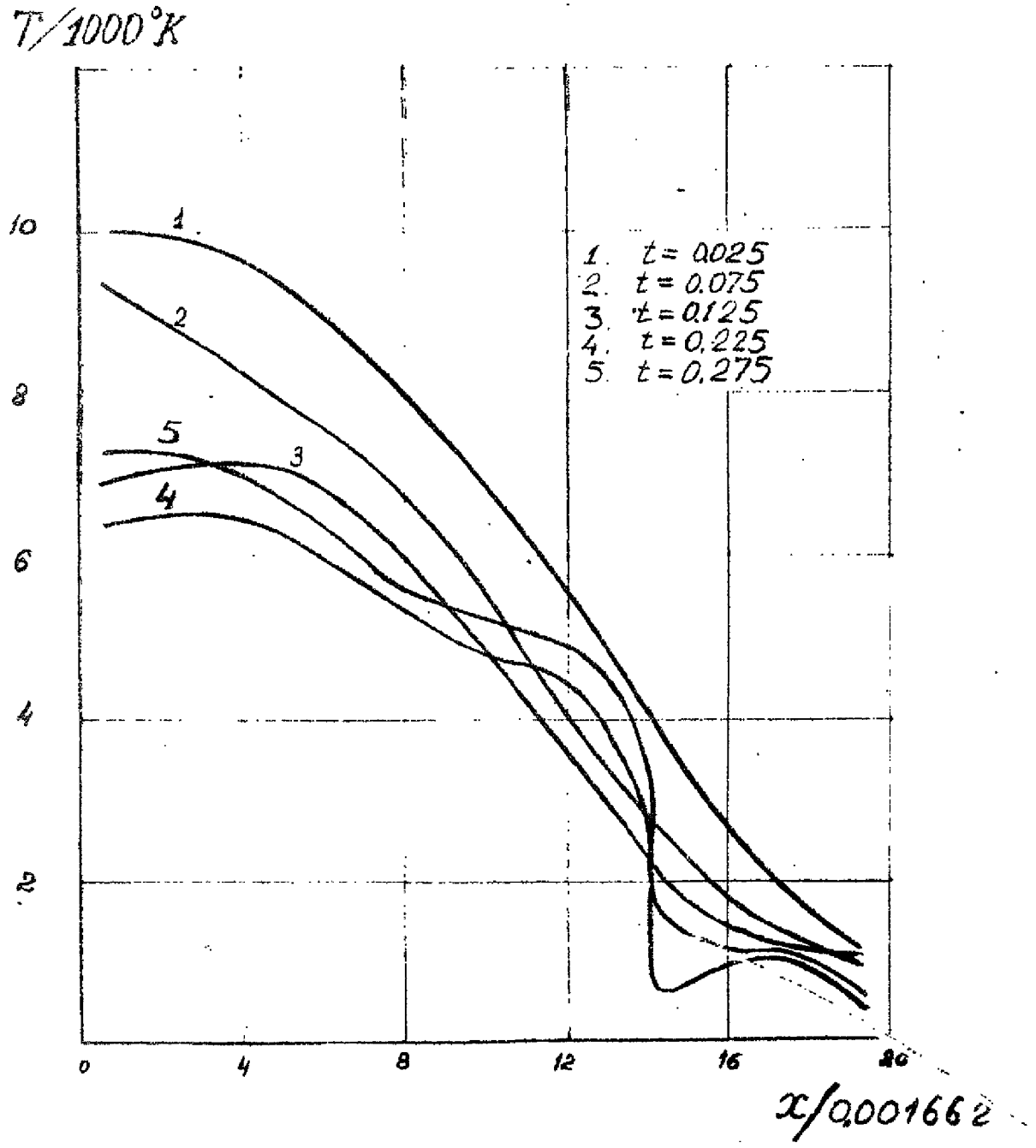
Газовая постоянная R = $3{,}5 \cdot 10^6$ г/сек^2.град. Электропроводность определяется зависимостью

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \left(\frac{5 \cdot 10^4}{T^6} + \frac{15{,}6}{T^{3/2}} \right)^{-1} \frac{мо}{см}$$

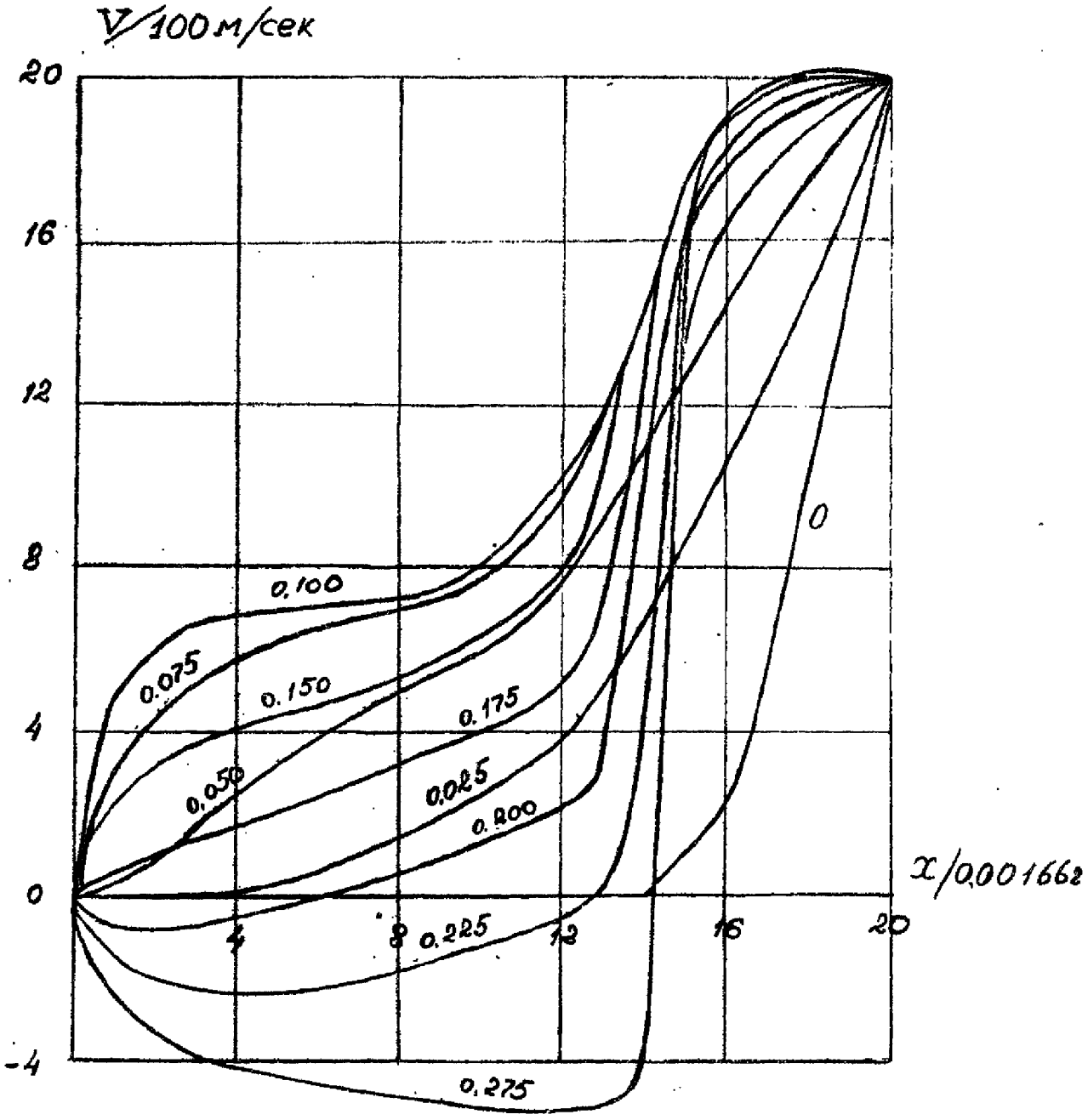
Выбор констант в формуле проводимости обеспечил такое распределение электропроводности, что на внешней границе Re_m =0,01, т.е. магнитное поле беспрепятственно проникало в среду. Электропроводность газа на оси плазменного цилиндра равнялась 150 мо/с Таким образом, отличие этой постановки задачи от рассмотренных ранее состоит в том, что задано начальное распределение электропроводности ($\sigma_{max}/\sigma_{min}$ =$1{,}5 \cdot 10^4$). При этом отношение магнитного и статического давлений $R_H = H_0^2/4\pi \cdot p_0$ используется в качестве параметра задачи для выяснения его влияния на время и место возникновения Т-слоя.

На фиг. 17 показано для этого случая распределение температуры, а на фиг. 18 – скорости по радиусу в различные моменты времени.

Видно, что в начальной стадии процесса магнитное поле слабо препятствует расширению газа, так как оно в момент $t=0$ заполняло все пространство. Однако, по мере развития процесса в газе возникают индукционные токи, обуславливающие появление пондеро-


T/1000°K
10
8
6
4
2
0
4
8
12
16
20
x/0,001662
1
2
3
4
5
1. t = 0.025
2. t = 0.075
3. t = 0.125
4. t = 0.225
5. t = 0.275

фиг. 17


V/100 м/сек
20
16
12
8
4
0
-4
4
8
12
16
20
x/0,001662
0
0.100
0.075
0.150
0.175
0.050
0.025
0.200
0.225
0.275

ФИГ. 18

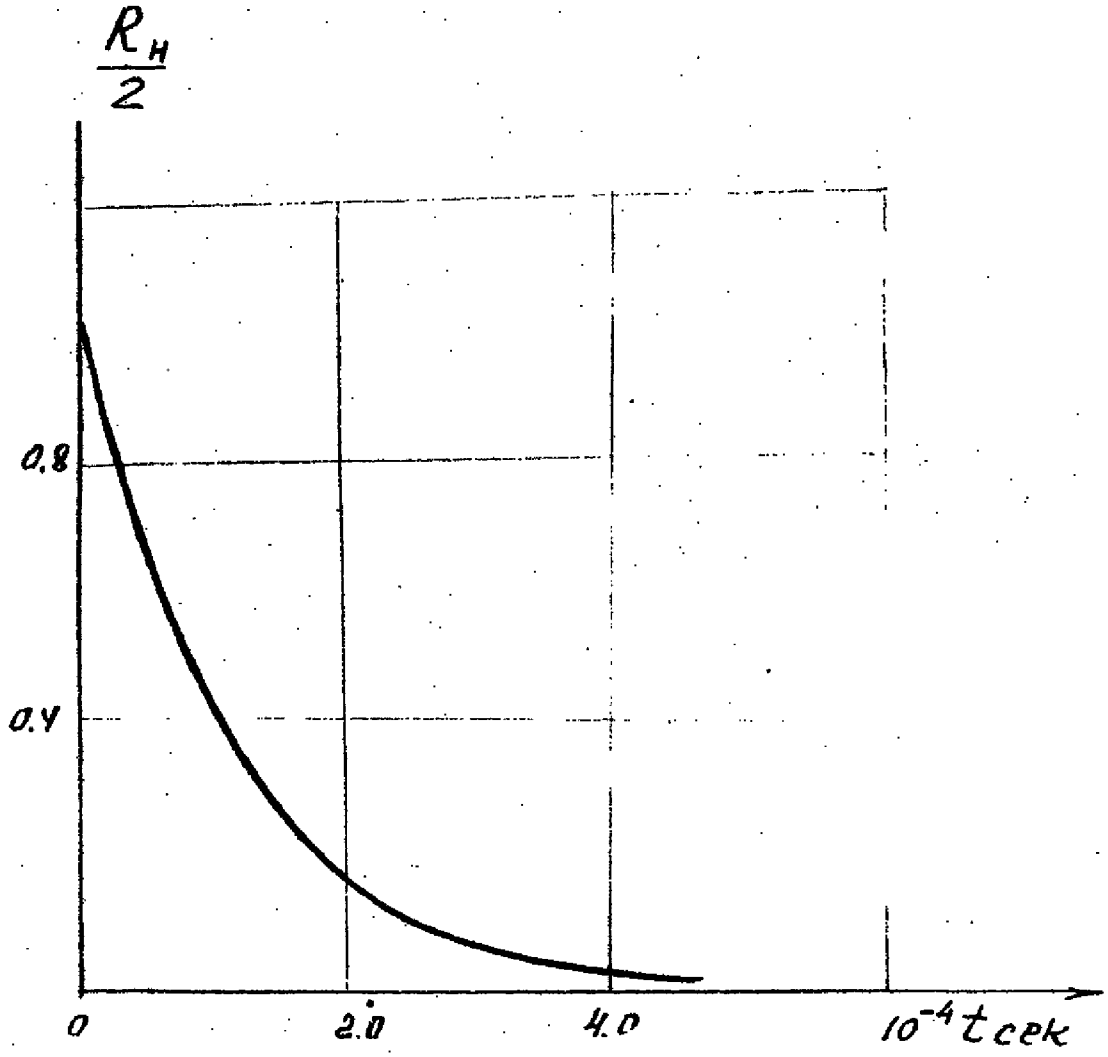
моторной силы, препятствующей разлету. В момент времени $t=0$ магнитное давление меньше газового. Пока лоренцова сила $\frac{1}{c}[\vec{j}\times\vec{H}]$ не сравняется с силой инерции ∇p, газ будет охлаждаться за счет расширения. Однако наступает такой момент, когда перепад давления в некоторой массе газа сравняется с лоренцовой силой. С этого момента начинается разогрев этой массы за счет выделения джоулева тепла, причем внешние слои газа продолжают расширяться.

Постепенно развитие этих процессов приводит к образованию в данном месте контактного разрыва. При этом, как показывают расчеты, образование контактного разрыва происходит тем раньше и тем ближе к внешней границе, чем больше начальное значение $R_н$ и, наоборот, чем меньше эта величина, тем сильнее успевает охладиться газ и тем ближе к оси цилиндра образуется контактный разрыв. Зависимость времени образования Т-слоя от величины $R_н$ показана на фиг. I9.

§ 5. Обсуждение результатов

Исследование задачи о расширении электропроводного газа в магнитном поле позволило обнаружить качественно новый эффект образования Т-слоя, являющийся следствием нестационарного взаимодействия нескольких физических процессов, описываемых уравнениями магнитной гидродинамики.

Во всех приведенных примерах отчетливо выступает основная особенность явления - развитие и поддержание высокотемпературной электропроводной зоны в газе, причем наиболее существенную роль здесь играет зависимость $\sigma=\sigma(T,\rho)$, $\left(\frac{\partial \ln\sigma}{\partial \ln T}>0\right)$



Фиг. 19

скорость расширения среды. Видна здесь и другая особенность, обусловленная нелинейностью процесса: разогрев начинается не сразу, а по истечении некоторого критического времени.

Характерной чертой процесса, в котором $R_H = H_0^2/4\pi p_0 < 1$ является наличие двух стадий. В первой стадии происходит расширение и охлаждение газа до тех пор, пока в некоторой его массе сила Лоренца $\frac{1}{c}[\vec{j} \times \vec{H}]$ не уравновесится перепадом материального давления ∇p . С этого момента начинается вторая стадия процесса, сопровождающаяся перестройкой течения. Вследствие начавшегося торможения, происходит локальное повышение температуры и электропроводности указанной массы газа из-за преобладающего выделения джоулева тепла. Повышение электропроводности приводит к возрастанию плотности электрического тока j и, следовательно, к более сильному перепаду магнитного поля и еще более интенсивному выделению джоулева тепла. Это приводит к дальнейшему росту температуры и электропроводности и т.д. Так происходит зарождение и развитие Т-слоя. Торможение Т-слоя сопровождается формированием волны сжатия, отходящей от него вверх по потоку.

Следует подчеркнуть, что Т-слой возникает в том месте среды, где параметр магнитогидродинамического взаимодействия по порядку величины становится большим или равным единице $(R_H \geqslant 1)$.

При наличии Т-слоя газ, расширяясь, совершает работу против магнитного поля, используя электропроводный, высокотемпературный слой в качестве своеобразного "поршня". Таким образом, существование Т-слоя дает возможность слабопроводящему газу эффективно взаимодействовать с магнитным полем. Локализация джоулева тепла в сравнительно узкой области вызывает относительное

уменьшение его во всей массе газа и увеличивает степень изэнтропичности процесса, которая может достигать величины 0.9.

Процесс теплопереноса, даже при значительной потере энергии, только снижает интенсивность роста температуры и смещает максимум температуры от внешней границы во внутренние слои газа, но не уничтожает Т-слой как явление.

Глава II.

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ И АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

§ I. Введение

В главе I обсуждались результаты численных экспериментов по исследованию нестационарных процессов взаимодействия сжимаемой электропроводной среды с магнитным полем. Анализ расчетов позволил сформулировать условия возникновения в плазме высокотемпературного слоя газа – "Т-слоя". Были выяснены некоторые свойства Т-слоя и его влияние на характер процессов, протекающих в плазме. Представляет интерес построение и анализ автомодельных решений, подтверждающих существование Т-слоя в плазме. Они являются одновременно хорошим тестом для проверки и контроля точности используемых разностных методов. Хотя автомодельные решения удается сформулировать для сравнительно узкого класса задач, они тем не менее позволяют исследовать отдельные качественные стороны изучаемых процессов, характер их зависимости от параметров задачи и в ряде случаев выяснить границы существования режимов различного типа. Установленные на основе анализа автомодельных решений физические представления в дальнейшем проверяются и уточняются с помощью численных расчетов на ЭВМ, проводимых для более широкого круга задач.

Ниже рассматриваются автомодельные задачи о расширении в магнитном поле порции электропроводного газа, имеющей постоянную массу. Коэффициенты проводимости и теплопроводности предпо-

лагаются зависящими от температуры и плотности. Автомодель режимы асимптотические. Теоретически они устанавливаются п $t \to \infty$. Практически, как показали численные расчеты соо ствующих уравнений в частных производных, установление авт дельных режимов со временем происходит достаточно быстро. новление асимптотического автомодельного режима означает, влияние начальных данных через некоторое время становится щественным и распределение величин в плазме определяется и чительно граничными режимами и свойствами плазмы. Начальная плотность предполагается бесконечно большой по сравнению с плотностью газа в установившемся автомодельном режиме, поэт в задаче нет характерной длины, связанной с конечностью мас рассматриваемой порции плазмы.

В В настоящей главе изучается класс автомодельных решени в которых состояние среды не перемещается по массе. В этом чае автомодельная переменная имеет вид $S = \frac{m}{M_0}$, где m - совая координата, а M_0 - полная масса расширяющейся порции мы. Все физические величины имеют вид $F_i(m,t) = A_i \cdot t^{n_i} \cdot f_i(S$ где A_i - размерная постоянная, а $f_i(S)$ - соответствующая размерная функция от автомодельной переменной.

Отметим, что аналогичного типа автомодельные решения ($M_0 = const$) изучались ранее в работах [18], [19], где ра сматривалось истечение конечной массы газа в вакуум под дей вием потока монохроматического излучения, падающего из вакуу на вещество.

Анализ показывает, что нетривиальные автомодельные реше при $M_0 = const$ невозможны в задачах обычной газодинамики. С существуют, если учитываются дополнительные источники энерги

внешние по отношени к чисто газодинамической системе, такие как джоулев нагрев в случае, исследуемом в настоящей главе или монохроматическое излучение в [18], [19]

В § 2 настоящей главы изучается задача о движении проводящего нетеплопроводного газа поперек осевого магнитного поля Расширяющийся газ заключен между двумя цилиндрическими поршнями. На каждом из них задается магнитное поле, убывающее по закону $H_z = \frac{H_{oi}}{t}$ и закон изменения скоростей поршней со временем $v \simeq v_{oi} t^n$ $(n>0)$. Условия автомодельности накладывают ограничения на связь между законом электропроводности $\sigma = \sigma_o \cdot T^{k_o} \cdot \rho^{\eta_o}$ и законами движения поршней. В частном случае передний поршень может быть заменен границей с вакуумом. Это приводит к задаче об истечении проводящего газа в вакуум, заполненный магнитным полем, при условии подпора газа поршнем. В случае, когда электропроводность имеет вид $\sigma = \sigma_o \cdot T^{k_o} \cdot \rho^{1/2}$, где k_o – произвольная постоянная, решение автомодельной задачи находится в аналитическом виде.

Анализ решений этой задачи показывает, что Т-слой может находиться как на внешнем поршне (в предельном случае на границе с вакуумом), так и внутри области занятой плазмой. Определяется структура Т-слоя, величина и положение максимума температуры в плазме в зависимости от ряда безразмерных параметров задачи. Численные расчеты соответствующей системы уравнений в частных производных показывают, что автомодельный режим воспроизводится и устойчив. Численные расчеты показывают, что закон изменения поля $H_z \sim \frac{1}{t}$ является в некотором смысле граничным. При более резком падении поля со временем Т-слоя в решении не возникает. При более медленном падении поля, при постоянном по-

поле и при росте внешнего поля со временем возникает "невтом дельный" Т-слой. В этом случае процессы в рассматриваемой за ча переотают быть автомодельными: в районе Т-слоя температур наростают, а другие участки плазмы могут охлаждаться.

В § 3 рассматривается автомодельная задача о разлете па цилиндрической проволочки в вакуум при наличии азимутального магнитного поля (H_φ), созданного током, текущим вдоль оси п волочки. В задаче учитывается проводимость и теплопроводност зависящие от температуры и плотности. Условия автомодельност накладывают связь на закон изменения со временем полного ток через проволочку и закон изменения проводимости $\sigma = \sigma(T,\rho)$ теплопроводности $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T,\rho)$ среды. Для каждого закона $\sigma = \sigma($ существует определенный закон тока, приводящий к существовани автомодельного решения. С помощью анализа автомодельных реше устанавливается зависимость условий существования Т-слоя и е структуры от величины безразмерных коэффициентов проводимост $(\hat{\sigma}_0)$ и теплопроводности $(\hat{\mathcal{H}}_0)$ показано, что автомодельный режим с ствует лишь при значении безразмерного коэффициента теплопро ности большем некоторого $\hat{\mathcal{H}}_0 \geq \hat{\mathcal{H}}_{окр}$. Если автомодельное реше существует, то температура немонотонна по массе (есть Т-слой) лишь в определенном диапазоне изменения величины $\hat{\mathcal{H}}_0 (\hat{\mathcal{H}}_{окр} \leq \hat{\mathcal{H}}_0$ При $\hat{\mathcal{H}} > \hat{\mathcal{H}}_{0\ell}$ максимум температуры находится на оси цилиндра (Т-слоя нет). Численные расчеты системы уравнений в частных п изводных показали, что вне области существования автомодельны решений имеет место "неавтомодельный" Т-слой.

Основные результаты решений, приведенных в настоящей гла изложены в работах [3], [20], а также в работе [21].

§ 2. Задача о расширении постоянной массы проводящего нетеплопроводного газа против осевого магнитного поля

I. Постановка задачи. Условия автомодельности.

I) Пусть при $t=0$ проводящий нетеплопроводный газ имеет постоянную массу $M=M_0$ и сжат до бесконечной плотности в точке $r=0$ (ось симметрии). В неэлектропроводной среде $r>0$ задано однородное по пространству осевое магнитное поле H_z. При $t>0$ напряженность магнитного поля убывает по закону $H_z=H_0\cdot t^{\bar{n}_0}$, $\bar{n}_0<0$. Газ расширяется, причем масса его сохраняется постоянной:

$$M_0=\int_0^{r_*}\rho\cdot r\cdot dr \qquad (2.1)$$

где $r_*=\bar{r}_0\cdot t^{n}$, $n>0$ – закон движения границы с внешней средой.

Электропроводность газа зависит от температуры и плотности по степенному закону

$$\sigma=c^2\sigma_0\cdot T^{\kappa_0}\cdot\rho^{-q_0} \qquad (2.2)$$

Будем считать также справедливыми уравнения состояния идеального газа

$$p=R\cdot\rho\cdot T,\quad \varepsilon=\frac{1}{\gamma-1}\cdot R\cdot T \qquad (2.3)$$

где $\gamma=c_p/c_v$ постоянное отношение удельных теплоемкостей.

Внешнюю границу, определяемую координатой $r=r_*$ можно трактовать как выдвигающийся от оси симметрии цилиндрический поршень.

Процесс расширения газа против магнитного поля описывается системой уравнений магнитной гидродинамики вида (I.I), которую здесь удобно записать, учитывая (2.3), в следующем виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -r \frac{\partial}{\partial m}\left(p + \frac{H_z^2}{8\pi}\right) \qquad (2$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial m} \qquad (2$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v \qquad (2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{R}{\gamma-1}T + \frac{H_z^2}{8\pi\rho}\right) = -\frac{\partial}{\partial m}\left[rv\left(p + \frac{H_z^2}{8\pi}\right) - \frac{r}{4\pi}H_z \cdot E_\varphi\right] \qquad (2$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -H_z \cdot \rho \frac{\partial}{\partial m}(r \cdot v) + \rho \frac{\partial}{\partial m}(r E_\varphi) \qquad (2$$

$$E_\varphi = \frac{c^2 \rho}{4\pi\sigma} r \frac{\partial H_z}{\partial m} \qquad (2$$

m — массовая координата

Краевые условия имеют вид:

$$v(0,t) = 0 \quad , \quad E_\varphi(0,t) = 0$$

$$v(r_*, t) = n \cdot v_0 \cdot t^{n-1}, \quad H(r_*, t) = H_0 \cdot t^{\bar{n}_0} \qquad (2.$$

2) Формальный анализ размерностей приводит к условиям ав модельности следующего вида:

$$n = \frac{2\kappa_0 + 1}{2(\kappa_0 + q_0 + 1)} \quad , \quad \bar{n}_0 = -1 \qquad (2.$$

Выберем в качестве определяющих параметров с независимой размерностью постоянные M_0, R и v_0 . В силу автомодельност постоянная σ_0 следующим образом зависит от параметров M_0, R и

$$\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 \cdot M_0 \cdot R^{\kappa_0} / v_0^{2(\kappa_0 + q_0 + 1)} \qquad (2.$$

где $\tilde{\sigma}_0$ безразмерная постоянная.

В соответствии с (2.II) все искомые функции представляют

вид:

$$v(m,t)=\alpha(s)\cdot v_0\cdot t^{n-1} \qquad r(m,t)=\lambda(s)v_0 t^n$$
$$\rho(m,t)=\delta(s)\cdot M_0\cdot v_0^{-2}t^{-2n} \qquad T(m,t)=f(s)R^{-1}v_0^{-2}\cdot t^{2(n-1)} \quad (2.13)$$
$$\rho(m,t)=\beta(s)\cdot M_0 t^{-2} \qquad H_z(m,t)=h(s)\cdot M_0^{1/2}\cdot t^{-1}$$
$$\sigma(m,t)=\tilde{\sigma}(s)\cdot v_0^{-2}t^{1-2n} \qquad E_\varphi(m,t)=\varphi(s)v_0 M_0^{1/2}t^{n-2}$$

При этом, независимая автомодельная переменная имеет вид:

$$s=m/M_0 \quad (2.14)$$

В силу автомодельности функции $\alpha, \lambda, \delta, f, \beta, h, \tilde{\sigma}, \varphi$ зависят только от одного переменного s. Используя (2.13), получим из (2.4)-(2.9) соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной s. Из уравнения $\frac{\partial r}{\partial t}=v$ имеем в переменных (2.13)

$$\alpha=n\cdot\lambda \quad (2.15)$$

т.е. скорость является линейной функцией радиуса r:

$$v=n\cdot r/t$$

Учитывая (2.15), получим, что функции $\beta(s), \lambda(s)$ и т.д., входящие в выражения (2.13), удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$(2n-1)h-\delta(\lambda\varphi)'=0 \quad (2.16)$$
$$\delta\cdot\lambda\cdot h'=4\pi\cdot\sigma\cdot\varphi \quad (2.17)$$
$$(\beta+h^2/8\pi)'+n(n-1)=0 \quad (2.18)$$

$$2(n-1)\left(\frac{n^2}{2}\lambda^2+\frac{1}{\gamma-1}f+\frac{h^2}{8\pi\delta}\right)+\left\{\lambda\left[n\lambda\left(\beta+\frac{h^2}{8\pi}\right)-\frac{1}{4\pi}\cdot h\cdot\varphi\right]\right\}'=0 \quad (2.19)$$

$$\delta\cdot\lambda\cdot\lambda'=1 \qquad (2$$

$$\tilde{\sigma}=\tilde{\sigma}_0\cdot f^{k_0}\cdot\delta^{-q_0} \qquad (2$$

$$\beta=\delta\cdot f \qquad (2$$

через h', φ' и т.д. в системе (2.16)-(2.22) обозначены про водные по S .

Краевые условия (2.10) в переменных (2.13) имеют вид

$$\alpha(0),\ \varphi(0)=0,\ \alpha(1)=n\lambda_*,\ h(1)=h_* \qquad (2$$

где параметр $h_*=\frac{H_0}{\sqrt{M_0}}$, а λ_* определяется из условия отсянства массы $1=\int_0^{\lambda_*}\delta\cdot r\,dr$

В настоящем параграфе анализ автомодельного решения мы ограничиваем случаем n = I (скорость расширяющегося поршня постоянна). В этом случае задача (2.4)-(2.10) формально авт дельна при q_0 = -I/2 и произвольном значении k_0 -показател зависимости коэффициента электропроводности от температуры.

В случае n = I систему в автомодельных переменных (2 (2.22) можно полностью проинтегрировать.

2. <u>Автомодельное решение и его физический смысл</u>.

I) Проведем сначала формальное интегрирование системы (2.16)-(2.22), положив n = I.

Из (2.18) и (2.19) имеем два интеграла

$$\beta+\frac{h^2}{8\pi}=C_1 \qquad (2$$

(общее давление - материальное и магнитное постоянно) и

$$\lambda\cdot\left(\frac{1}{4\pi}\cdot h\cdot\varphi-C_1\lambda\right)=C_2 \qquad (2$$

(интеграл энергии), где C_1 и C_2 пока произвольные постоя

Выберем за независимую переменную λ . Используя (2.2 учитывая связь между безразмерными эйлеровыми (λ) и лагран

ми (S) переменными $\delta \cdot \lambda d\lambda = dS$ получим из (2.16) следующее дифференциальное уравнение для определения функции h через эйлерову переменную λ :

$$\frac{dh}{d\lambda} = \frac{1}{4\pi c_1} \frac{\lambda \cdot h\,(8\pi c_1 - h^2)}{\lambda^2 + c_2/c_1} \qquad (2.26)$$

Интегрируя (2.26), получим:

$$h^2 = 8\pi \cdot c_1 \frac{(c_2/c_1 + \lambda^2)^2}{c_3 + (c_2/c_1 + \lambda^2)^2}\,, \quad c_3 > 0 \qquad (2.27)$$

Учитывая (2.24)-(2.27), уравнение состояния (2.22) и вводя для удобства переменную $x = \lambda / c_3^{1/4}$, получим следующие выражения искомых функций через эйлерову переменную x :

$$h_2 = \sqrt{8\pi c_1} \cdot \frac{c_0 + x^2}{\sqrt{1 + (c_0 + x^2)^2}}\,, \quad \beta = \frac{c}{1 + (c_0 + x^2)^2}$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\pi \sqrt{c_3}} \cdot \frac{x^2}{[1 + (c_0 + x^2)^2]^2}\,, \quad \delta = c_3^{1/4} \cdot x \qquad (2.28)$$

$$f = F_0 \cdot x^{\frac{4}{2K-1}} \Big/ [1 + (c_0 + x^2)^2]^{\frac{3}{2K_0 - 1}}$$

$$\delta = \mathcal{D}_0 [1 + (c_0 + x^2)^2]^{\frac{2(2-K_0)}{2K_0 - 1}} \Big/ x^{\frac{4}{2K_0 - 1}}$$

где

$$F_0 = \left(1/(\pi \bar{\sigma}_0)^2 c_4 \cdot c_3\right)^{1/(2K_0 - 1)}\,, \quad \mathcal{D}_0 = [(\pi \bar{\sigma}_0)^2 c_1^{2K_0} \cdot c_3]^{\frac{1}{2K_0 - 1}}\,, \quad c_0 = c_2/c_1 \sqrt{c_3}$$

постоянные.

Заметим, что при $K_0 = 2$ можно в конечном виде записать выражение массовой переменной S через эйлерову переменную x .

Оно имеет вид:

$$S = \frac{3}{2}\left((\pi\tilde{\sigma}_0)^2 c_1^4 \cdot c_3^{5/2}\right)^{1/3} \cdot \left(x^{2/3} - x_0^{2/3}\right)$$

2) Отметим следующее обстоятельство. Функции, выраженные формулами (2.28), формально удовлетворяют системе уравнений (2.16)-(2.22) для случая $n = 1$ при произвольных постоянных c_0, c_1, c_3. В работе [20], а также частично в работе [3] в точке $\lambda = 0$ рассматривалось краевое условие вида $dh(0)/d\lambda = 0$.

Однако, непосредственно из уравнений Максвелла следует, что условием симметрии в точке $\lambda = 0$ является условие равенства нулю напряженности электрического поля φ:

$$\varphi(0) = \frac{1}{4\pi\sigma} \left.\frac{dh}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0$$

Из (2.28) следует, что условие $\varphi(0) = 0$ выполняется лишь при значениях $c_2 = c_3 = 0$, приводящих к тривиальному решению

$$h_2 = \sqrt{8\pi c_1}, \quad \varphi_2 = \sqrt{2\pi c_1}\cdot\lambda, \quad \alpha = \lambda, \quad \sigma = \beta = \gamma = \delta = 0$$

Решение вида (2.28) физически непротиворечиво, если предположить, что рассматриваемый электропроводный газ, имеющий постоянную массу M_0, заключен между двумя поршнями, расширяющимися от оси симметрии, на каждом из которых задан закон изменения магнитного поля.

Ниже будет показано, что в этом случае существует автомодельный режим, в котором при определенных условиях температура немонотонна по массе и ее максимум можно отождествить с Т-слоем.

Таким образом, в дальнейшем будем считать, что расширяющийся электропроводный газ с фиксированной массой $M_0 = \int_0^{r_*} \rho \cdot r\, dr$ заключен между двумя поршнями, законы движения которых имеют вид

$$r_0(t)=\lambda_0\cdot v_0\cdot t^n,\quad r_*(t)=\lambda_*\cdot v_0\cdot t^n,\quad \lambda_0<\lambda_* \tag{2.29}$$

где λ_0 и λ_* заданные безразмерные постоянные. На каждой из границ r_0 и r_* задано осевое магнитное поле, изменяющееся в соответствии с условиями автомодельности (2.II), по закону

$$H_z(r_0,t)=H_0\cdot t^{-1},\quad H_z(r_*,t)=H_1\cdot t^{-1},\quad H_0<H_1 \tag{2.30}$$

и безразмерных переменных (2.23) условия (2.29) и (2.30) будут иметь вид:

$$\lambda(0)=\lambda_0,\quad h_z(0)=h_{z_0},\quad \lambda(S_*)=\lambda_*,\quad h_z(S_*)=h_{z_*} \tag{2.3I}$$

где $\lambda_0,\lambda_*,h_{z_0},h_{z_*}$ заданные безразмерные постоянные.

Отметим сразу, что на существование и устойчивость автомодельного решения уравнений (2.I6)-(2.22) при краевых условиях (2.3I) указывает совпадение этого решения с результатами численного решения исходной системы в частных производных, проведенные при соответствующих автомодельных краевых и начальных условиях (см. ниже фиг. 24).

При n = I разлет плазмы против магнитного поля описывается в автомодельных переменных решением вида (2.28) при краевых условиях (2.3I). Положительные постоянные C_0, C_1 и C_3, входящие в (2.28), однозначно определяются, если заданы краевые условия $h(x_0)=h_0$, $h(x_*)=h_*$, где $x_0=\lambda_0/C_3^{1/4}$ и $x_*=\lambda_*/C_3^{1/4}$ и условия постоянства массы $S_*=\int_{\lambda_0}^{\lambda_*}\delta\cdot\lambda\cdot d\lambda$.

3. Анализ автомодельного решения.

Проведем теперь анализ структуры решения вида (2.28) при краевых условиях (2.3I).

а) Из выражений (2.28) следует, что безразмерная функция напряженности магнитного поля монотонно растет по x, а давление монотонно убывает.

Электропроводность и температура в общем случае явл
немонотонными функциями x .

б) Выясним, от каких параметров зависит положение мак
ма температуры в области определения решения $x_0 < x \le x_*$.

Производная температуры по переменной x имеет вид

$$\frac{df}{dx} = \frac{6}{2\kappa_0 - 1} \cdot \frac{f(x)}{x}\left(\frac{2}{3} - \frac{2x^2(c_0 + x^2)}{1 + (c_0 + x^2)^2}\right) \qquad (1$$

Введем функции вида $R_{em} = 4\pi\sqrt{c_3}\cdot\sigma\cdot x^2$ и $R_H = h^2/8$

$$R_{em} = \frac{4x^4}{[1 + (c_0 + x^2)^2]^2}, \quad R_H = (c_0 + x^2)^2$$

В каждой фиксированной точке x из интервала $x_0 \le x$
величин R_{em} и R_H представляют собой местное число Рей
ов и параметр, выражающий отношение магнитного давления и
вому.

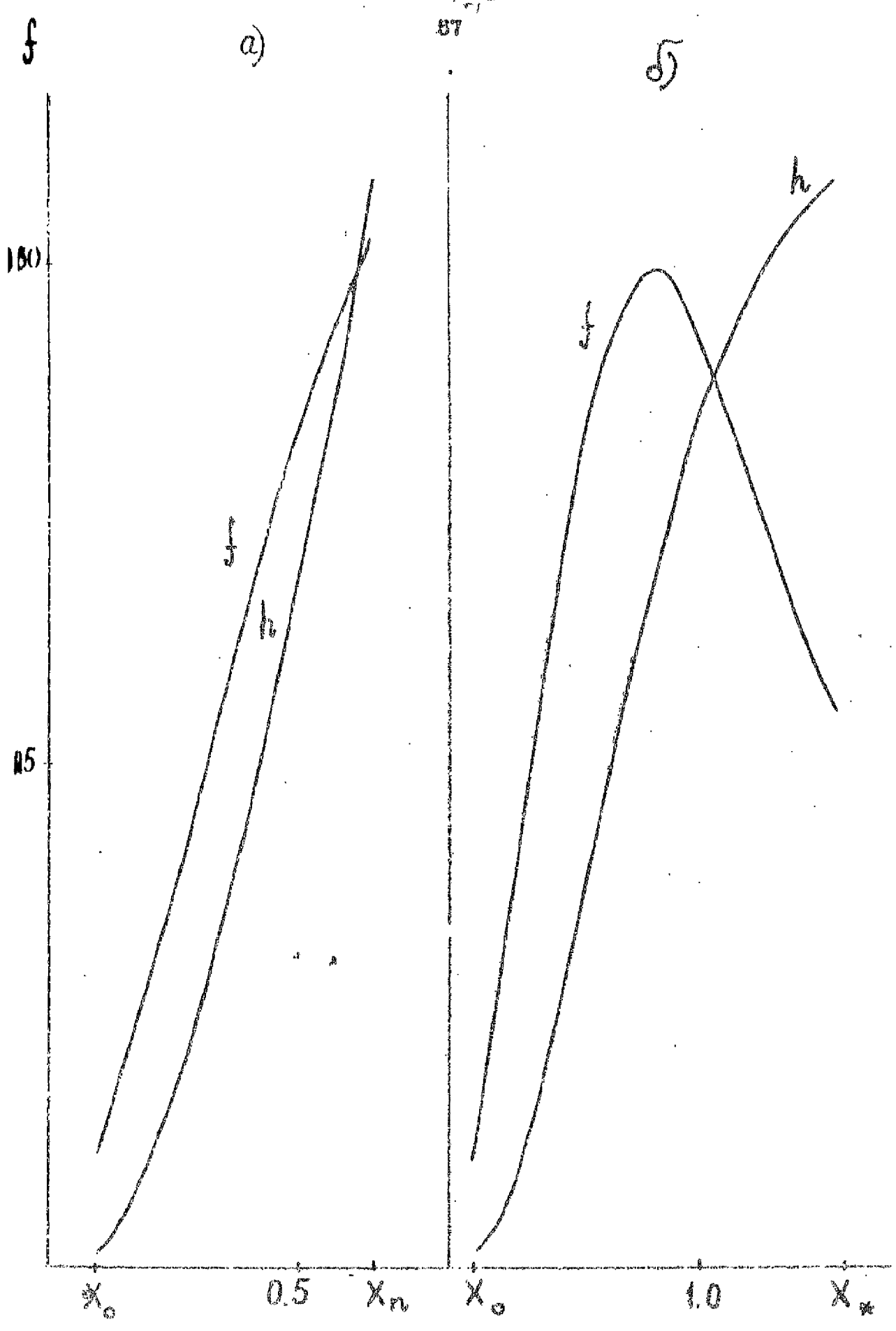
Непосредственная проверка показывает, что производную
пературы (2.32) можно следующим образом выразить через фун
R_{em} и R_H:

$$\frac{df}{dx} = \frac{6}{2\kappa_0 - 1} \cdot \frac{f(x)}{x}\left(\frac{2}{3} - \sqrt{R_{em}\cdot R_H}\right) \qquad (2$$

Из (2.33) следует, что знак производной $\frac{df}{dx}$ в област
определения $x_0 \le x \le x_*$ зависит от значения величины
$\bar{R}_m = \sqrt{R_{em}\cdot R_H}$ в точках $x = x_0$ и $x = x_*$ (на внутренне
внешнем порциях).

Так как $\bar{R}_m(x_0) < \bar{R}_m(x_*)$, то при $\beta(x_*) \neq 0$
ем, что в случае $\bar{R}_m(x_*) \le \frac{2}{3}$ функция $f(x)$ монотон
растет по x и достигает максимума в точке $x = x_*$, т.е.
внешнем порше (см. фиг. 20а)).

При $\bar{R}_m(x_0) < \frac{2}{3}$ и $\bar{R}_m(x_*) > \frac{2}{3}$ имеем, что макси
$f(x)$ находится внутри области, занятой электропроводным



Фиг 20

(см. фиг. 20б)).

При $\overline{R}_m(x_0) > \frac{2}{3}$ функция $f(x)$ максимальна в точке $x = x_0$

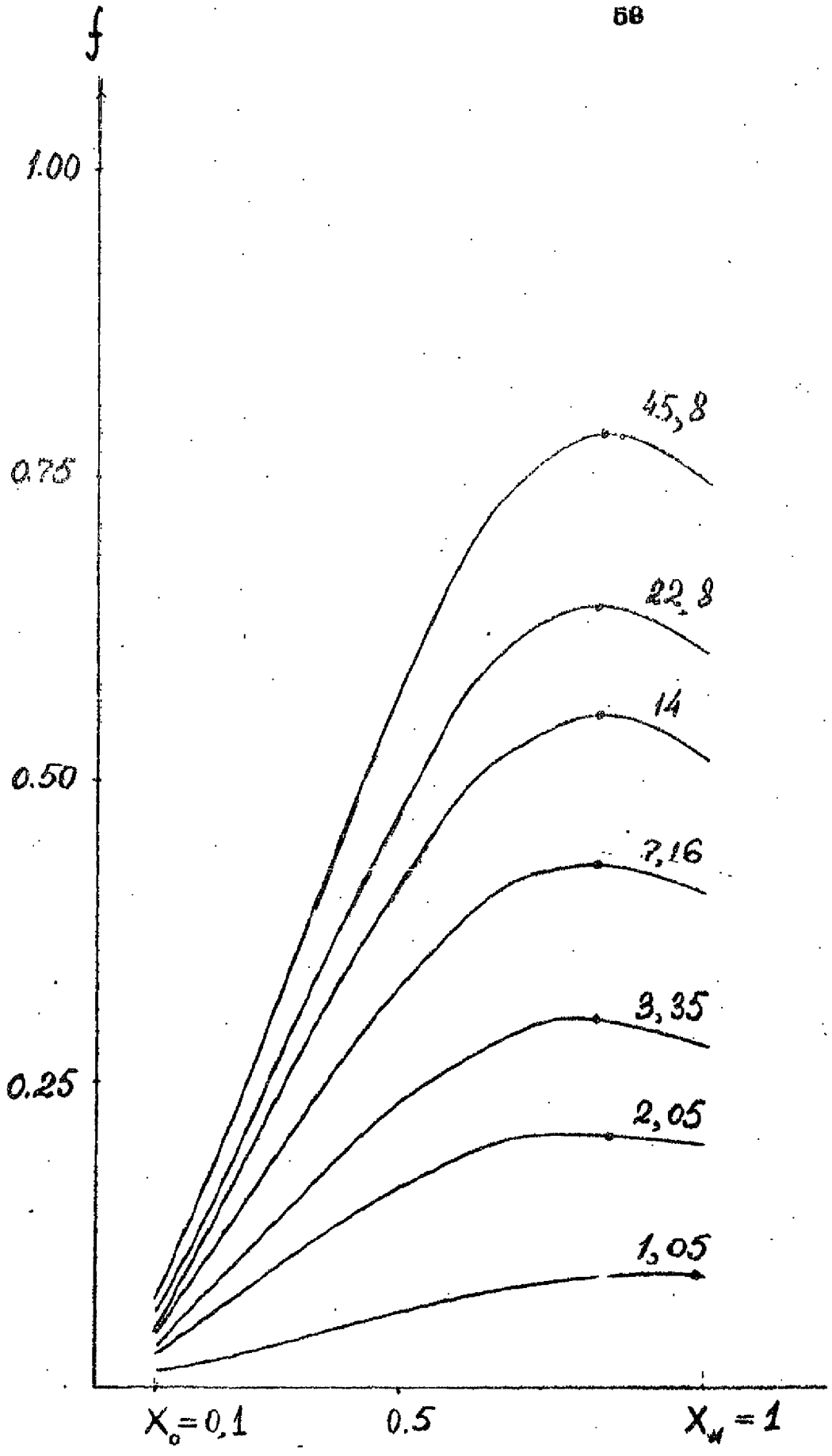
в) Влияние параметров задачи на характер распределения температуры иллюстрируется графиками фиг. 2I-22.

На фиг. 2I представлено распределение температуры (f) в эйлеровых безразмерных переменных x для различных значений магнитного давления на внешнем поршне $P_* = h_*^2/8\pi$ при фиксированных значениях скорости поршней $x_0 = 0{,}1$ и $x_* = 1$ и значениях $P_0 = h_0^2/8\pi = 1$, $\overline{\sigma}_0 = 1$, $\kappa_0 = 2$, $q_0 = -\frac{1}{2}$. Различные значения P_* обозначены цифрами на кривых (единицы измерения здесь условные). Анализ показывает, что при фиксированной скорости поршня с ростом постоянной P_* в законе магнитного давления ($P = \frac{H^2}{8\pi} = P_* t^{-2}$) значение температуры в точке максимума возрастает.

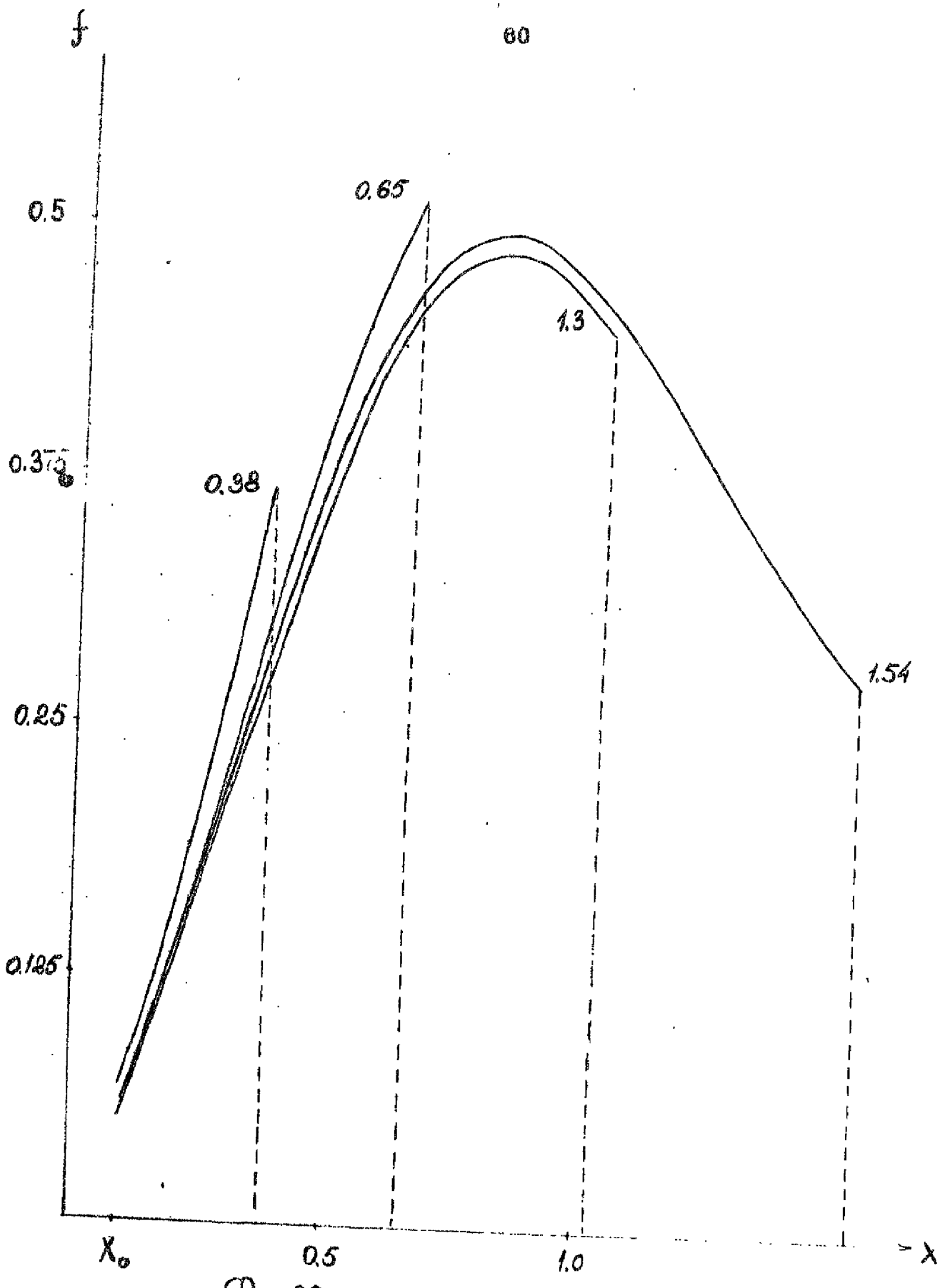
На фиг. 22 изображены профили температуры при фиксированных безразмерных значениях магнитного давления на внешнем и внутреннем поршнях ($P_0 = 1$, $P_* = 10$) в зависимости от различных значений скорости внешней границы электропроводного газа $x = x_*$ (см. цифры на кривых). Из графиков следует, что с ростом скорости внешнего поршня максимальное значение T меняется немонотонно, причем положение максимума температуры сдвигается внутрь области, занятой электропроводным газом.

4. Обсуждение результатов.

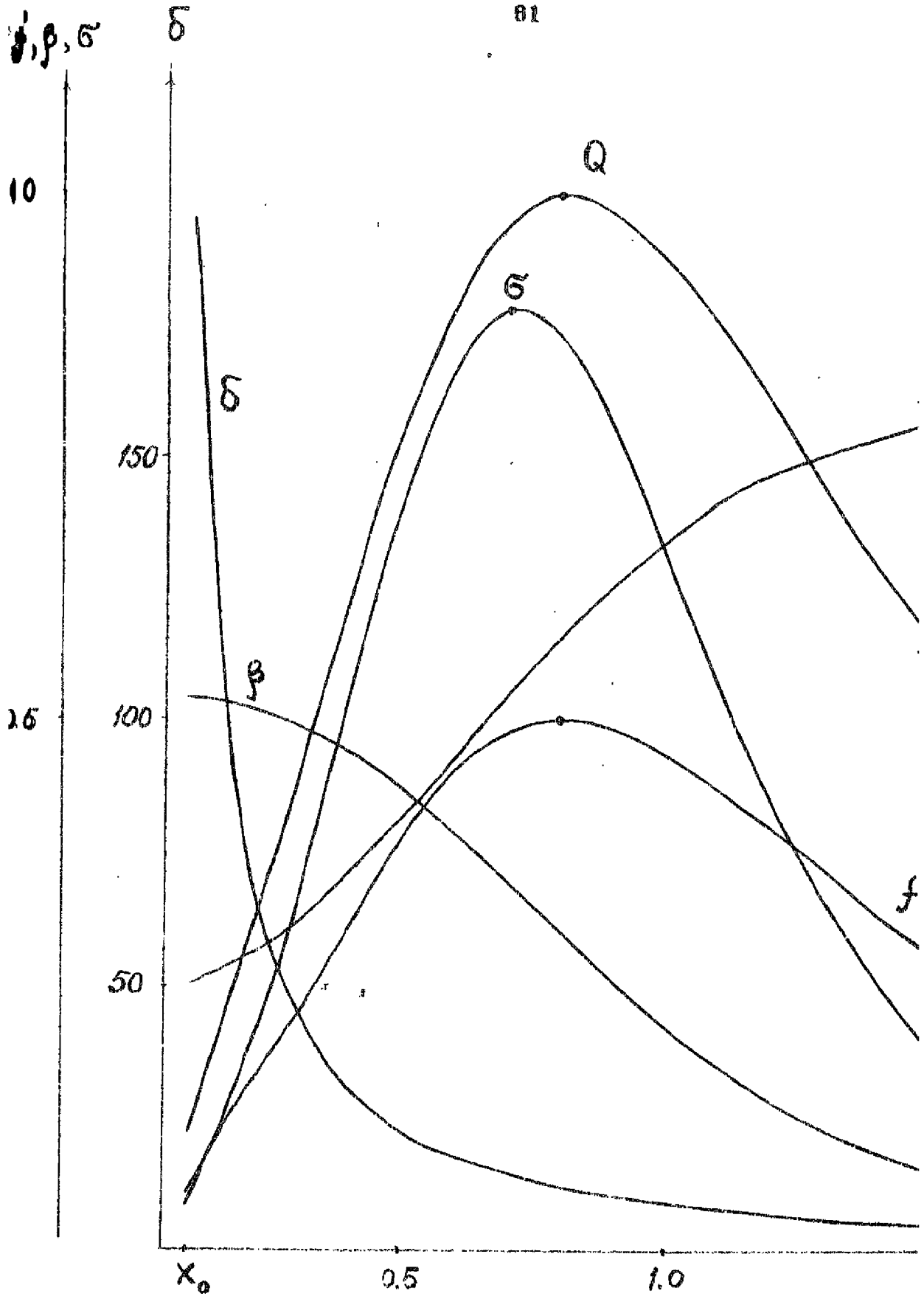
I) На фиг. 23 представлено типичное распределение профилей по автомодельной переменной λ функций температуры f, давления β, плотности ρ, проводимости σ, джоулева нагрева Q и напряженности магнитного поля h при значениях



Фиг. 21



Фиг 22.



Фиг 23

$x_0 = 0{,}1$, $x_* = 1{,}55$, $\rho_0 = 1$, $\rho_* = 10$, $\tilde{\sigma}_0 = 1$, $k_0 = 2$, $q_0 = -1/2$.

Как видно из фиг. 23, а также непосредственно следует из формулы

$$f = \frac{\sigma}{2\delta}\varphi^2 = \frac{\delta \cdot \lambda^2}{2(4\pi)^2\sigma}\cdot\left(h_z'\right)^2 = \frac{1}{2}Q$$

положение максимума температуры совпадает с положением максимума электропроводности и джоулева нагрева. Следовательно, максимум температуры в рассматриваемом автомодельном решении можно отождествить с Т-слоем. При этом, как уже выше отмечалось Т-слой может находиться как на границе с неэлектропроводной средой, так и внутри области, занятой электропроводным газом. Следует еще раз подчеркнуть, что автомодельный режим с Т-слоем может асимптотически установиться, если существуют дополнительные факторы, способные стабилизировать изменение температуры со временем в соответствии с автомодельным законом.

В выше рассмотренном случае такими факторами являются внутренний поршень, поджимающий газ, разлетающийся в холодную среду с заданным на нем законом изменения магнитного поля.

В следующем параграфе настоящей главы будет показано, что роль фактора, стабилизирующего изменение температуры со временем может играть также процесс теплопроводности.

2) Расчеты, проведенные для системы уравнений в частных производных и их сравнение с автомодельным решением, позволили установить также качественную зависимость существования эффекта Т-слоя от закона изменения со временем напряженности магнитного поля, заданного на поршнях, между которыми заключен расширяющийся электропроводный газ.

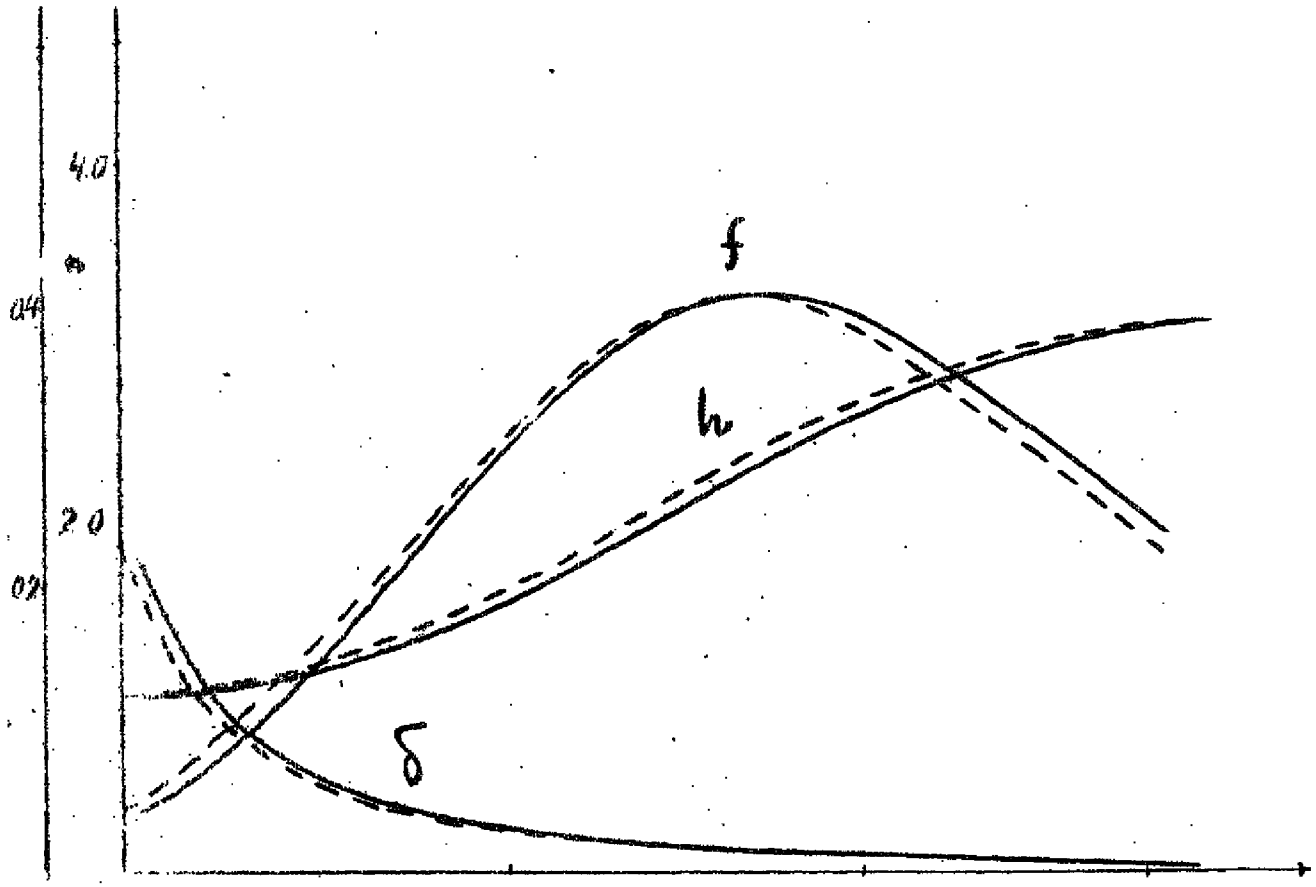
Анализ показал, что при краевых условиях вида (2.29) и

(2.30) ($H_{z_1} \sim t^{-1}$, $H_{z_2} \sim t^{-1}$) и выполнении соответствующих условий автомодельности со временем устанавливается асимптотический режим типа "автомодельного" Т-слоя, анализ которого проведен выше.

На фиг. 24 приведено сравнение профилей безразмерных функций температуры (f), плотности (δ) и напряженности магнитного поля (h) по автомодельной переменной λ, полученных по формулам (2.28) (штрих-пунктирные линии) с соответствующими профилями, полученными в результате численного решения на установление исходной системы в частных производных (сплошные линии).

Если на обоих поршнях, при прочих равных условиях, задается постоянное магнитное поле ($H_{z_1} = Const$, $H_{z_2} = Const$), то на границе каждого из поршней возникает "неавтомодельный" Т-слой. При этом значение температуры выше в том Т-слое, который прилегает к внешнему поршню, где задано наибольшее магнитное давление. На фиг. 25 изображено распределение температуры по массе на некоторый выбранный момент времени соответственно для случаев $H_z \sim t^{-1}$ (кривая I) и $H_z = Const$ (кривая 2). Анализ расчетов показывает, что если закон изменения внешнего магнитного поля на границе "меньше автомодельного", т.е. если $H_z \sim t^{-\bar{n}_0}$, где $\bar{n}_0 > 1$, то в решении Т-слой отсутствует. При $\bar{n}_0 < 1$ Т-слой существует (на фиг. 25 кривая 2 соответствует случаю $\bar{n}_0 = 0$). При $\bar{n}_0 = 1$ имеет место асимптотический режим с вырожденным "автомодельным" Т-слоем.

Таким образом, возникновение Т-слоя в решениях приводит, как правило, к процессам, идущим по-разному вне Т-слоя и внутри него. В Т-слое температура нарастает, вне его - может падать или расти по другому закону, поэтому в общем случае возникнове-



Фиг 24

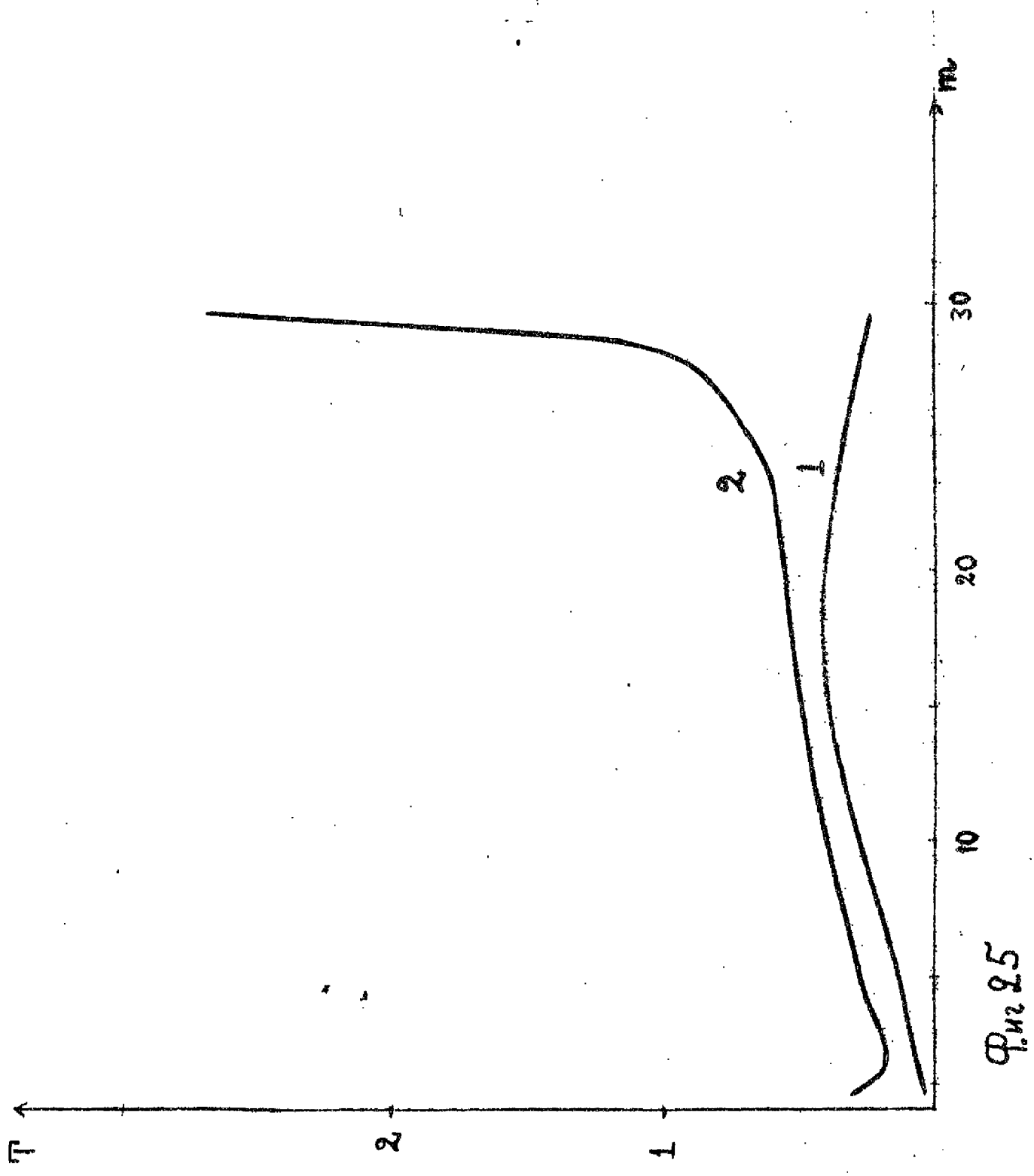


Рис 25

ние Т-слоя в решении означает, что автомодельные решения недопустимы. Но при учете разравнивающих факторов (внутренний поршень или достаточная теплопроводность) закон изменения величин вне Т-слоя и внутри него может стать одинаковым и тогда автомодельность допустима, т.е. может возникнуть так называемый "автомодельный" Т-слой. Поскольку в рассматриваемом автомодельном режиме изменение величин со временем пропорционально значению величины в данной массовой точке, то, например, при режимах с растущей температурой $\mathcal{N}>1$ рост температуры максимален в области Т-слоя и неравномерность нагрева по массе все усиливается (растущий Т-слой). При режимах с падающей во времени температурой $\mathcal{N}<1$ скорость падения максимально велика в области Т-слоя и неравномерность распределения температуры по массе уменьшается (затухающий Т-слой).

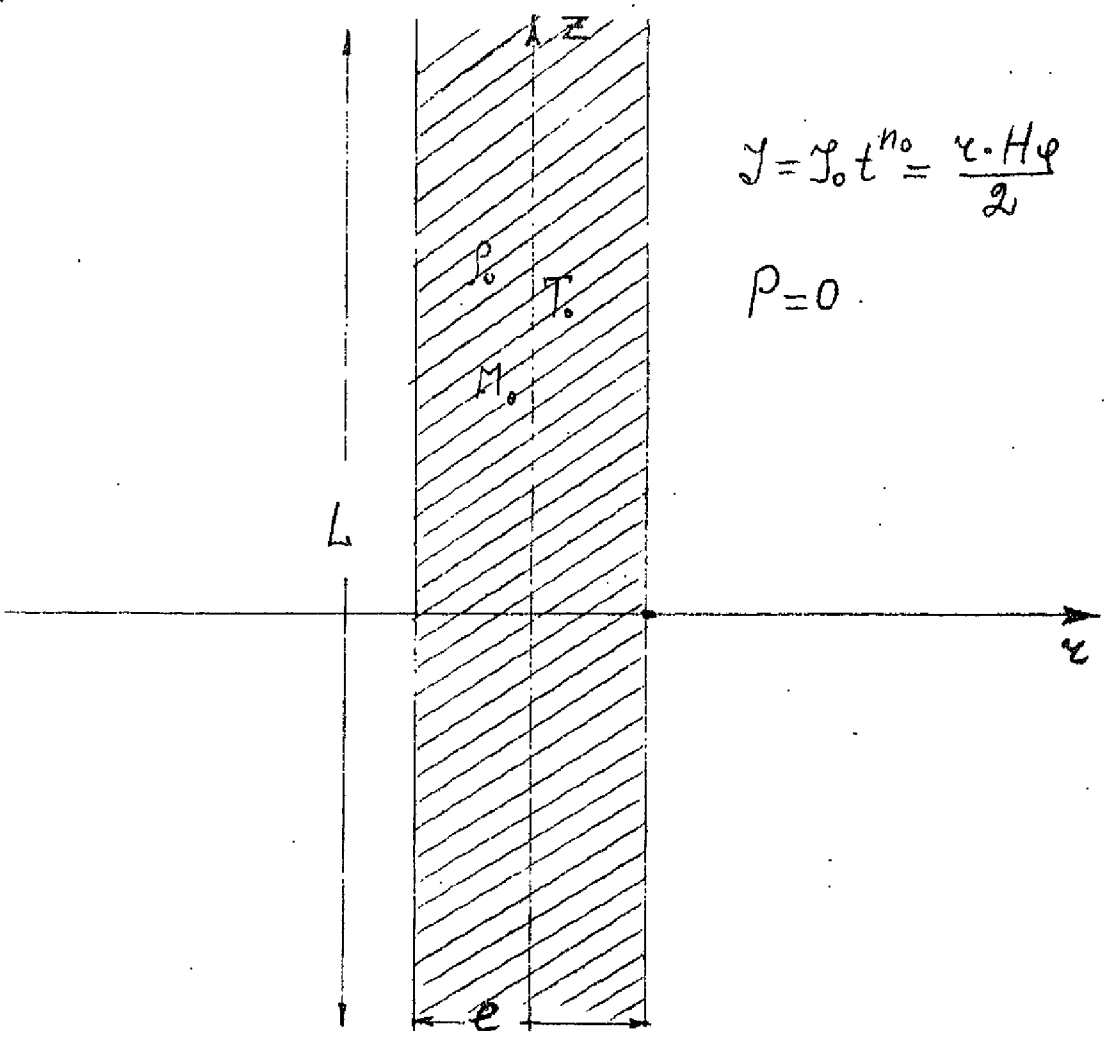
Существенно отметить, что в задаче с полем H_z несмотря на падение интенсивности магнитного поля со временем и в случае, когда теплопроводность не учитывается есть такие законы $\sigma = \sigma(T,\rho)$, при которых рост температуры со временем может происходить до бесконечности. Аналогичное утверждение может быть высказано и при учете закона $\varkappa = \varkappa(T,\rho)$, который не портит автомодельности.

§ 3. Автомодельная задача о разлете паров проволочки в вакуум против магнитного поля H_φ

I. Постановка задачи.

Пусть вдоль оси тонкой длинной проволочки, находящейся в вакууме, пропускается электрический ток J. Выделившаяся при

этом энергия в виде джоулева тепла, вызывает разогрев, испарение и последующий разлет паров проволочки (плазмы) против магнитного поля, созданного собственным током .



Фиг. 26.

Рассмотрим задачу при следующих предположениях:

а) Длина проволочки много больше ее толщины во все время процесса. ($L \geq \ell$ см. фиг. 26) имеет осевая симметрия. В этом случае оправдано исследование процесса разлета в одномерном приближении.

б) Полный ток $\mathcal{J}$ является заданной степенной функцией времени

$$\mathcal{J}=\mathcal{J}_0 \cdot t^{n_0} \qquad (2.34)$$

где J_0, h_0 постоянные.

в) Рассматривается асимптотическая стадия разлета паров проволочки, когда влияние начальных данных не сказывается. Распределение и изменение всех величин устанавливается в соответствии с режимом тока $J = J_0 \cdot t^{n_0}$ и законами зависимости $\sigma = \sigma(T, \rho)$ $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T, \rho)$ (в этом случае начальную плотность можно считать ∞ по сравнению с плотностью паров).

г) Масса расширяющихся паров постоянна и равна начальной массе проволочки

$$M_0 = \int_0^{r_*} \rho \cdot r\, dr = Const \tag{2.35}$$

где $r_* = r_*(t)$ радиус внешней границы (плазма-вакуум).

д) Коэффициенты теплопроводности $\mathcal{H}$ и проводимости σ являются степенными функциями температуры T и плотности ρ. Для общности введем также явную зависимость коэффициентов σ и $\mathcal{H}$ от времени:

$$\frac{\sigma}{c^2} = \sigma_0 \cdot T^{k_0} \cdot \rho^{-q_0} \cdot t^{n_*} \tag{2.36}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \cdot T^{k_1} \cdot \rho^{-q_1} \cdot t^{n_{**}} \tag{2.37}$$

е) Газ подчиняется уравнению состояния идеального газа (2.3).

Задача рассматривается при следующих краевых условиях:

при $r = 0$ выполняются условия симметрии

$$v(0,t) = H_\varphi(0,t) = W(0,t) = 0 \tag{2.38}$$

где $W = -\mathcal{H} \rho \frac{\partial T}{\partial m}$ - тепловой поток.

На границе плазма-вакуум при $r = r_*(t)$, имеем:

$$r_* \cdot H_\varphi(r_*, t) = 2J, \quad P(r_*, t) = 0 \tag{2.39}$$

и одно из условий для тепловых функций либо вида

$$W(r_*, t) = 0 \tag{2.40}$$

(электронная теплопроводность), либо вида

$$T(r_*, t) = 0 \tag{2.40'}$$

либо, наконец, вида

$$W(r_*, t) = \frac{4\bar{\sigma}}{c} T^4 \tag{2.40''}$$

где $\bar{\sigma}$ - постоянная Стефана-Больцмана, c - скорость света. Процесс расширения и взаимодействия цилиндрического столба плазмы с магнитным полем описывается системой уравнений магнитной гидродинамики (I.I), которую удобно записать, учитывая (2.3), в следующем виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -r \frac{\partial p}{\partial m} - \frac{1}{\rho} j_z \cdot H_\varphi \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial m}(r \cdot v) \tag{2.42}$$

$$\frac{R}{\gamma - 1} \frac{\partial T}{\partial t} = -p \frac{\partial}{\partial m}(r \cdot v) - \frac{\partial}{\partial m}(r \cdot W) + Q \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = -H \cdot \rho \cdot r \frac{\partial v}{\partial m} + \rho \cdot r \cdot \frac{\partial E_z}{\partial m} \tag{2.44}$$

$$E_z = \frac{\rho \cdot c^2}{4\pi\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial m}(r \cdot H_\varphi) \tag{2.45}$$

где $j_z = \frac{1}{4\pi} \rho \cdot \frac{\partial}{\partial m}(r \cdot H_\varphi) = \frac{\sigma}{c^2} \cdot E_z$ - плотность тока,

$Q = \frac{c^2 j^2}{\sigma \cdot \rho} = \frac{\sigma}{c^2 \rho} E_z^2$ - джоулев нагрев в единице массы,

m - массовая лагранжева координата.

2. Условия автомодельности. Система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Анализ размерностей показывает, что решение задачи (2.34)–(2.45) является автомодельным при выполнении определенных соотношений между постоянными n_0 (показатель закона изменения тока со временем), k_0, q_0, k_1, q_1, n_* и n_{**}

Если для тепловых функций рассматриваются нулевые краевые условия (условия вида (2.40), (2.40')), то условия автомодельности имеют вид:

$$n_0+1=\frac{2k_0+1-n_*}{2(k_0+1)+2q_0}=\frac{2k_1-1-n_{**}}{2(k_1+q_1)} \qquad (2.46)$$

При условии (2.40") класс автомодельных решений ограничен. Кроме условия (2.46) должно выполняться также условие

$$n_0=-\frac{2}{7} \qquad (2.47)$$

т.е. режим разлета с условием (2.40") может быть автомодельным на отадии падения тока $\mathcal{J}$ по закону $\mathcal{J}\sim t^{-2/7}$

Остановимся подробнее на условиях автомодельности (2.46). Из (2.46) следует, что в автомодельном режиме закон изменения тока со временем по-существу определяется заданным законом зависимости коэффициентов электропроводности и теплопроводности от температуры и плотности. Наиболее интересным является случай, когда полный ток $\mathcal{J}$ постоянен или растет со временем, т.е. $n_0\geq 0$.

В этом случае требование автомодельности режима накладывает следующие условия на показатели зависимости σ и $\mathcal{H}$ от плотности ρ :

$$q_0\leq-\frac{1}{2}(n_*+1)\,,\quad q_1\leq-\frac{1}{2}(n_{**}+1)$$

В частности, при $n_*=n_{**}=0$ имеем $q_0\leq-\frac{1}{2}$, $q_1\leq-\frac{1}{2}$. Таким образом, условие $n_0\geq 0$ выполняется, если коэффициенты

проводимости и теплопроводности прямо пропорциональны плотности. Такая зависимость коэффициентов от плотности существенно влияет на теплопроводность лишь вблизи границы с вакуумом. Условие прямой пропорциональной зависимости проводимости от плотности может моделировать тот факт, что при приближении к границе с вакуумом электропроводность более резко убывает, чем степенная функция температуры T^{K_0}.

Приведем примеры конкретных зависимостей σ и $\varkappa$ от температуры и плотности, при которых задача (2.34)-(2.45) автомодельна.

Если для тепловых функций заданы условия (2.40) или (2.40'), то в случае $\sigma = \sigma_0 \cdot T^{3/2}$ (известный закон "трех вторых" для полностью ионизованного газа, см. например [22]), задача (2.34)-(2.45) автомодельна при $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 t^{-1/5}$, например, при следующих выражениях для коэффициента теплопроводности : либо $\varkappa = \varkappa_0 \cdot T^{5/2}$ (коэффициент электронной теплопроводности для полностью ионизованной плазмы), либо $\varkappa = \varkappa_0 \cdot T^6 \rho^{-7/8}$ (выражение, близкое к модели лучистой теплопроводности (см. [23], [24]).

Если $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 = Const$ (заданный полный ток постоянен), то задача автомодельна при следующих выражениях для σ и $\varkappa$:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot T^{K_0} \cdot \rho^{1/2}, \quad \varkappa = \varkappa_0 \cdot T^{K_1} \cdot \rho^{1/2}$$

где K_0 и K_1 произвольны.

Наконец, при краевом условии для тепловых функций вида (2.40") задача автомодельна, например, при σ и $\varkappa$ имеющих вид:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot T^{3/2} \cdot \rho^{-0,3}, \quad \varkappa = \varkappa_0 \cdot T^6 \cdot \rho^{-1,7}$$

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением задач с тепловым условием вида (2.40') (температура на границе вакуум-

вещество равна нулю).

При выполнении условий автомодельности (2.46) исходную систему в частных производных (2.41)-(2.45) можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно одной автомодельной переменной.

Выберем за определяющие параметры с независимой размерностью постоянные $\mathcal{J}_0$, M_0 и R. В силу автомодельности, остальные постоянные параметры задачи выражаются через $\mathcal{J}_0, M_0, R$ следующим образом:

$$\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 \cdot M_0^{k_0+1+2q_0} \cdot R^{r_0} \cdot \mathcal{J}_0^{-2(k_0+q_0+1)} \qquad (2.48)$$

$$\mathcal{H}_0 = \tilde{\mathcal{H}}_0 \cdot M_0^{k_1+1+2q_0} \cdot R^{r_1+1} \cdot \mathcal{J}_0^{-2(k_1+q_1)}$$

где $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\mathcal{H}}_0$ безразмерные постоянные.

В соответствии с (2.46) все искомые функции представляются в виде:

$$v(m,t) = \alpha(s) M_0^{-0,5} \mathcal{J}_0 \cdot t^{n_0}, \quad r(m,t) = \lambda(s) \cdot M_0^{-0,5} \mathcal{J}_0 \cdot t^{n_0+1}$$
$$\rho(m,t) = \beta(s) \cdot M_0^2 \cdot \mathcal{J}_0^{-2} \cdot t^{-2(n_0+1)}, \quad T(m,t) = f(s) R^{-1} M_0^{-1} \mathcal{J}_0^2 t^{2n_0} \qquad (2.49)$$
$$P(m,t) = \beta(s) \cdot M_0 \cdot t^{-2}, \quad H(m,t) = h(s) \cdot M_0^{0,5} \cdot t^{-1}$$
$$E_z(m,t) = \mathcal{J}(s) \cdot \mathcal{J}_0 \cdot t^{n_0-1}, \quad W(m,t) = w(s) M_0^{0,5} \cdot \mathcal{J}_0 \cdot t^{n_0-2}$$

$$\frac{\sigma(m,t)}{c^2} = \tilde{\sigma}(s) \cdot M_0 \cdot \mathcal{J}_0^{-2} \cdot t^{-(1+2n_0)}$$

Независимая автомодельная переменная s имеет вид:

$$s = \frac{m}{M_0} \qquad (2.49)$$

В силу автомодельности функции $\alpha, \lambda, \delta, f, \beta, h, \tilde{\sigma}, \varphi, \omega$ зависят только от одной переменной S . Используя (2.48)-(2.49), получим из (2.4I)-(2.45) (аналогично § 2) выражение для безразмерной функции окорости вида:

$$\alpha = (n_0+1)\lambda \tag{2.50}$$

Для определения остальных функций получим, используя (2.50), следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений отноосительно переменной S :

$$\varphi' = n_0 \frac{h}{\delta \cdot \mathcal{R}} \tag{2.5I}$$

$$(\lambda h)' = 4\pi \cdot \frac{\tilde{\jmath}}{\delta} \tag{2.52}$$

$$\lambda\beta' = -\frac{1}{\delta}\tilde{\jmath}h - n_0(n_0+1)\lambda \tag{2.53}$$

$$\frac{2n_0}{\gamma-1} f = -2(n_0+1)\frac{\beta}{\delta} + \frac{\tilde{\sigma}}{\delta}\varphi^2 - (\lambda\omega)' \tag{2.54}$$

$$\delta \cdot \lambda \cdot \lambda' = 1 \tag{2.55}$$

$$\omega = \mathcal{H}\delta \cdot \lambda \cdot f' \tag{2.56}$$

где

$$\tilde{\jmath} = \tilde{\sigma}\varphi, \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 f^{\kappa_0}\delta^{-q_0}, \quad \tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_0 f^{\kappa_1}\delta^{-q_1}, \quad \beta = \delta \cdot f$$

Через φ', h', β' и т.д. в системе (2.5I)-(2.56) обозначены производные по переменной S .

Уравнение энергии (2.54) можно представить также в следующем виде:

$$2n_0\left[\frac{(n_0+1)^2}{2}\lambda^2 + \frac{1}{\gamma-1}f + \frac{h^2}{8\pi\delta}\right] + \left\{\lambda\left[(n_0+1)\lambda\left(\beta + \frac{h^2}{8\pi}\right) + \omega - \frac{1}{4\pi}h\varphi\right]\right\}' = 0 \tag{2.54'}$$

Краевые условия (2.38), (2.39), (2.40') в автомодельных переменных (2.49) примут вид:

$$h(0)=0\ ,\quad \omega(0)=0 \qquad (2.57)$$
$$\lambda_*\cdot h_*(1)=2\ ,\quad \beta(1)=0\ ,\quad f(1)=0$$

Значение параметра $\lambda_*=\gamma_*\cdot M_0^{1/2}\mathcal{J}_0^{-1}\cdot t^{n_0+1}$ (внешний радиус) определяется из решения.

Таким образом, при сделанных предположениях решение задачи (2.34)-(2.45) о разлете паров проволочки в вакуум против магнитного поля сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.51)-(2.56) при краевых условиях (2.57).

3. Размерностный анализ автомодельных решений.

Прежде, чем переходить к исследованию соответствующей системы в автомодельных переменных и построению автомодельных решений, проведем их общий размерностный анализ.

Используя (2.49) и условие автомодельности (2.46), выпишем ряд наиболее интересных величин и охарактеризуем их зависимость от параметров $M_0, \mathcal{J}_0, R$ и времени t. При этом, в формулах (2.36) и (2.37) положим $n_*=0$, $n_{**}=0$ (теплопроводность и проводимость не зависят явно от времени).

1) Материальное и соответственно магнитное давление (см. формулы (2.49)) независимо от вида функций $\sigma=\sigma(T,\rho)$ и $\mathcal{H}=\mathcal{H}(T,\rho)$ и закона изменения со временем полного тока убывают со временем пропорционально t^{-2}.

2) При $n_0>0$ (полный ток растет со временем) расширение газа происходит с ускорением. При $n_0<0$ (полный ток убывает со временем) разлет происходит с замедлением. Если $n_0=0$ (пол-

ный ток через плазму постоянен) скорость разлета постоянна во времени. При этом, как следует из выражения скорости в формулах (2.49), чем больше масса проволочки M_0, тем скорость разлета меньше. При фиксированном M_0 скорость растет прямо пропорционально току J_0.

3) При $n_0>0$ или $n_0<0$ температура (T) соответственно растет или убывает со временем. В случае $n_0=0$ T не меняется со временем.

Из выражения для температуры (см. (2.49)) следует, что чем меньше масса проволочки M_0 или чем больше полный ток J, пропускаемый сквозь плазму, тем температура в установившемся автомодельном режиме выше.

4) Величину полного сопротивления паров проволочки на единицу длины можно предотавить в следующем виде:

$$R_{conp} = \frac{1}{2\pi c^2 \int_0^{r_*} \frac{\sigma}{c^2} r\,dr} = \tilde{R}_0 \frac{1}{c^2} \cdot t^{-1} \qquad (2.58)$$

где $\tilde{R}_0$ некоторая безразмерная постоянная.

Из (2.58) следует важный факт: величина полного сопротивления паров в автомодельном режиме не зависит ни от величины массы проволочки, ни от J_0, ни от характера вещества $\hat{\kappa}$.

При любых $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\mathcal{H}}$ и n_0 вследствие разлета и увеличения сечения величина R_{conp} убывает обратно пропорционально времени.

5) Величина полной энергии, заключенной в объеме, занимаемом парами проволочки, имеет вид:

$$\mathcal{E} = \int_0^{r_*} \left(\rho \cdot \frac{v^2}{2} + \rho \frac{R \cdot T}{\gamma - 1} + \frac{H^2}{8\pi}\right) r \cdot dr = \tilde{\mathcal{E}}_0 \cdot J_0^2 \cdot t^{2n_0} \qquad (2.59)$$

где $\tilde{\mathcal{E}}_0$ - безразмерная постоянная.

Из (2.59) следует, что если полный ток постоянен ($h_0=0$), то любая величина, имеющая размерность энергии, также постоянна.

Как известно, условие постоянства энергии выполняется в задаче о сильном взрыве в атмосфере (см. [25], [26]). В результате взрыва от центра или оси симметрии распространяется ударная волна и, следовательно, масса нагретого газа увеличивается (масса ф является функцией времени). Выделившаяся полная энергия в объеме, занятом газом, постоянна с самого начала процесса. В отличие от этих работ в рассматриваемой нами задаче о разлете паров проволочки при заданном режиме тока $J(t)$ наряду с постоянной энергией сохраняется постоянной полная масса проволочки M_0. Если разогретая проволочка разлетается в вакуум в отсутствии магнитного поля, то выделившаяся при $t=0$ энергия $\mathcal{E}_0$ с течением времени должна перейти в кинетическую энергию, а плазма охладиться. Можно показать, что без учета магнитного поля соответствующая автомодельная задача имеет тривиальное решение: $v = const \cdot r/t$, $T \equiv 0$

Если пары проволочки разлетаются против магнитного поля, то режим постоянной энергии при постоянной полной массе может установиться асимптотически лишь при такой ситуации, когда джоулев нагрев будет компенсироваться работой охлаждения и теплоотдачей.

Численные решения исходной системы в частных производных на ЭВМ показали, что режим с постоянной энергией действительно существует и при выполнении условий автомодельности (2.46) устанавливается со временем независимо от выбора начальных данных (см. ниже фиг. 33–35).

6) Выражение электропроводности имеет вид:

$$\frac{\sigma}{c_2} = \tilde{\sigma}(s) \cdot M_0 \cdot \mathcal{Y}_0^{-2} \cdot t^{-(1+2n_0)}$$

При $n_0 > -0{,}5$ электропроводность паров убывает со временем. При $n_0 = -0{,}5$ функция σ в каждой точке массы постоянна во времени и при $n_0 < -0{,}5$ растет со временем.

Перейдем теперь к изложению анализа и результатов отдельных решений задачи (2.36)-(2.45).

4. Автомодельное решение для случая $n_0 = 0$, $\sigma = \sigma_0 / t$

Рассмотрим случай $K_0 = 0$, $q_0 = 0$ (проводимость не зависит от температуры и плотности среды).

Задача (2.36)-(2.45) в этом случае автомодельна при следующих выражениях коэффициентов проводимости и теплопроводности:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot t^{-1}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 T^{K_1} \rho^{-q_1} \cdot t^{-(1+2q_1)} \qquad (2.60)$$

где постоянные K_1 и q_1 произвольны.

Зависимость σ от времени в (2.60) очень *искусственна*. Однако, как показывают расчеты, это обстоятельство не влияет на качественную сторону результатов. Поэтому анализ решения этого варианта, которое, как показано ниже, может быть получено аналитическим путем, имеет достаточно общий характер.

Интегрирование системы в автомодельных переменных (2.51)-(2.56) при краевых условиях (2.57) и при $n_0 = K_0 = q_0 = 0$ приводит к следующим выражениям для безразмерных функций давления β, магнитного поля h, потока тепла ω и температуры f через безразмерный радиус λ:

$$\beta = \frac{1}{\pi \lambda_*^4} \cdot (\lambda_*^2 - \lambda^2) \qquad (2.61)$$

$$h = \frac{2}{\lambda_*^2} \cdot \lambda \qquad (2.62)$$

$$\omega = \frac{1}{2\pi\lambda_*^4}\cdot\lambda\cdot\left(\frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0} - 2\lambda_*^2 + \lambda^2\right) \tag{2.63}$$

$$f = \left\{A\left[(B-1)\lambda_*^2 + \lambda^2\right]\cdot\left(\lambda_*^2 - \lambda^2\right)^{q_1+1}\right\}^{\frac{1}{\kappa_1+q_1+1}} \tag{2.64}$$

где

$$A = \frac{\kappa_1+q_1+1}{4\mathcal{H}_0(q_1+2)\pi^{q_1+1}\cdot\lambda_*^{4(q_1+1)}}\,,\quad B = \frac{q_1+2}{q_1+1}\left(\frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0\lambda_*^2} - 1\right)$$

постоянные. Значение λ_* (безразмерная скорость разлета $\alpha_* = \lambda_*$) определяется условием постоянства массы паров проволочки (см. условие (2.35)):

$$1 = \int_0^{\lambda_*}\frac{\beta}{f}\cdot\lambda\,d\lambda = \mathcal{D}\int_0^{\lambda_*}\frac{\left(\lambda_*^2-\lambda^2\right)^{\frac{\kappa_1}{\kappa_1+q_1+1}}}{\left[(B-1)\lambda_*^2+\lambda^2\right]^{\frac{1}{\kappa_1+q_1+1}}}\cdot\lambda\,d\lambda \tag{2.65}$$

где $\mathcal{D} = \frac{1}{\pi\lambda_*^4\cdot A^{\frac{1}{\kappa_1+q_1+1}}}$ постоянная. Для перехода к массовым переменным можно использовать формулу вида $S = \int_0^{\lambda}\frac{\beta}{f}\lambda\,d\lambda$

Напряженность электрического поля и плотность тока постоянны по радиусу и имеют вид:

$$\varphi = \frac{1}{\pi\tilde{\sigma}\cdot\lambda_*^2}\,,\quad \tilde{j} = \tilde{\sigma}_0\cdot\varphi = \frac{1}{\pi\lambda_*^2} \tag{2.66}$$

Из выражения (2.64) следует, что решение имеет смысл ($f(\lambda)\geq 0$ во всей области значений $0\leq\lambda\leq\lambda_*$), если выполняется неравенство $B\geq 1$ или

$$\lambda_*^2 \leq \frac{q_1+2}{2q_1+3}\cdot\frac{1}{\pi\cdot\tilde{\sigma}_0} \tag{2.67}$$

Анализ решения (2.61)-(2.64) показывает, что давление β является монотонно убывающей, а напряженность магнитного поля h – монотонно возрастающей функцией по λ. Функция температуры f может быть немонотонной по λ. Координата положе-

ния максимума температуры, находящегося внутри области значений $0 < \lambda < \lambda_*$, определяется выражением

$$\lambda_k^2 = 2\lambda_*^2 - \frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0} \tag{2.68}$$

При этом, максимальное значение функции f имеет вид:

$$f_k = \left[\frac{K_1+q_1+1}{4\tilde{\mathcal{H}}_0(q_1+2)(q_1+1)\pi^{q_1+1}\cdot\lambda_*^{2q_1}}\left(\frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0\lambda_*^2}-1\right)^{q_1+2}\right]^{\frac{1}{K_1+q_1+1}} \tag{2.69}$$

Из (2.67) и (2.68) следует, что максимум температуры находится внутри области значений $0<\lambda<\lambda_*$, если выполняется неравенства вида

$$\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}_0} < \lambda_*^2 < \frac{q_1+2}{2q_1+3}\cdot\frac{1}{\pi\cdot\tilde{\sigma}_0} \tag{2.70}$$

или, что то же самое,

$$2 < Re_m^* < 4\,\frac{q_1+2}{2q_1+3}$$

где $Re_m^* = 4\pi\tilde{\sigma}_0\lambda_*^2$ – магнитное число Рейнольдса на границе вакуум-пары. При $Re_m^* \le 2$ максимум f всегда находится на оси цилиндра.

Установим зависимость структуры автомодельного решения (2.61)-(2.64) от параметров $\tilde{\mathcal{H}}_0$ и $\tilde{\sigma}_0$, входящих соответственно в коэффициенты теплопроводности и электропроводности.

Для этого рассмотрим ряд частных случаев.

а) Пусть $K_1=0$, $q_1=0$ (коэффициенты теплопроводности и электропроводности не зависят от температуры и плотности). В этом случае, интегрируя (2.65), получим, что скорость разлета паров $\alpha_* = \lambda_*$ следующим образом определяется через параметры $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\mathcal{H}}_0$:

$$\lambda_*^2 = \frac{2}{3\pi\tilde{\sigma}_0}\,\frac{e^{\frac{1}{4\tilde{\mathcal{H}}_0}}-1}{e^{\frac{1}{4\tilde{\mathcal{H}}_0}}-\frac{2}{3}}\,, \qquad \tilde{\mathcal{H}}_0>0 \tag{2.71}$$

Из (2.71) следует, что скорость разлета паров проволочки обратно пропорциональна $\sqrt{\tilde{\sigma}_0}$ и уменьшается также с ростом $\tilde{\mathcal{H}}_0$.

Подставляя (2.71) в неравенство (2.70), получим, что максимум температуры находится внутри области значений $0<\lambda<\lambda_*$ при

$$0<\tilde{\mathcal{H}}_0<\frac{1}{4\ln 2} \tag{2.72}$$

При $\tilde{\mathcal{H}}_0 \geq \frac{1}{4\ln 2}$ максимум T всегда находится на оси симметрии $(\lambda=0)$.

б) Рассмотрим теперь простейший случай нелинейной теплопроводности $\kappa_1=1,\ q_1=0$ $\left(\mathcal{H}=\tilde{\mathcal{H}}_0\cdot T/t\right)$

Интегрируя (2.65), получим следующую связь между параметрами $\tilde{\mathcal{H}}_0$, $\tilde{\sigma}_0$ и λ_*:

$$\tilde{\mathcal{H}}_0=\frac{\pi}{\left(B\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{B}}-\sqrt{B-1}\right)^2}\,, \quad B=2\left(\frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0\lambda_*^2}-1\right) \tag{2.73}$$

Равенство (2.73) полностью определяет значение параметра λ_* через заданные постоянные параметры $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\mathcal{H}}_0$.

Ранее отмечалось, что автомодельное решение вида (2.61)–(2.64) существует (имеет физический смысл) при $B\geq 1$ (при $B<1$ имеем $f(0)<0$). Непосредственно из (2.73) следует, что неравенство $B\geq 1$ приводит к ограничению снизу на параметр $\tilde{\mathcal{H}}_0$, при котором существует рассматриваемое автомодельное решение:

$$\tilde{\mathcal{H}}_0\geq\tilde{\mathcal{H}}_{01}=\frac{4}{\pi} \tag{2.74}$$

Используя (2.73), получим из (2.70), что температура f

достигает максимума внутри области $0<\lambda<\lambda_*$ в определенном диапазоне изменения коэффициента теплопроводности

$$\frac{4}{\pi}=\tilde{\varkappa}_{01}\le\tilde{\varkappa}_0<\tilde{\varkappa}_{02}=\frac{4}{\pi(1-2/\pi)^2} \qquad (2.75)$$

При $\tilde{\varkappa}_0\ge\tilde{\varkappa}_{02}$ максимум температуры всегда находится на оси симметрии $\lambda=0$.

Величина максимума температуры определяется формулами

$$f_{max}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{\pi\tilde{\varkappa}_0}}B & \text{при } \dfrac{4}{\pi}\le\tilde{\varkappa}_0\le\dfrac{4}{\pi(1-\frac{2}{\pi})^2}\\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\tilde{\varkappa}_0}}\sqrt{B-1} & \text{при } \tilde{\varkappa}_0\ge\dfrac{4}{\pi(1-2/\pi)^2}\end{cases} \qquad (2.76)$$

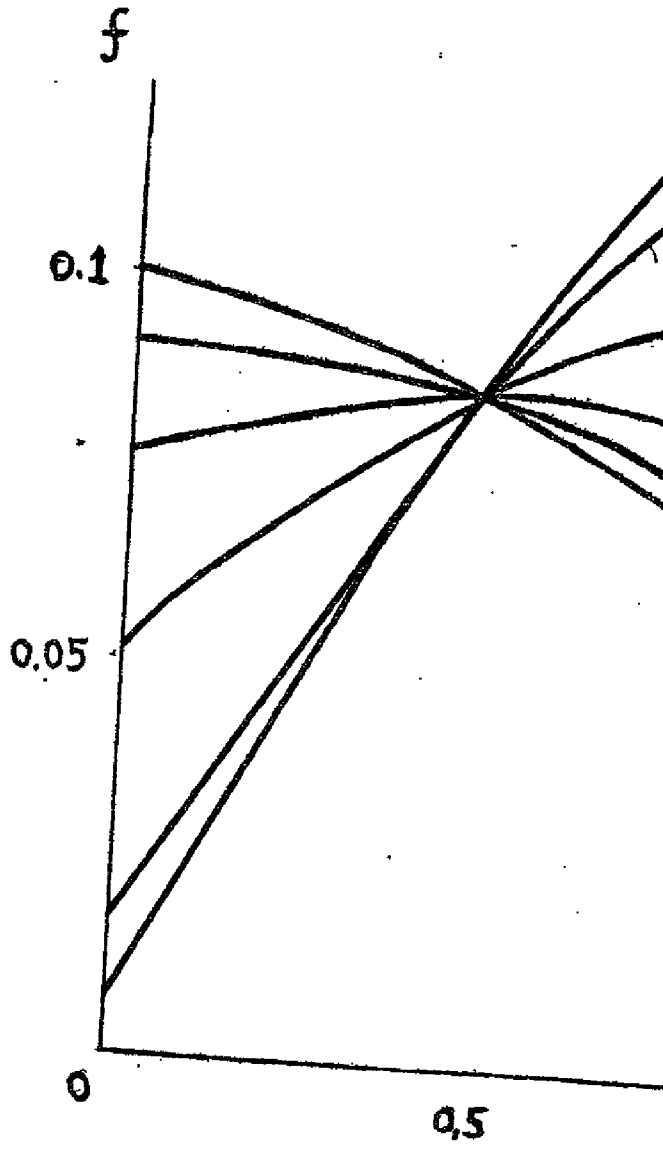
Из (2.76) следует, что, так как при фиксированном $\tilde{\varkappa}_0$ фиксировано также значение постоянной B (см. формулу (2.73)), величина f_{max} не зависит от значения параметра $\tilde{\sigma}_0$, входящего в коэффициент электропроводности. Изменение $\tilde{\sigma}_0$ влияет лишь на скорость разлета $\alpha_*=\lambda_*$, $\lambda_*\sim 1/\sqrt{\tilde{\sigma}_0}$.

На фиг. 27, 28 изображены профили функций температуры f и соответственно напряженности магнитного поля $\lambda\cdot h$ по безразмерной массовой переменной S для различных значений $\tilde{\varkappa}_0$ при фиксированном $\tilde{\sigma}_0$ ($\tilde{\sigma}_0=0{,}02$; значения $\tilde{\varkappa}_0$ указаны соответствующим номером на графике).

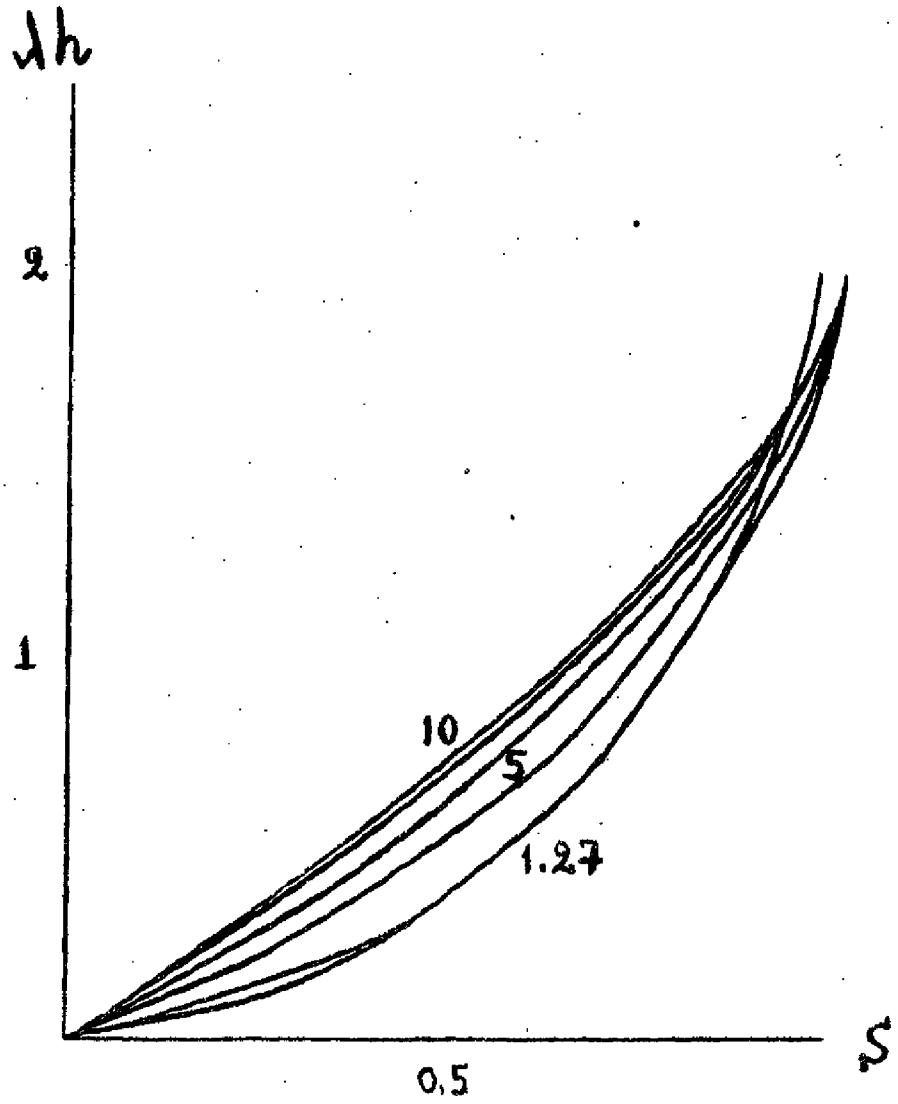
На фиг. 29 и 30 изображены соответственно профили безразмерных функций плотности δ и скорости α по безразмерной переменной λ при различных $\tilde{\varkappa}_0$.

Из графиков видно, что с ростом $\tilde{\varkappa}_0$ максимум температуры уменьшается и перемещается к оси симметрии. При $\tilde{\varkappa}_0\to\infty$ име-

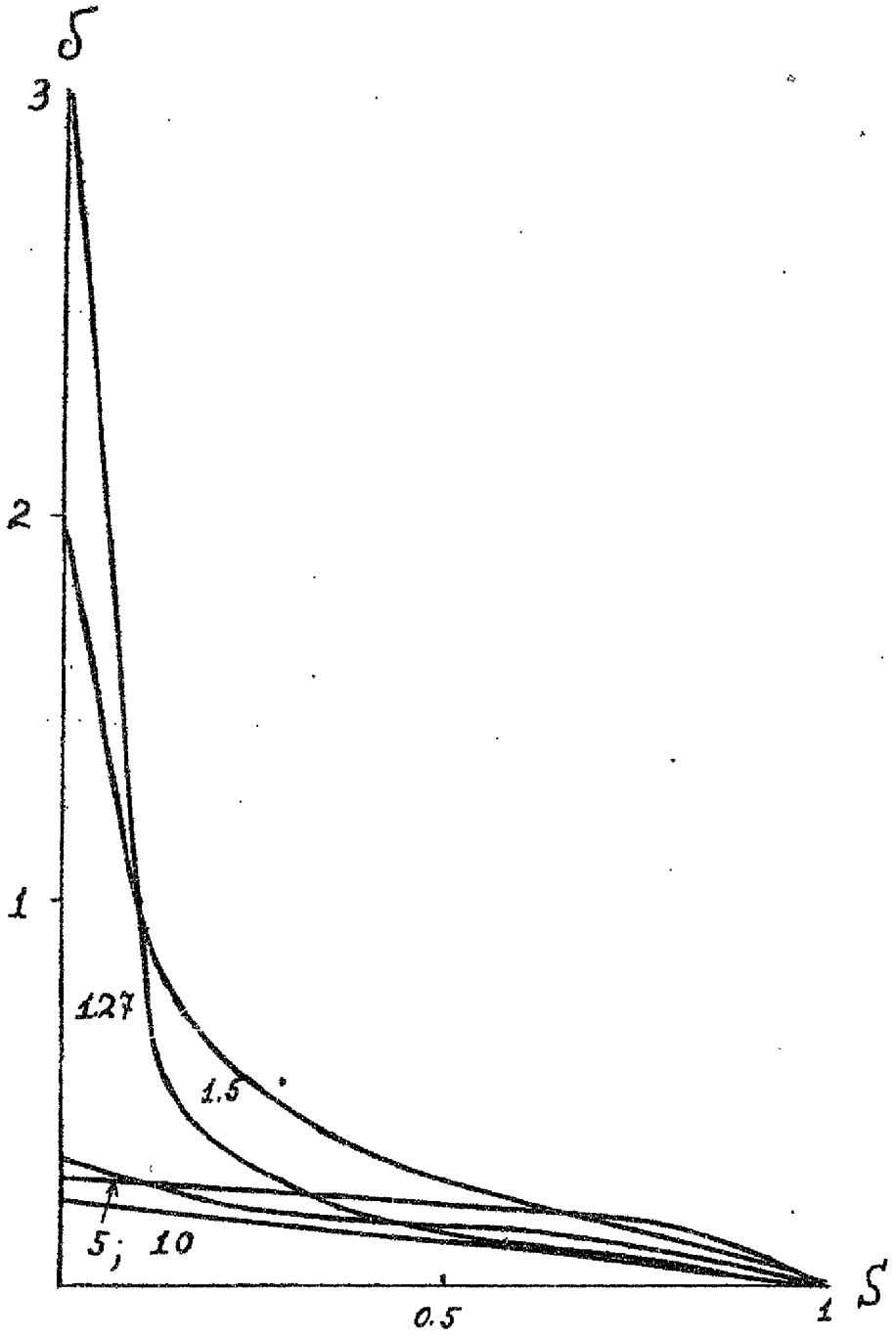
1,27
1,5
2,5
5
10



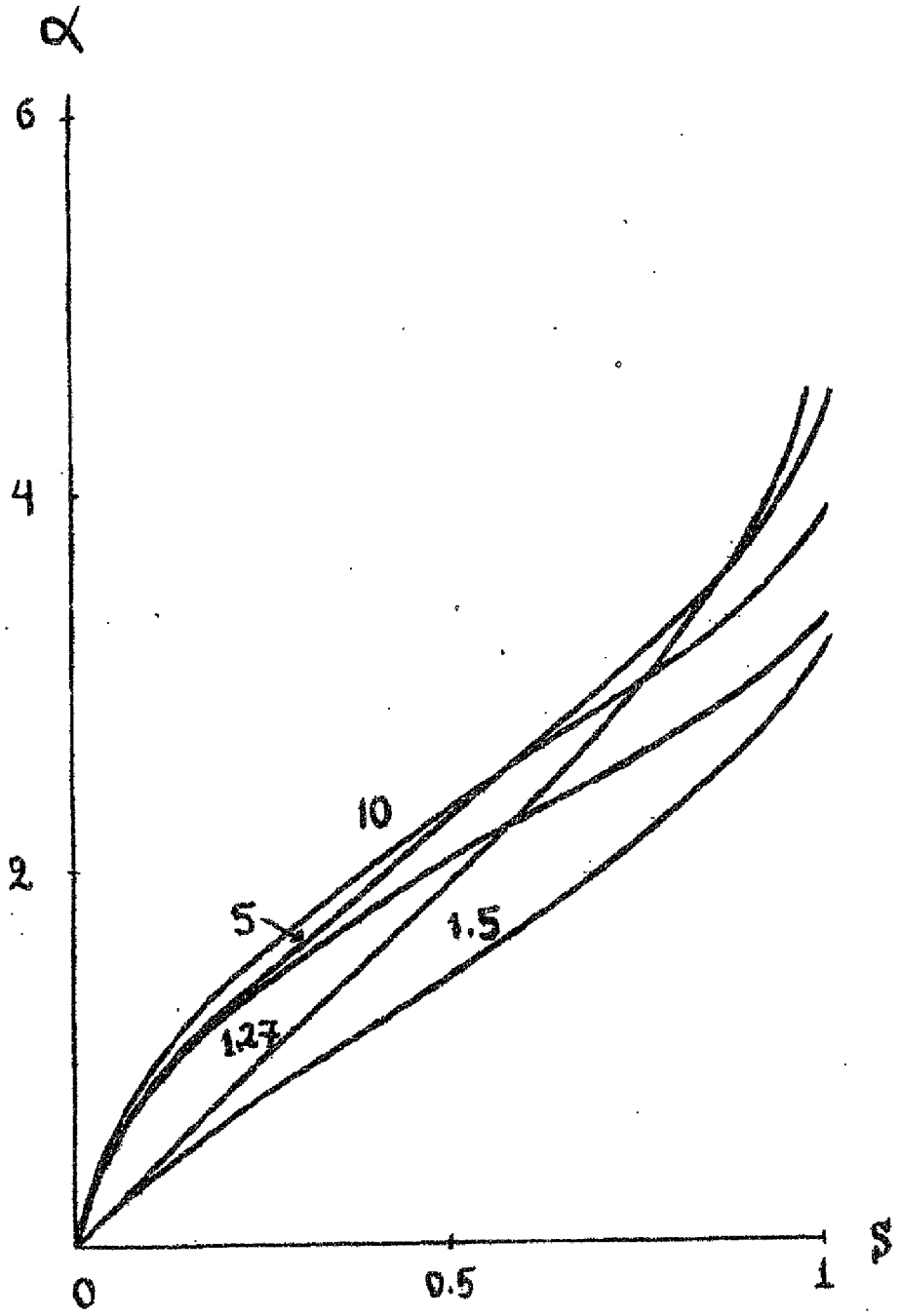
Фиг 27



Фиг 28



Фиг 29



Фиг 30

и $f(0) \to Const = \frac{1}{3\pi}$.

Мы видели, что в случае $K_1 = 0$, $q_1 = 0$ автомодельное решение вида (2.61)-(2,64) существует при $\widetilde{\mathcal{H}}_0 > 0$. В случае $K_1 = 1$, $q_1 = 0$ значения $\widetilde{\mathcal{H}}$ ограничены постоянной величиной, отличной от нуля: $\widetilde{\mathcal{H}}_0 \geq \widetilde{\mathcal{H}}_{01} \neq 0$. Расчеты показывают, что с ростом K_1 , т.е. с ростом нелинейной зависимости коэффициента теплопроводности увеличивается значение $\widetilde{\mathcal{H}}_{01}$ - нижняя граница параметров $\widetilde{\mathcal{H}}_0$, при которых существует рассматриваемое автомодельное решение.

Обсуждение результатов решения проводится ниже в п. 6 настоящего параграфа.

5. Анализ решения для случая $n_0 = 0$, $\sigma = \sigma(T, \rho)$

Пусть по-прежнему, как и в п. 4, заданный полный ток не меняется со временем ($n_0 = 0$), но электропроводность σ является функцией температуры и плотности.

Из условий автомодельности (2.46) следует, что при $n_0 = 0$ задача (2.34)-(2.45) автомодельна при следующих выражениях для коэффициентов σ и $\mathcal{H}$:

$$\sigma = \sigma_0 T^{K_0} \rho^{-q_0} t^{-(1+2q_0)}, \quad \mathcal{H} = H_0 \cdot T^{K_1} \rho^{-q_1} \cdot t^{-(1+2q_1)}$$

где K_0, q_0, K_1, q_1 произвольны.

При $n_0 = 0$ интегрируется уравнение энергии (2.54') и уравнение (2.51). Используя выражения для безразмерных функций напряженности электрического поля φ и потока тепла ω вида:

$$\varphi = \varphi_* = const \tag{2.77}$$

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \varphi_* \cdot h - \lambda \left(\beta + \frac{h^2}{8\pi} \right) \tag{2.78}$$

а также уравнения непрерывности (2.55) и уравнение состояния

$\delta = \beta / f$, запишем систему (2.51)-(2.56), выбрав за независимую переменную безразмерное значение радиуса λ . Система будет иметь вид:

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda \cdot h) = 4\pi \varphi_* \cdot \sigma_0 f^{\kappa_0+q_0} \cdot \beta^{-q_0} \cdot \lambda \qquad (2.79)$$

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = -\varphi_* \cdot \sigma_0 \cdot h \cdot f^{\kappa_0+q_0} \cdot \beta^{-q_0}, \text{ или } \frac{d}{d\lambda}\left(\beta + \frac{h^2}{8\pi}\right) = -\frac{h^2}{4h\lambda}$$

$$\frac{df}{d\lambda} = -\frac{1}{\mathcal{H}_0} \beta^{q_1} \cdot \frac{\frac{1}{4\pi}\varphi_* h - \lambda\left(\beta + \frac{h^2}{8\pi}\right)}{f^{\kappa_1+q_1}}$$

Решение системы (2.79) рассматривается при краевых условиях вида (см. условия (2.57)):

$$h(0) = 0 \,, \quad \lambda_* \cdot h(\lambda_*) = 2 \,, \quad \beta(\lambda_*) = 0 \,, \quad f(\lambda_*) = 0 \qquad (2.80)$$

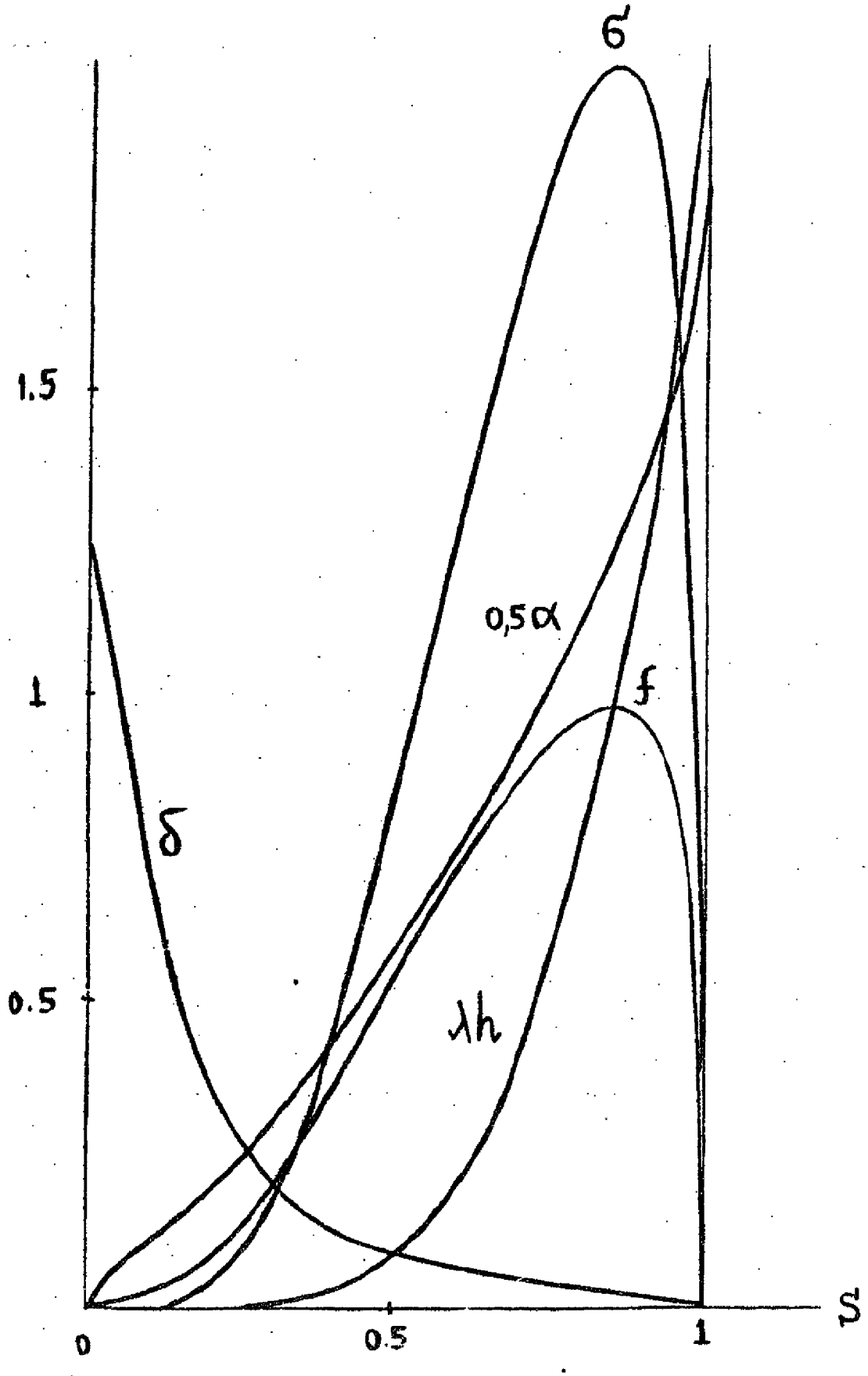
(условие $\omega(0) = 0$ учтено при получении интеграла (2.78)).

Решение задачи (2.79)-(2.80) может быть построено численным методом.

На фиг. 31 для случая $\kappa_0 = 3/2$, $q_0 = 0$, $\kappa_1 = 1$, $q_1 = 0$, $\mathcal{H}_0 = 1{,}5$, $\sigma_0 = 0{,}2$ приведено типичное распределение искомых функций по массовой безразмерной переменной λ .

Анализ и расчеты показывают, что также как в случае, рассмотренном в п. 5 настоящего параграфа, автомодельное решение существует при $\mathcal{H}_0 > \mathcal{H}_{0кр}$. Температура немонотонна по массе в определенной области изменения постоянной в коэффициенте теплопроводности $\mathcal{H}_0$: $\mathcal{H}_{01} \le \mathcal{H}_0 < \mathcal{H}_{02}$. При $\mathcal{H}_0 > \mathcal{H}_{02}$ максимум температуры находится всегда на оси симметрии.

В противоположность случаю $\sigma = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}$ (где электропровод-



Фиг 31

ность σ и соответственно плотность тока j постоянны по массе) в случае проводимости σ', зависящей от температуры, электропроводность и плотность тока немонотонны по массе. При этом максимум температуры и электропроводности совпадают (см. фиг. 31).

6. Обсуждение результатов.

В. п. 4 и п. 5 показано, что решение задачи (2.51)-(2.57) существует при $\widetilde{\mathcal{H}}_0 \geq \widetilde{\mathcal{H}}_{кр}$, т.е. коэффициент теплопроводности ограничен снизу некоторым критическим значением.

Формально параметр $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ не входит в условия автомодельности: задача автомодельна при любых $\widetilde{\mathcal{H}}_0$. Однако, расчеты исходной системы в частных производных на ЭВМ показывают, что при $\widetilde{\mathcal{H}}_0 < \widetilde{\mathcal{H}}_{01}$ решение имеет явно неавтомодельный характер (см. ниже фиг. 32): температура немонотонна по массе и вблизи границы пар-вакуум значительно быстрее растет со временем, чем в остальных точках массы.

При $\widetilde{\mathcal{H}}_0 \geq \widetilde{\mathcal{H}}_{01}$ в обоих случаях $\left[\sigma = \frac{\sigma_0}{t} \text{ и } \sigma = \sigma(T,\rho)\right]$ температура немонотонна по массе в определенной области изменения коэффициентов теплопроводности, а при больших $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ максимум T всегда находится на оси симметрии.

На фиг. 32 изображены для сравнения профили безразмерных функций температуры $(\ln f(S))$ и скорости $(\ln \alpha(S))$ по массовой переменной $S = \frac{m}{M_0}$ соответственно для случаев $\widetilde{\mathcal{H}}_0 = 0$ (сплошная линияэ и $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ = I,5 (штрих-пунктирная линия) на некоторый определенный момент времени. В обоих случаях коэффициент электропроводности имеет вид $\sigma = 0{,}2 \cdot T^{3/2}/t$

По физическому содержанию оба решения $\left[\sigma = \frac{\sigma_0}{t} \text{ и } \sigma = \sigma(T,\rho,t)\right]$ различны.

I) В случае $\sigma = \frac{\sigma_0}{t}$ автомодельный режим устанавливается асимптотически при больших временах и, следовательно, при малых $\tilde{\sigma}$. В таких условиях не может быть ни Т-слоя (т.к. $\frac{\partial \sigma}{\partial T} = 0$ ни даже классического скипирования токов: плотность тока постоянна по массе $\tilde{j} = \tilde{j}_0 = const$. Резкий рост температуры вблиз границы паров с вакуумом при $\tilde{\mathcal{H}}_0 < \tilde{\mathcal{H}}_{01}$ объясняется зависимостью джоулева нагрева в единице массы от плотности

$$\tilde{Q} = \frac{\tilde{j}^2}{\tilde{\sigma}_0 \delta}$$

Таким образом, здесь мы имеем дело с некоторым предельным случаем Т-слоя, противоположным скин-эффекту, когда за резкий рост температуры ответственна исключительно гидродинамика: обратная связь между гидродинамическими и магнитными величинами отсутствует.

При $\tilde{\mathcal{H}}_0 > \tilde{\mathcal{H}}_{0кр}$ теплопроводность размазывает максимум температуры и отодвигает его от границы вакуум-пары в направлении к оси симметрии.

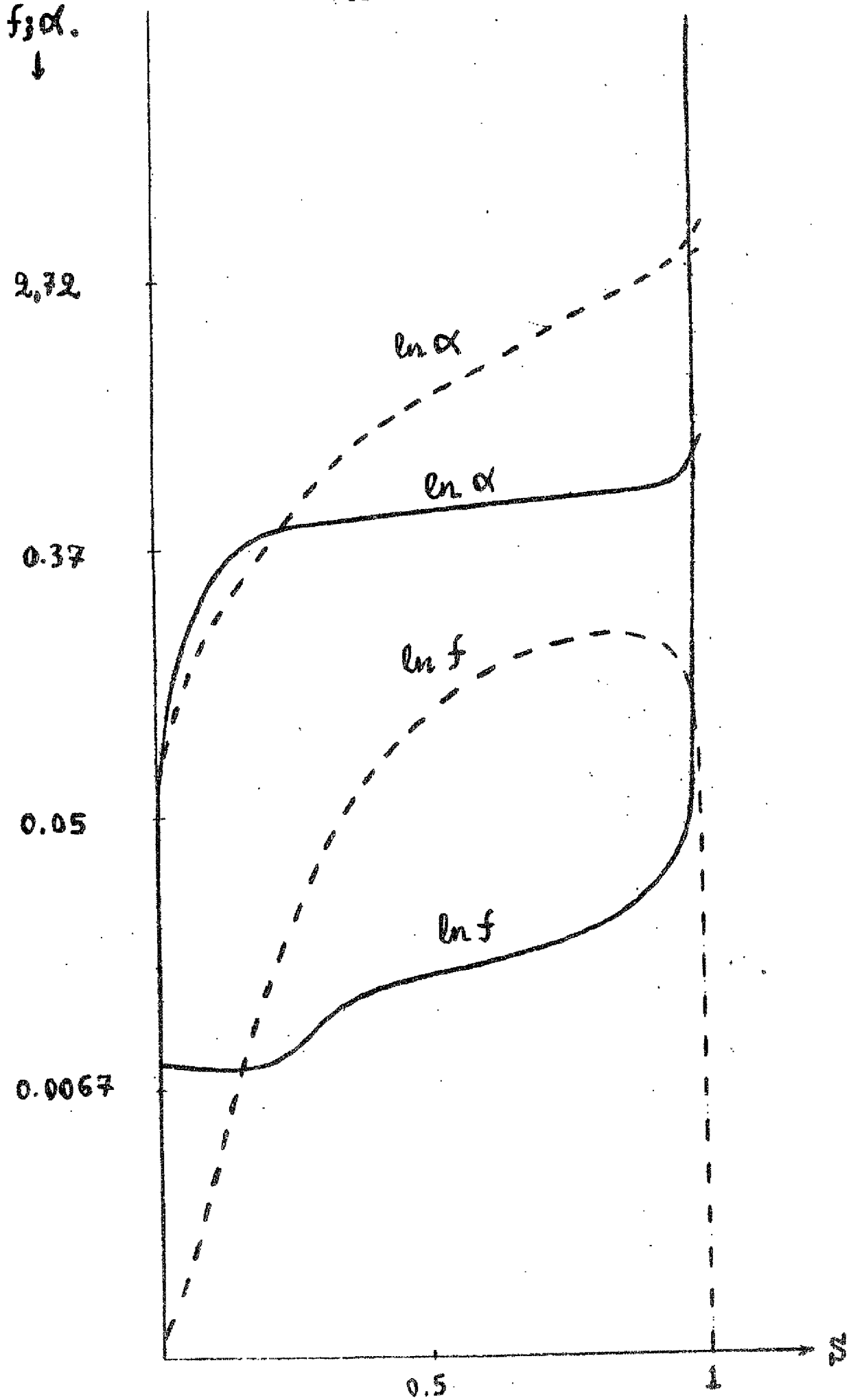
2) В случае $\sigma = \sigma(T, \rho)$ максимум температуры соответствует максимуму электропроводности σ . В этом случае $\frac{\partial \sigma}{\partial T} > 0$.

Из уравнений в автомодельных переменных легко оценить также величину параметра магнитного взаимодействия R_M . Действительно, непосредственно из уравнений (2.53) и (2.55) имеем

$$R_M^{-1}(\lambda) = \left| \frac{\frac{d\beta}{d\lambda}}{j \cdot h} \right| = 1 + n_0(n_0+1) \cdot \frac{\delta \lambda}{j h} \qquad (2.81)$$

Из (2.8I) следует, что при $n_0 = 0$ во всех точках массы $R_M(\lambda) \equiv 1$. Из результатов, описанных в главе I следует, что в рассматриваемом случае выполняются условия возникновения Т-сло

При $\tilde{\mathcal{H}}_0 < \tilde{\mathcal{H}}_{01}$ на границе вакуум-пары имеет место ярко выраженный Т-слой (сплошная линия на фиг. 32). Распределение



Фиг 32

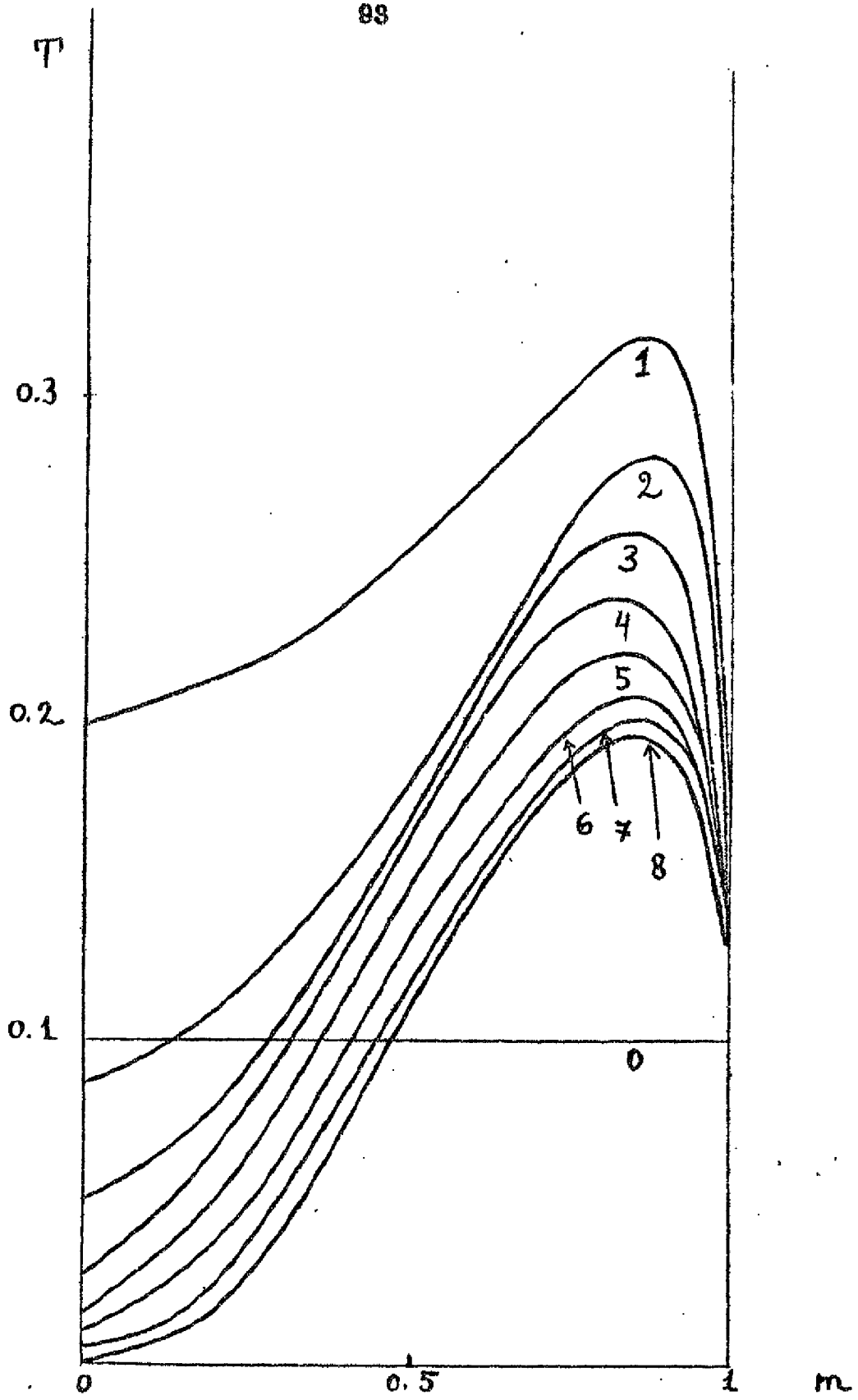
температуры и других функций имеют в этом случае неавтомодельный характер.

В области значений коэффициента теплопроводности $\widetilde{\mathcal{H}}_{o1} \leq \widetilde{\mathcal{H}}_o < \widetilde{\mathcal{H}}_{o2}$ теплопроводность стабилизирует Т-слой: при $t \to \infty$ устанавливается автомодельный режим с немонотонной по массе температурой.

На фиг. 33 приведены профили температур по автомодельной массовой переменной S на различные моменты времени) и на фиг. 34 (соответствующие профили скорости) они дают представление о характере установления со временем автомодельного режима. Профили функций f и α приведены на моменты времени, отделяющие равные значения вложенной в процесс энергии, равные "двум начальным энергиям". Значение прокаченной сквозь плазму энергии определяется по суммарной величине потока Умова-Пойтинга, который в безразмерных переменных (2.49) имеет вид $\lambda \frac{h^2}{8\pi} \frac{1}{4\pi} h$.

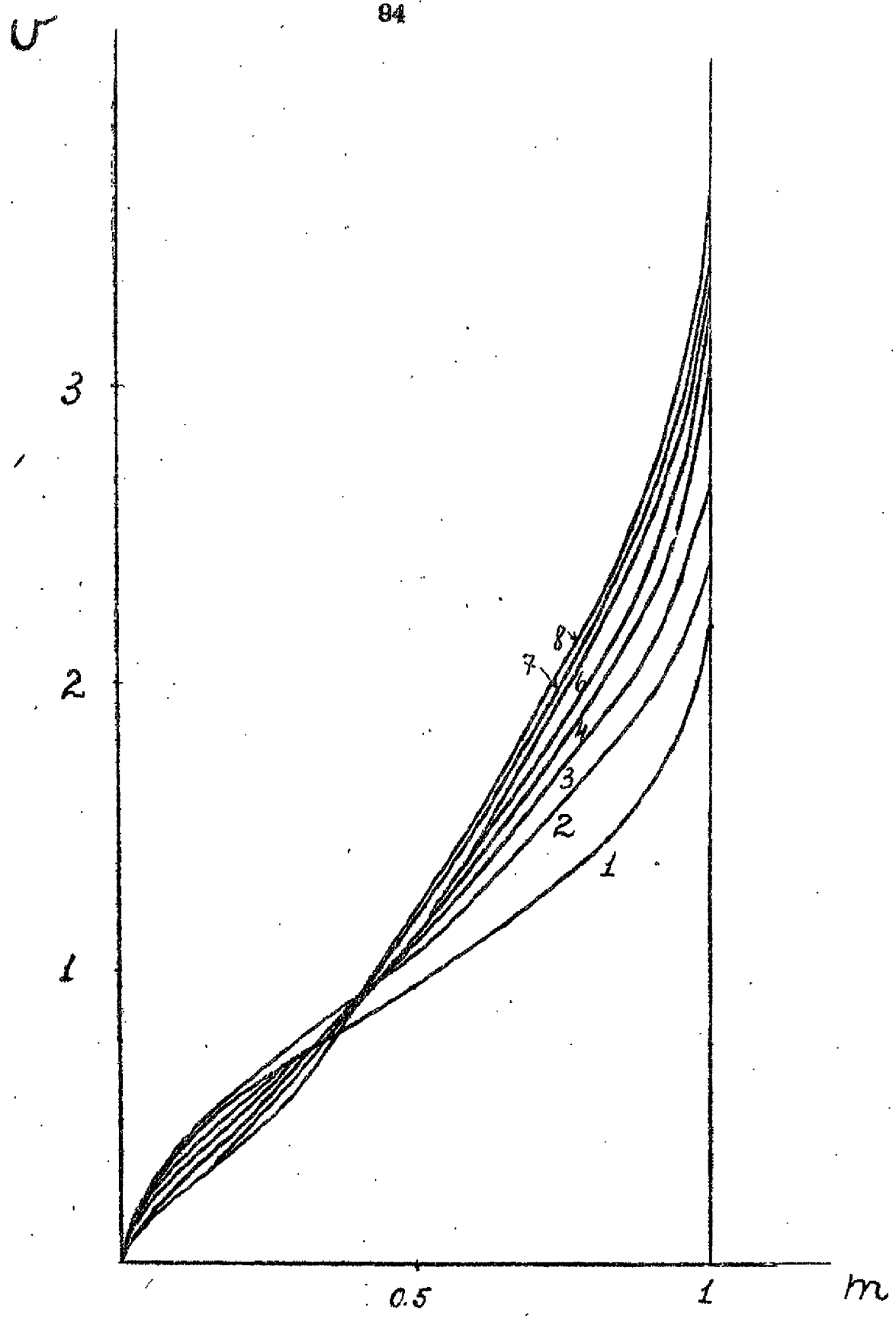
На фиг. 35 приведено распределение по времени соответственно полной кинетической $\left(V_\lambda = \int_0 \frac{v^2}{2} dm\right)$, магнитной $\left(H_\lambda = \int_0 \frac{H^2}{8\pi\rho} d\right.$ и внутренней $\left(\varepsilon_\lambda = \int_0 \varepsilon \cdot dm\right)$ энергий. Каждая из этих величин со временем выходит на постоянное значение, соответствующее автомодельному режиму.

В случае большой теплопроводности $\widetilde{\mathcal{H}}_o \geq \widetilde{\mathcal{H}}_{o2}$ в предельном режиме Т-слой уничтожается.

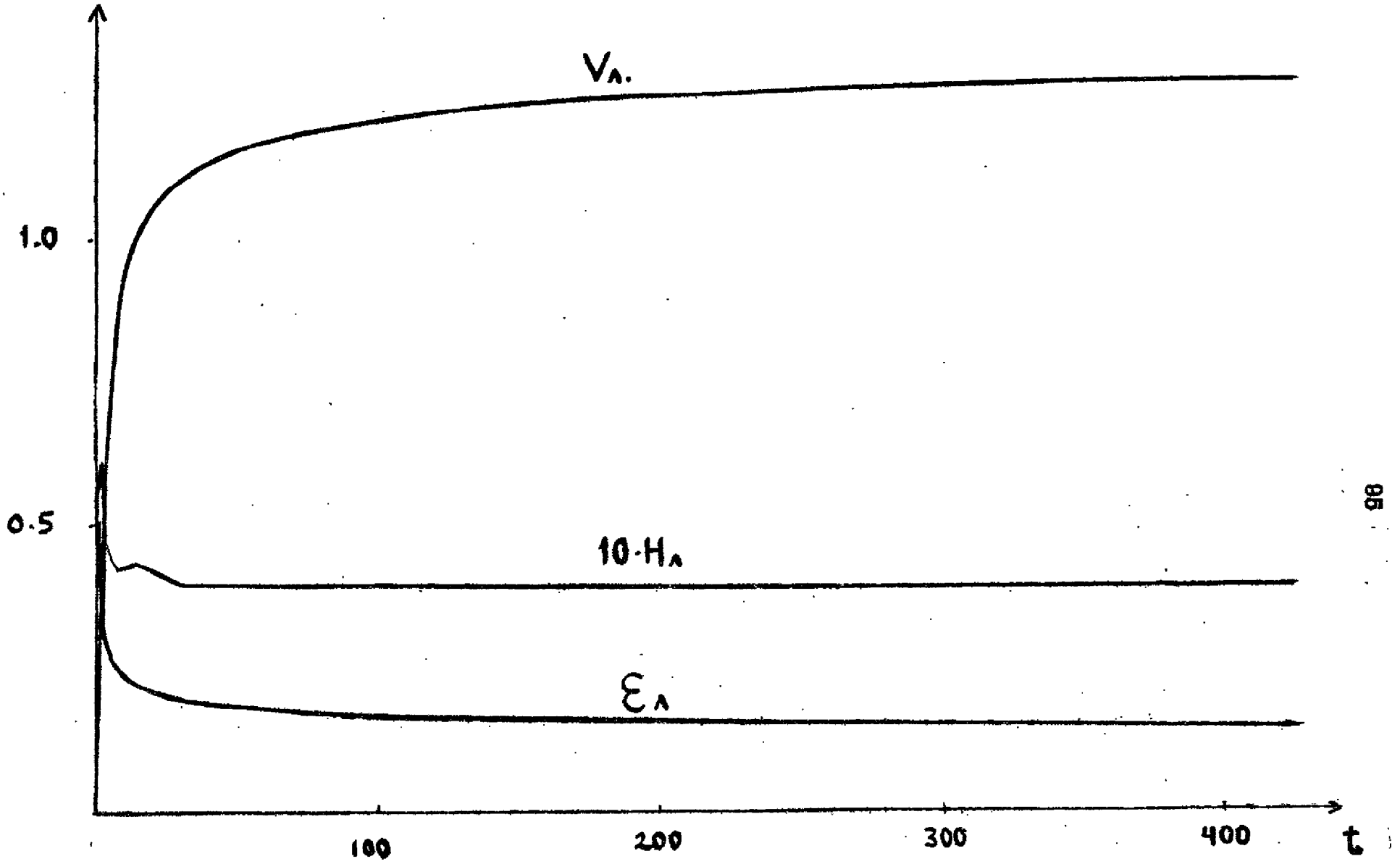


0 → t=1
1 → t=3
2 → t=5
3 → t=8
4 → t=14
5 → t=27
6 → t=60
7 → t=140
8 → t=348

Фиг. 33



Фиг 34



Фиг 35

Глава III.

РАЗВИТИЕ КОНЕЧНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ В ПОТОКЕ СЛАБОПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В ПРИСУТСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ I. Введение

Решение задачи о расширении плазменного цилиндра в магнитном поле, рассмотренной в главе I, позволило обнаружить качественно новую особенность взаимодействия плазмы с магнитным полем. Было установлено, что изменение температуры некоторого элемента газа, определяемое его охлаждением при разлете, нагревом за счет выделения в нем джоулева тепла и теплопроводностью, может привести к образованию высокотемпературного, по сравнению с окружающей массой, слоя газа, названного Т-слоем. Было дано качественное объяснение этого явления и отмечены условия, при которых он возникает.

В данной главе изучается возможность развития Т-слоя из локального конечного возмущения электропроводности, внесенного в стационарный поток слабо проводящего газа (индуцированный Т-слой). Исследовалась также динамика развития возмущения.

Установлено, что образование Т-слоя происходит, если параметр магнитогидродинамического взаимодействия R_M, соответствующий возмущению, больше некоторого критического значения R_M^*. Величина R_M^* оказывается меньше единицы в отличие от результатов главы I. Это объясняется тем, что в рассмотренных ниже задачах возникновение Т-слоя происходит на фоне установившегося потока газа, скорость расширения которого существенно меньше,

чем при разлете в вакуум. Таким образом, настоящие результаты указывают на существование зависимости условий возникновения Т-слоя от характера течения газа, точнее, от скорости его расширения.

Как и в главе I анализ проведен с помощью численного решения уравнений магнитной гидродинамики. Численное интегрирование уравнений выполнено на основе [8]. Однако при этом возникли некоторые методические трудности. Одна из таких трудностей связана с решением уравнения диффузии магнитного поля в среде, коэффициент электропроводности которой резко меняется из-за сильной зависимости от температуры (в интервале 1500^{0}К - 7000^{0}К). На отдельных участках, положение которых неизвестно, проводимость газа может обращаться в нуль.

Метод прогонки в этом случае непригоден из-за потери точности.

Предложенный в [10], [11] потоковый вариант метода прогонки позволяет в таких случаях с помощью однородных разностных схем [97] вести сквозной счет на всем интервале с достаточной точностью.

Другая методическая особенность связана с тем, что краевые условия для рассмотренных ниже задач ставятся на фиксированных эйлеровых координатах. В то же время для расчета гидродинамических течений с ударными волнами и контактными разрывами удобно пользоваться лагранжевыми координатами, то-есть иметь дело с фиксированной массой газа. В связи с этим использовались подвижные по массе краевые условия, которые позволяют рассматривать течение с переменной по времени массой между двумя фиксированными эйлеровыми координатами.

§ 2. Постановка задачи

В качестве исходного установившегося потока газа рассматривается стационарный радиальный сверхзвуковой источник. Как известно, в таком источнике скорость газа с увеличением радиуса растет, а плотность и температура падают. Будем считать, что течение происходит в канале, стенки которого перпендикулярны оси источника (фиг.36). На входе в канал $(r = r_н)$ число Маха $M > 1$.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в конечной области $r_1 < r < r_2$ имеет место повышение температуры до величины $\tilde{T}$. При этом электропроводность среды при $T = \tilde{T}$ становится достаточной для того, чтобы началось взаимодействие локального возмущения с магнитным полем.

Последующая эволюция возмущения определяется двумя основными процессами.

С одной стороны, взаимодействие с магнитным полем сопровождается нагревом вследствие выделения джоулева тепла и торможения. Этот нагрев повышает температуру в возмущении, что приводит к повышению электропроводности, усилению взаимодействия с магнитным полем и, следовательно, к еще большему росту температуры.

С другой стороны, цилиндрическое расширение и гидродинамический разлет стремятся снизить температуру, с уменьшением которой происходит резкое уменьшение электропроводности и ослабление взаимодействия с магнитным полем.

Наличие этих конкурирующих процессов, ведущих к противоположным следствиям, обуславливает две априорные возможности судь-

Фиг 36

бы возмущения.

Если взаимодействие с магнитным полем играет ведущую роль, то возмущение "подхватывается" и развивается в Т-слой.

В противном случае джоулев нагрев недостаточен. Поэтому электропроводность очень быстро падает и, начиная с некоторого момента времени, взаимодействие с магнитным полем прекращается, а первоначальное возмущение затухает благодаря гидродинамическому расширению.

Вообще говоря, необходимо учитывать влияние еще ряда процессов, важнейшим из которых является теплопроводность. Мы, однако, будем иметь дело с течениями, в которых, как показывают оценки и контрольные расчеты, теплоперенос играет второстепенную роль и в дальнейшем не будет учитываться.

Наша цель состоит в исследовании условий, при которых начальное возмущение разовьется в Т-слой. Именно нас будет интересовать критическое значение H_* магнитного поля (и соответствующее ему значение $R_{H_*} = H_*^2/4\pi p$), начиная с которого происходит "подхват" возмущения.

Мы будем следить также за динамикой развития возмущения и проводить сравнение картины развития Т-слоя с уже рассмотренным случаем расширения плазменного цилиндра в магнитном поле.

Наконец, существенным является вопрос о зависимости критического значения R_{H_*} от магнитного числа Рейнольдса (оно определяется температурой и размером возмущения) и скорости расширения потока в том месте, где внесено возмущение.

Рассматриваемый газ представляет собой смесь аргона с добавкой 0,1% цезия. В изучаемом интервале изменения температуры (1500°К - 7000°К) аргон практически не ионизируется и, в силу

малости добавки цезия, газ по своим свойствам близок к идеальному с показателем адиабаты $\gamma = 1{,}67$ и молекулярным весом $\mu = 40$.

Проводимость газа при этих условиях (см. [17]) можно представить формулой

$$\sigma = \left(\frac{1}{\sigma_a} + \frac{1}{\sigma_i}\right)^{-1} = \left\{1{,}88\left[(m\cdot\kappa\cdot T)^{1/2}/\alpha\cdot e^2\right]\cdot Q + \right.$$

$$\left. + 1{,}69\left[m^{1/2}e^2/(\kappa T)^{3/2}\right]\cdot \ln\left(\frac{\mathcal{D}}{b_0}\right)\right\}^{-1} \quad \frac{1}{ом\cdot см}$$

где

$\alpha = \frac{n_e}{n}$ – степень ионизации (n_e – концентрация электронов),

n – концентрация атомов аргона,

$\mathcal{D} = \sqrt{\kappa T/8\pi\cdot n_e\cdot e^2}$ – дебаевская длина,

b_0 – эффективное прицельное расстояние кулоновского взаимодействия,

Q – эффективное сечение столкновения электронов с нейтральными атомами аргона. Согласно [28], $Q = 2\cdot 10^{-16}$ см^2.

Остальные обозначения общепринятые. Степень ионизации α определялась по уравнению Саха. Магнитное поле в начальный момент времени $t = 0$ равномерно заполняет все пространство, его силовые линии параллельны оси симметрии. Наибольшая электропроводность в потоке, соответствующая температуре на входе в канал ($T_н = 2000^{\circ}$К при $\gamma = \gamma_н$) мала, поэтому в начальный момент течение практически не взаимодействует с магнитным полем.

При решении уравнений (1.1) используются следующие краевые условия.

Магнитное поле на правой границе $r = r_к$ поддерживается постоянным и равным начальному значению.

При постановке левого краевого условия по магнитному полю при $r = r_н$ предполагается, что при $r < r_н$ газ неэлектропроводен и $E_\varphi = 0$ при $r = 0$. Пользуясь уравнением индукции в интегральной форме, получаем, что при $r = r_н$ имеет место

$$\frac{r}{\nu+1}\frac{\partial H}{\partial t} = -c\left(1 + \frac{r\cdot v}{\nu_m(\nu+1)}\right)\cdot E'_\varphi - v\cdot H$$

где, $\nu_m \doteq \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ – магнитная вязкость

$E'_\varphi = \frac{c}{4\pi\sigma}\rho\cdot r^\nu \frac{\partial H}{\partial x}$ – азимутальная компонента электрического поля в системе координат, движущейся с газом.

Вследствие взаимодействия внесенного возмущения с магнитным полем и гидродинамическим потоком картина течения может существенно перестроиться. Однако течение на входе при $r = r_н$ во все время процесса остается сверхзвуковым и постоянным. Поэтому при $r = r_н$ задаются скорость потока $v = v_н$, плотность $\rho = \rho_н$ и температура $T = T_н$ (давление $p = p_н$). На правой границе на протяжении интересующего нас промежутка времени поток также остается сверхзвуковым, а поэтому граничных условий для уравнений гидродинамики здесь не требуется.

В начальный момент времени $t = 0$ магнитное поле равномерно заполняет всю область. Начальными значениями для уравнений гидродинамики всюду, кроме зоны возмущения, служат параметры стационарного источника.

Температура в области $r_1 < r < r_2$ будет повышаться до величины $T = \tilde{T}$ двумя способами. Либо плотность остается прежней и тогда давление в возмущенной зоне повышается (возмущение

первого типа), либо плотность уменьшается так, чтобы давление оставалось непрерывным (возмущение второго типа). В первом случае скорость расширения возмущенной зоны несколько больше вследствие гидродинамического разлета.

§ 3. Развитие возмущения первого типа

Рассмотрим задачу о поведении в магнитном поле локального конечного возмущения температуры и давления, внесенного в стационарный сверхзвуковой поток. Канал, в котором течет газ, имеет следующие размеры: начальный радиус $r_н = 0{,}5$ м и конечный радиус $r_к = 1{,}7$ м. Параметры потока при $r = r_н$ следующие: $M = 1{,}5$, $T_н = 2000^0$К, $\rho_н = 0{,}001$ г/см^3, $p_н = 4$ атм, $v_н = 1200$ м/сек. Зона возмущения в момент $t = 0$ имеет ширину 25 см и расположена на участке $r_1 = 0{,}65$ м $< r < r_2 = 0{,}9$ м, температура в ней при $r_1 < r < r_2$ полагается равной $\tilde{T}$, при этом скорость и плотность остаются прежними. Величина $\tilde{T}$ варьировалась в пределах от 2250^0К до 3500^0К, так что соответствующее значение магнитного числа Рейнольдса, определенного по параметрам возмущенной зоны изменялось от $R_{e_m} = 0.01$ до $R_{e_m} = 0.15$.

В начальной стадии процесса при $r = r_1$ и $r = r_2$ происходит распад разрывов, в результате чего образуются волны сжатия, распространяющиеся вверх и вниз по потоку. Вследствие этого газ в зоне возмущения получает дополнительную возможность расширения. Несмотря на то, что давление в возмущенной зоне значительно превосходит первоначальное (в полтора - два раза) образующиеся ударные волны сжатия не приводят к существенной перестройке течения.

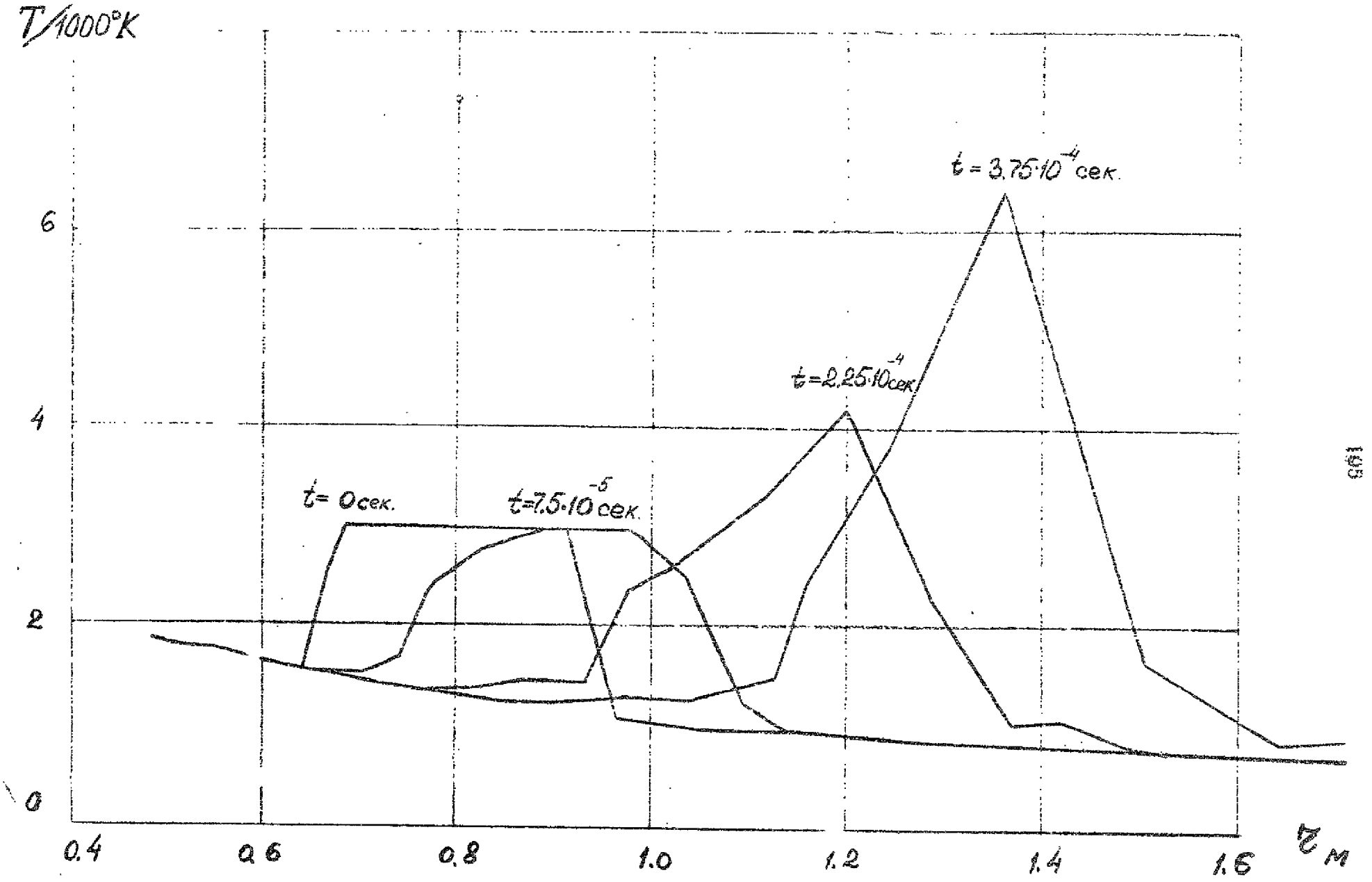
На фиг.37-40 для одного из расчетов, в котором начальное возмущение развивается в Т-слой, предотавлены распределения температуры T, скорости v, плотности ρ и магнитного поля H в различные моменты времени. Величина магнитного поля H_0 при $t=0$ равна 15800 эрстед, начальная температура возмущения $\widetilde{T} = 3000^0$К.

Для этого случая характерны все отмеченные в главе I моменты и особенности процесса. В частности, имеются две стадии развития возмущения. В первой, начальной стадии преобладает расширение и охлаждение газа. Затем, по истечении некоторого времени (для данного варианта оно равно $1{,}5 \cdot 10^{-4}$сек), в силу постепенного выравнивания пондеромоторной силы и силы движения вызванной перепадом, начинается вторая стадия, характеризующаяся торможением и разогревом некоторой массы газа в начальном возмущении и к образованию Т-слоя на этой массе.

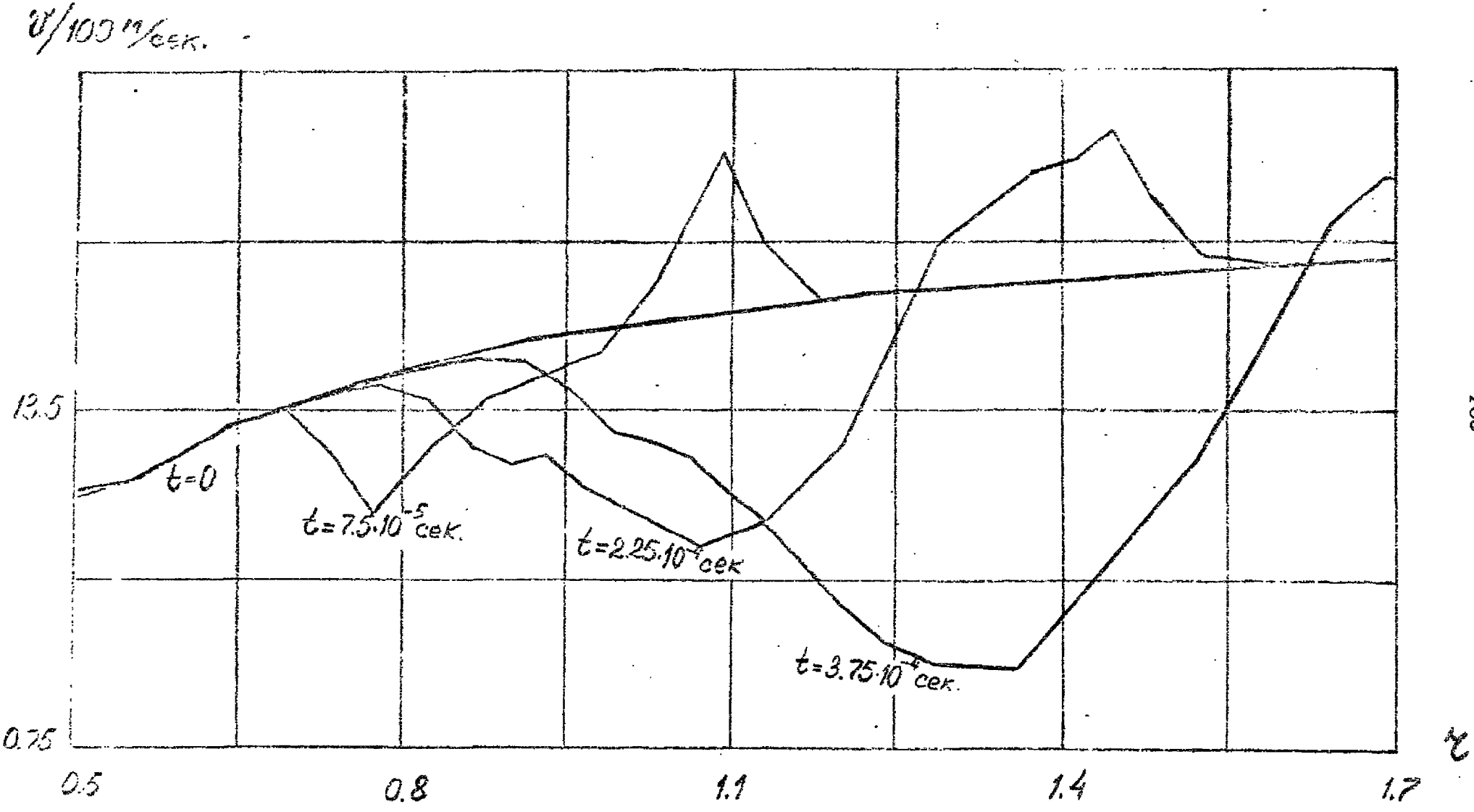
Как и при расширении плазменного цилиндра в магнитном поле, можно наблюдать тенденцию формирования волны сжатия, отходящей от Т-слоя вверх по потоку. С другой стороны, торможение Т-слоя в магнитном поле приводит к распространению впереди него волны разрежения с нарастающей интенсивностью.

Вследствие роста электропроводности в слое происходит частичное вытеснение магнитного поля из центральной области. Можно отметить, что время возникновения Т-слоя может меняться в широких пределах, так что не всегда можно наблюдать резкий переход к нагреву. Но если Т-слой возникал, то дальнейшего охлаждения не наблюдалось.

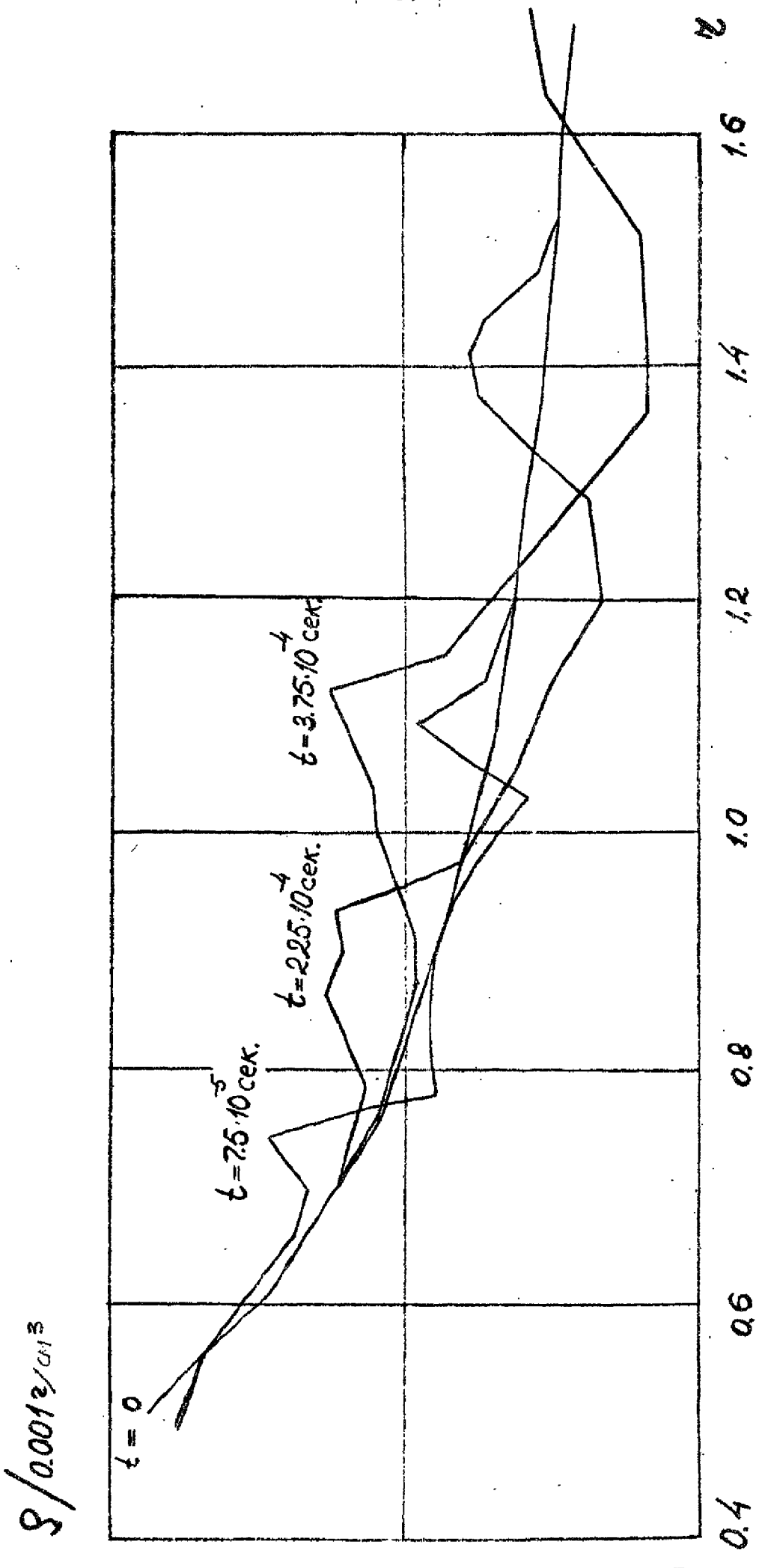
При варьировании начального значения магнитного поля и магнитного числа Рейнольдса Re_m было замечено, что для каждого


T/1000°K
6
4
2
0
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
z м
t = 3.75·10⁻⁴ сек.
t = 2.25·10⁻⁴ сек.
t = 7.5·10⁻⁵ сек.
t = 0 сек.

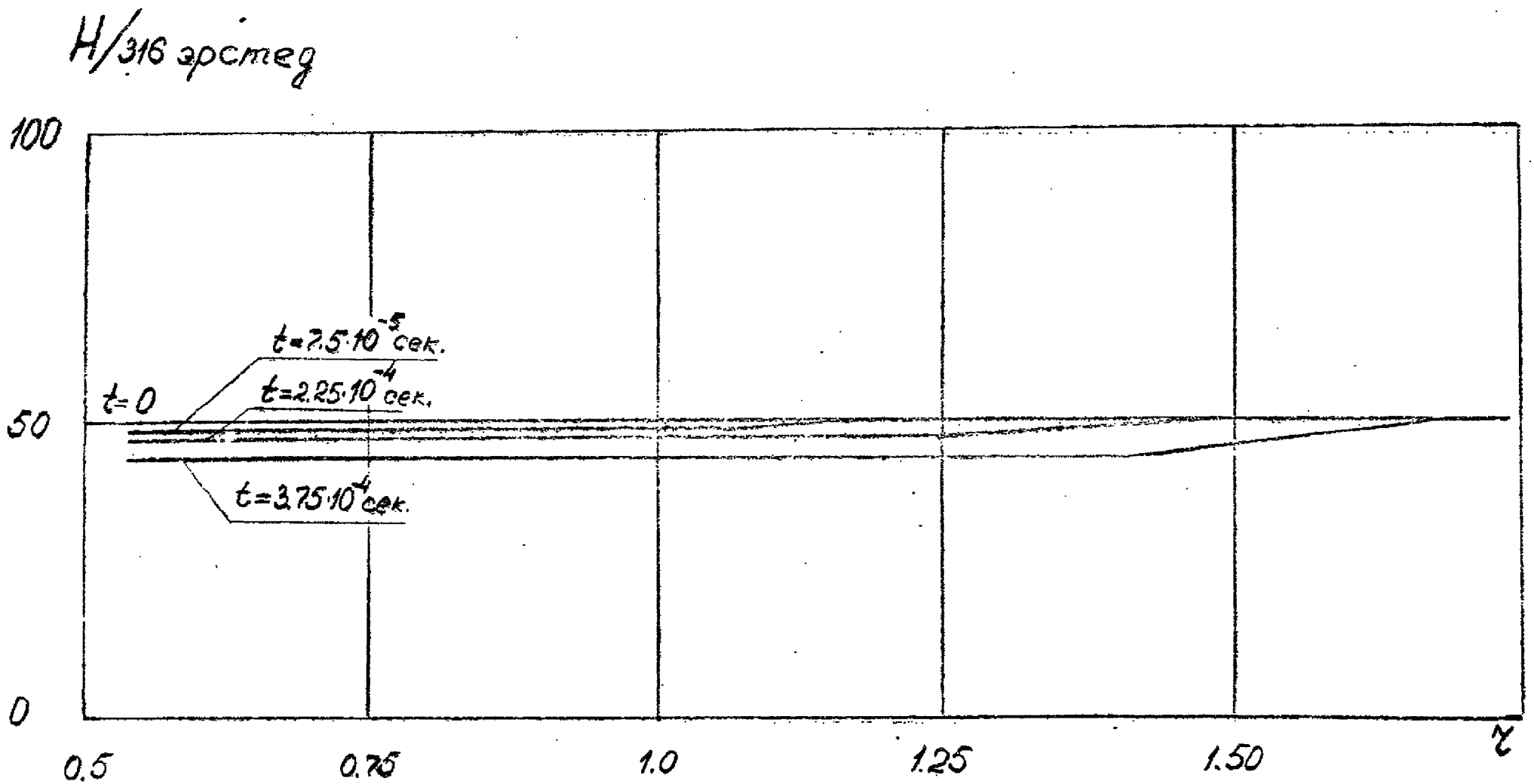
Фиг. 37


u/100 м/сек.
12.5
0.75
t=0
t=7.5·10⁻⁵ сек.
t=2.25·10⁻⁴ сек
t=3.75·10⁻⁴ сек.
0.5
0.8
1.1
1.4
1.7
τ

Фиг. 38


g/0.001г/см³
t = 0
t=7.5·10⁻⁵сек.
t=2.25·10⁻⁴сек.
t=3.75·10⁻⁴сек.
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
x

Фиг. 39

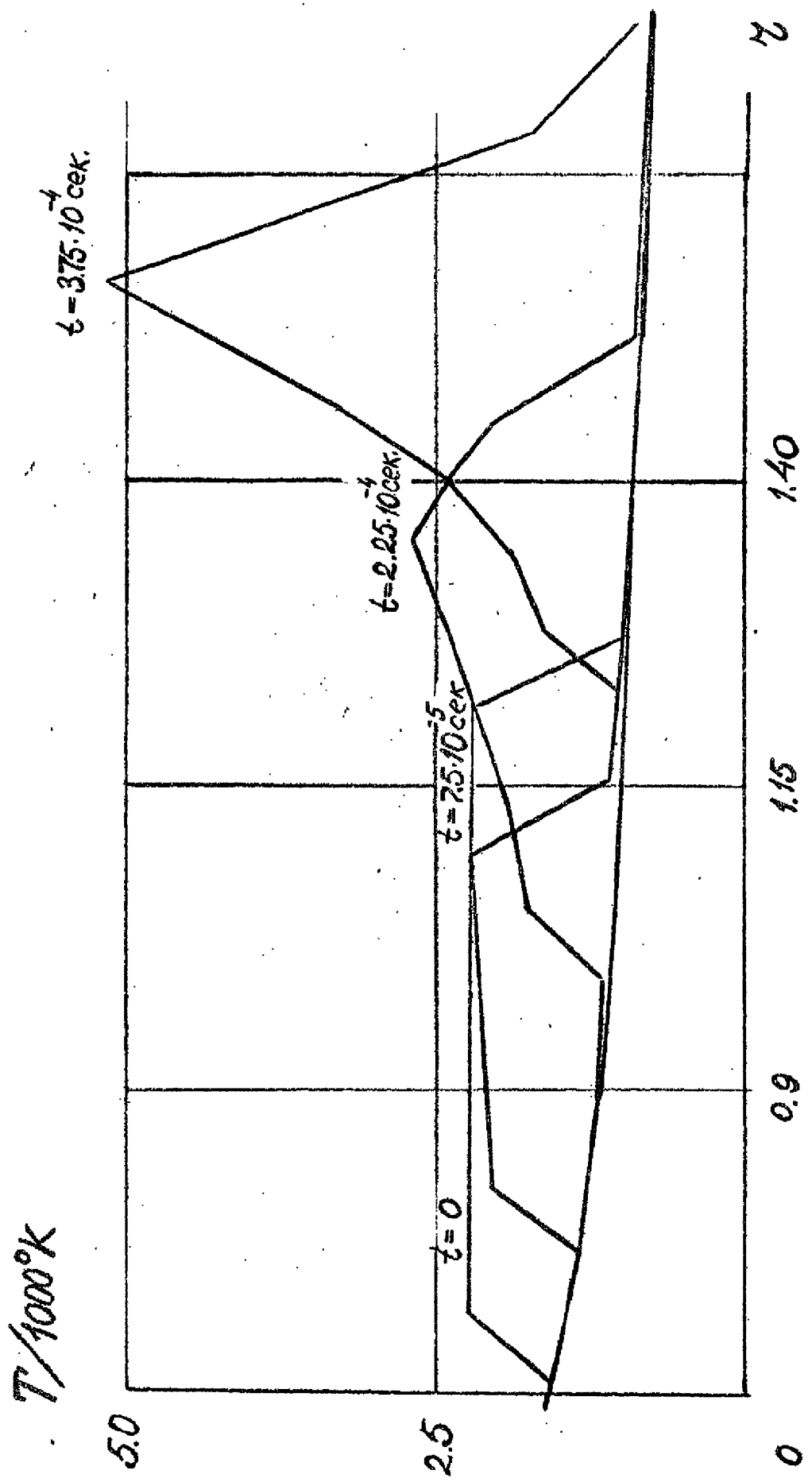

H/316 эрстед
100
50
0
t=0
t=7.5·10⁻⁵ сек.
t=2.25·10⁻⁴ сек.
t=3.75·10⁻⁴ сек.
0.5
0.75
1.0
1.25
1.50
z

Фиг. 40

Re_m из исследованного диапазона 0,01-0,15 можно найти некоторое критическое значение начального магнитного поля, при превышении которого вносимое в поток локальное возмущение развивалось в Т-слой.

§ 4. Развитие возмущений второго типа

В отличие от предыдущего параграфа рассмотрим теперь возмущение, вносимое в стационарный поток, в котором давление остается непрерывным за счет уменьшения плотности, то-есть при $\gamma = \gamma_1$ и $\gamma = \gamma_2$ имеются контактные разрывы. Данная постановка задачи отличается от описанной в предыдущем параграфе тем, что на начальной стадии процесса отсутствует гидродинамический распад на границах возмущения из-за повышенного давления в возмущенной зоне и газ расширяется к только из-за цилиндричности течения. Время образования Т-слоя снова зависит от величины магнитного поля и температуры возмущения. На фиг. 41-44 показаны распределения по радиусу температуры, скорости, плотности и магнитного поля в различные моменты времени для одного из вариантов задачи, когда в начальный момент температура в возмущенной зоне $\widetilde{T}$ = 2250°К, а начальное магнитное поле H_0=15800 эрстед. В этом случае интенсивный рост температуры, то-есть образование Т-слоя начинается по истечении некоторого промежутка времени, равного $2{,}25 \cdot 10^{-4}$сек. Как показали расчеты, при всех рассмотренных значениях магнитного числа Рейнольдса критическое значение магнитного поля оказалось несколько ниже, чем в соответствующих задачах с разрывом давления в начальный момент времени.


T/1000°K
5.0
2.5
0
0.9
1.15
1.40
x
t = 3.75·10⁻⁴ сек.
t = 2.25·10⁻⁴ сек.
t = 7.5·10⁻⁵ сек.
t = 0

Фиг. 41

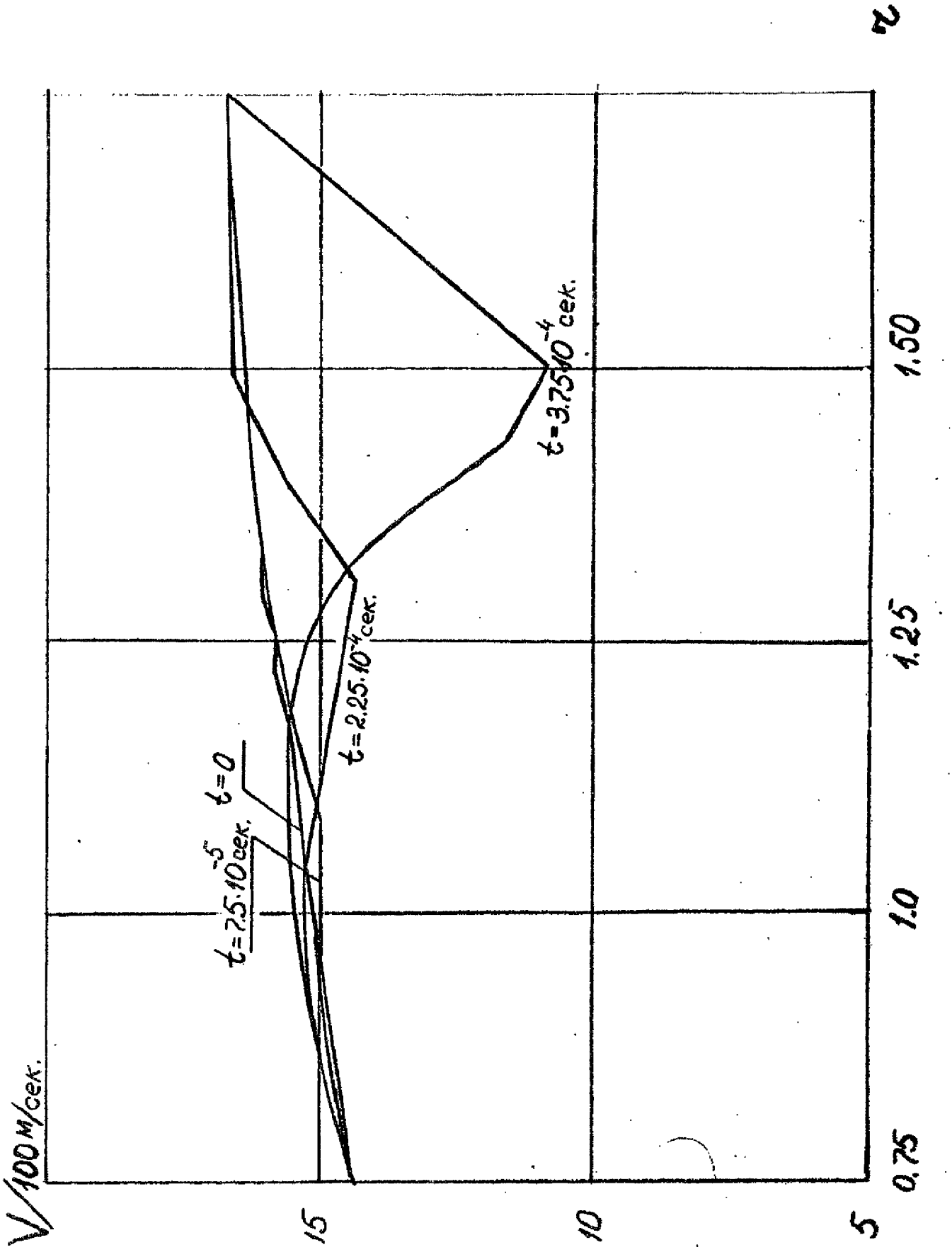
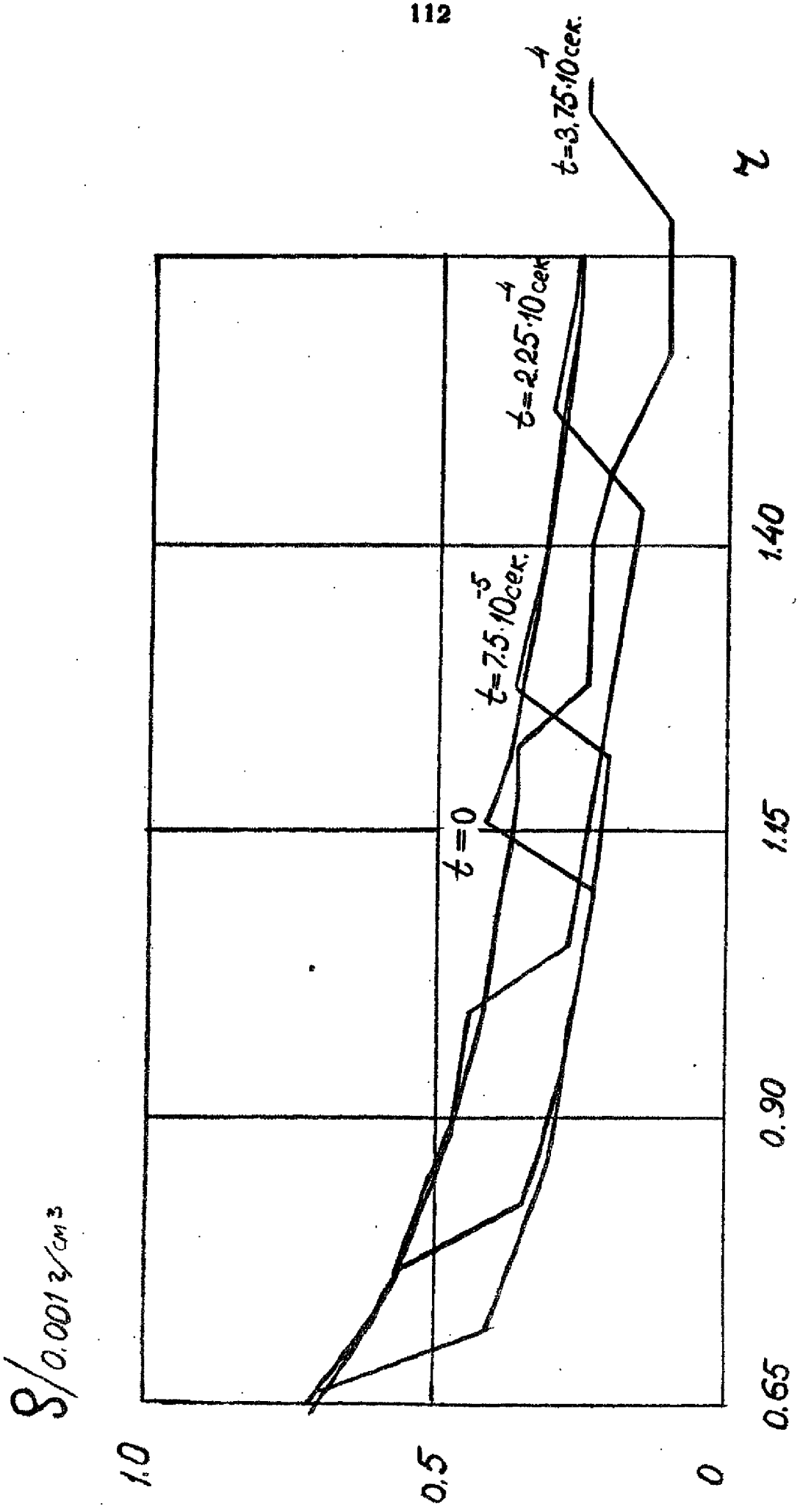
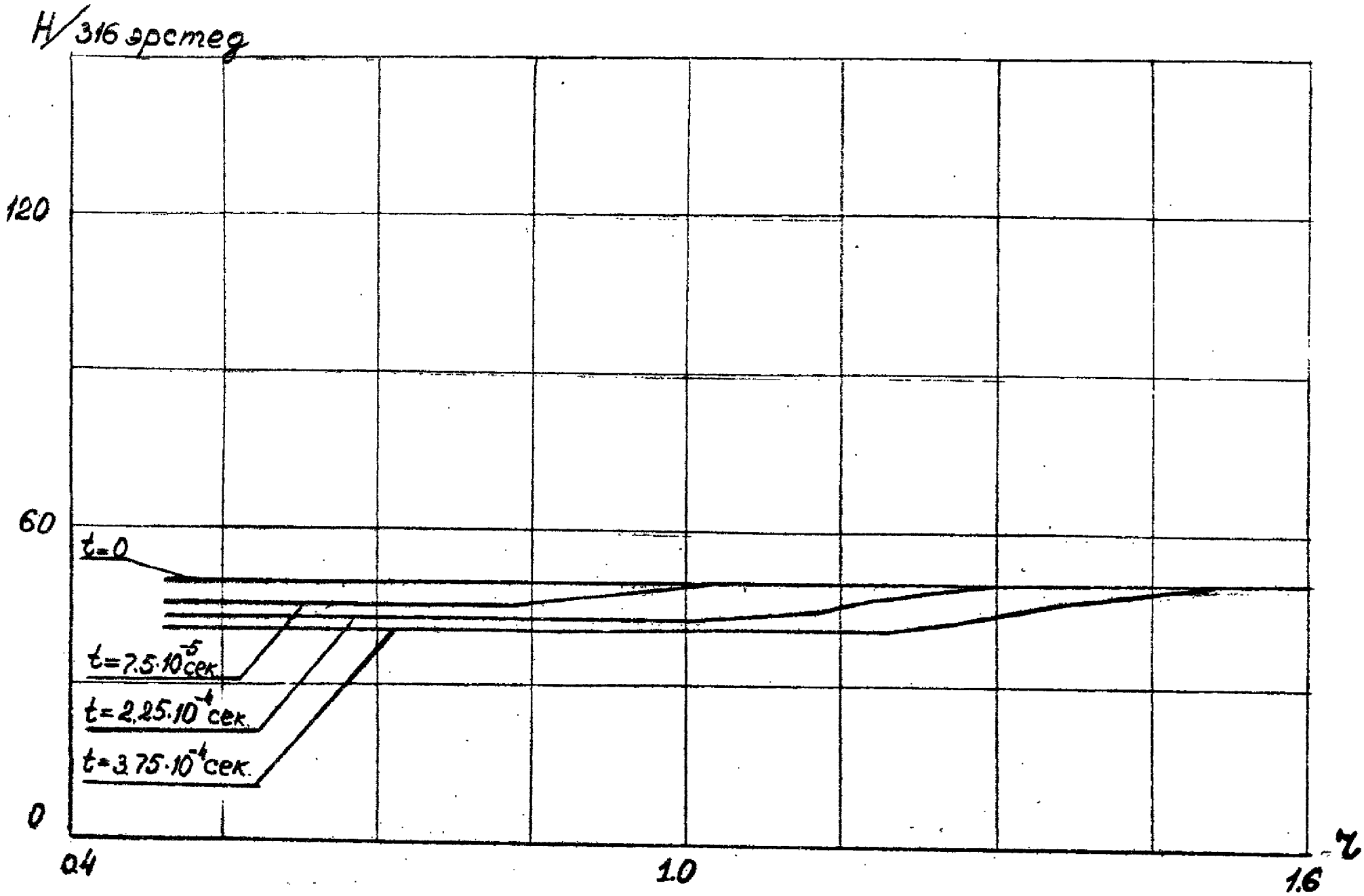

V/100 м/сек.
15
10
5
0,75
1.0
1.25
1.50
z
t=0
t=2.5·10⁻⁵ сек.
t=2.25·10⁻⁴ сек.
t=3.75·10⁻⁴ сек.

Рис. 42


ρ/0.001 г/см³
1.0
0.5
0
0.65
0.90
1.15
1.40
r
t=0
t=7.5·10⁻⁵сек.
t=2.25·10⁻⁴сек
t=3.75·10⁻⁴сек.

Фиг. 43


H/316 эрстед
120
60
0
t=0
t=7.5·10⁻⁵сек.
t=2.25·10⁻⁴сек.
t=3.75·10⁻⁴сек.
0.4
1.0
1.6
τ

Фиг. 44

§ 5. Обсуждение результатов

I. Анализ результатов расчетов, проведенных при различных значениях магнитного поля и температуры $\tilde{T}$ в возмущенной зоне в диапазоне изменения магнитного числа Рейнольдса от $Re_m = 0.01$ до $Re_m = 0.15$ показал, что существует принципиальная возможность индуцированин Т-слоя с помощью локального конечного возмущения электропроводности, вносимого в поток слабопроводящего газа.

Для любого лскального конечного возмущения, характеризуемого соответствующим значением Re_m, существует критическое значение магнитного поля H^* такое, что при $H > H^*$ имеет место развитие данного возмущения, приводящее к образованию в нем Т-слоя. В противном олучае, когда $H < H^*$, возмущение затухает. Таким образом, появляетоя возможность управления возникновением Т-слоя путем изменения величины магнитного поля H.

2. Завионмость характера процесса от параметра R_M выражается в тим, что оуществует критичеокое значение этого параметра R_M^* такое, что если $R_M < R_M^*$, то возмущение температуры не приводит к заметным изменениям в ходе процесса. Если же $R_M > R_M^*$, то развивается Т-слой.

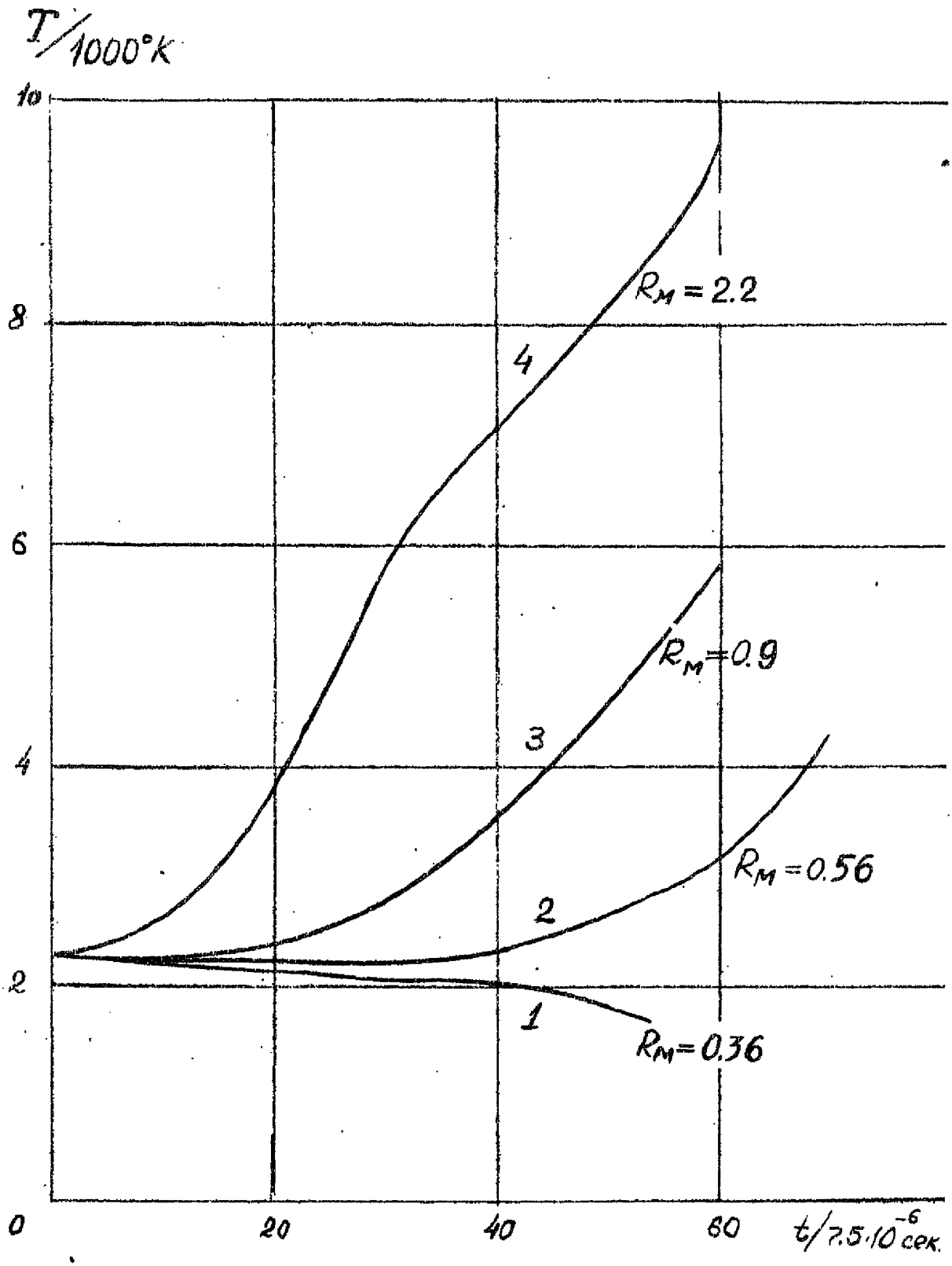
Известно, что при малых значениях $Re_m (Re_m \ll 1)$ безразмерным параметром, определяющим в уравнениях величину пондеромоторной силы и джоулева нагрева является параметр магнитогидродинамического взаимодействин $R_M = Re_m \cdot R_H$ где $R_H = H_0^2/4\pi\rho_0$ Поэтому характер развития процесса определяется только величиной параметра магнитогидродинамического взаимодействия R_M, вмчисляемого по начальным данным. Магнитное поле Рейнольдса Re_m

определяет лишь величину индуцированного магнитного поля и плотность электрических токов.

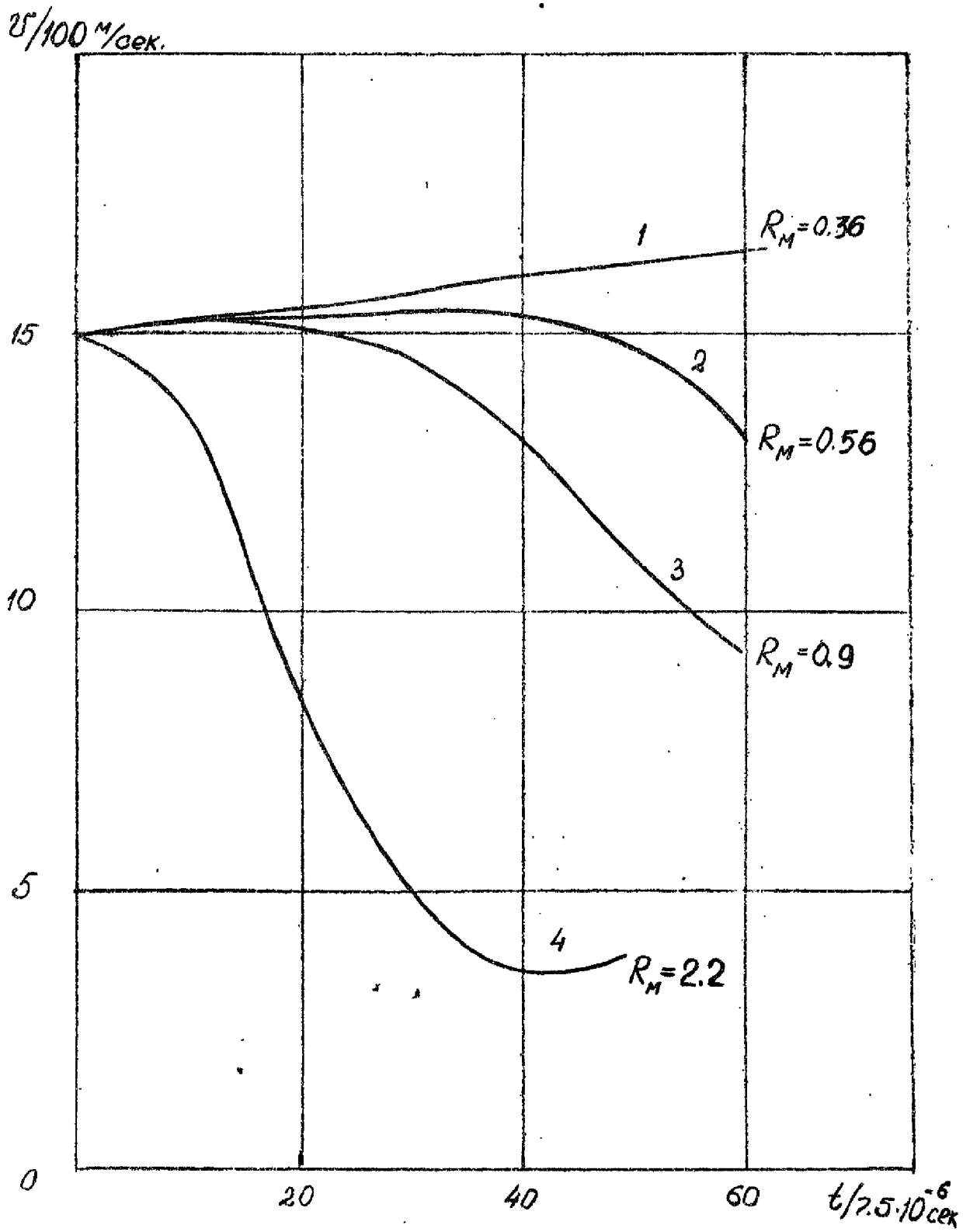
Полученный результат удобно интерпретировать следующим образом. Положительный квадрант плоскости (Re_m , R_H) делится на две области кривой, вдоль которой $R_M = R_M^*$. При $Re_m \ll 1$ эта кривая близка к гиперболе $R_M^* = Re_m \cdot R_H$. Возмущение развивается в Т-слой, если его безразмерные параметры Re_m, R_H определяют точку, лежащую над критической кривой $R_M = R_M^*$ и затухает, если эта точка лежит ниже кривой $R_M = R_M^{**}$ (фиг.48). На фиг. 45 приведены кривые, выражающие зависимость от R_H изменения температуры по времени в точке ее максимального значения для случая, когда в начальный момент давление не возмущено. На фиг. 46 показаны соответствующие им скорости той части газа, которая имеет максимальную температуру, а на фиг. 47 изменение перепада магнитного поля со временем между его значениями на границах области.

Из хода кривых изменения температуры со временем на фиг. 45 видно определяющее влияние на процесс величины R_M . Если оно не превосходит критической величины (кривая I), то возмущение не "подхватывается". При этом температура уменьшается, скорость растет по радиусу (фиг. 46) и с момента времени, когда проводимость обращается в нуль, газ в возмущенной зоне адиабатически охлаждается, а магнитное поле восстанавливает свою первоначальную величину (фиг. 47).

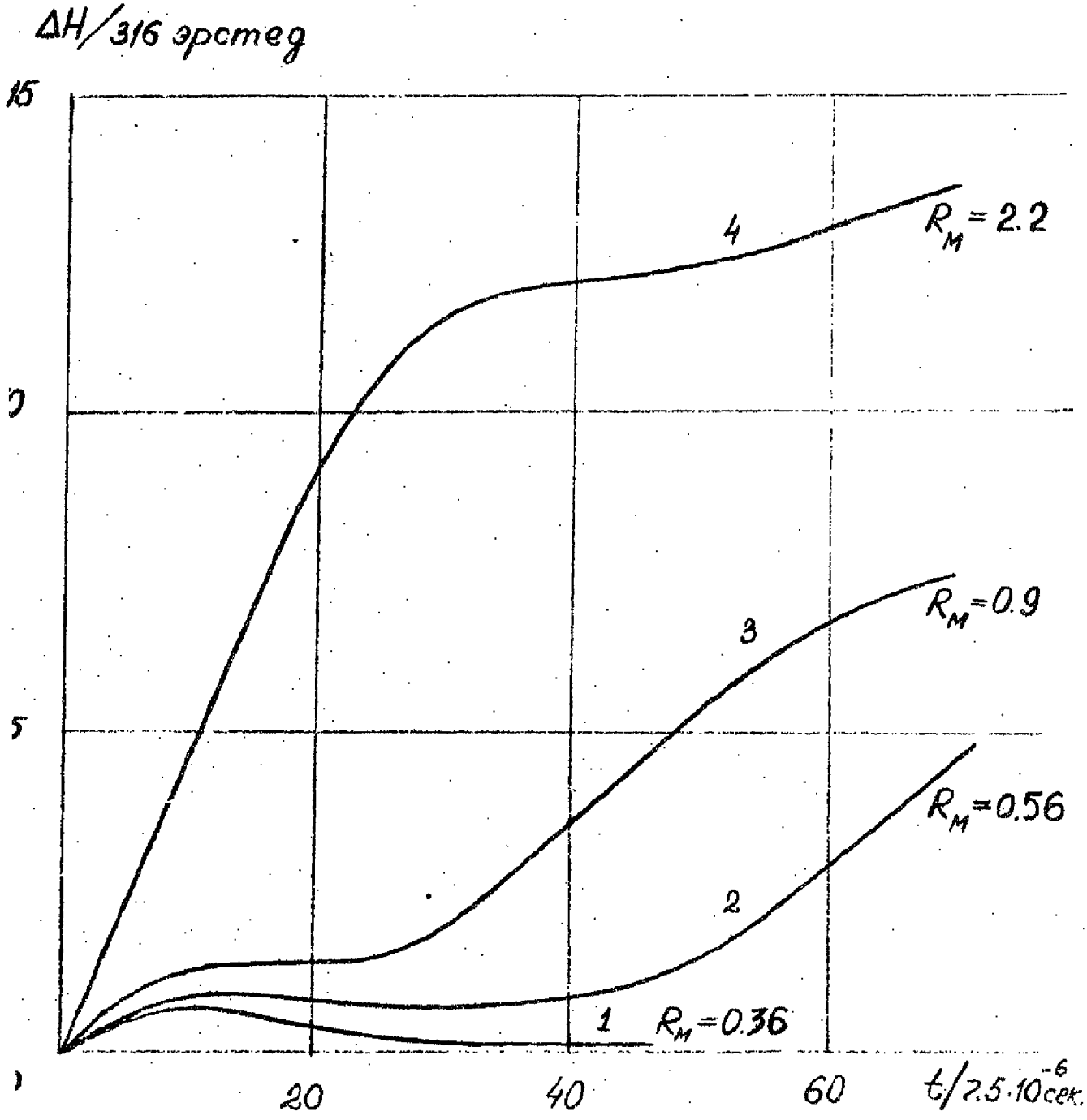
При значениях R_M , соответствующих кривым 2,3 на фиг. 45, температура в начале процесса меняется слабо, скорость остается почти постоянной, несмотря на то, что лоренцова сила направлена против движения, а магнитное поле вытесняется незначительно.


T/1000°K
10
8
6
4
2
0
20
40
60
t/2.5·10⁻⁶ сек.
$R_M = 2.2$
$R_M = 0.9$
$R_M = 0.56$
$R_M = 0.36$
4
3
2
1

Фиг. 45


v/100 м/сек.
15
10
5
0
20
40
60
t/2.5·10⁻⁶ сек
1
2
3
4
R_M=0.36
R_M=0.56
R_M=0.9
R_M=2.2

Фиг. 46


ΔH/316 эрстед
15
0
5
0
20
40
60
t/2.5·10⁻⁶сек.
4
$R_M = 2.2$
3
$R_M = 0.9$
2
$R_M = 0.56$
1
$R_M = 0.36$

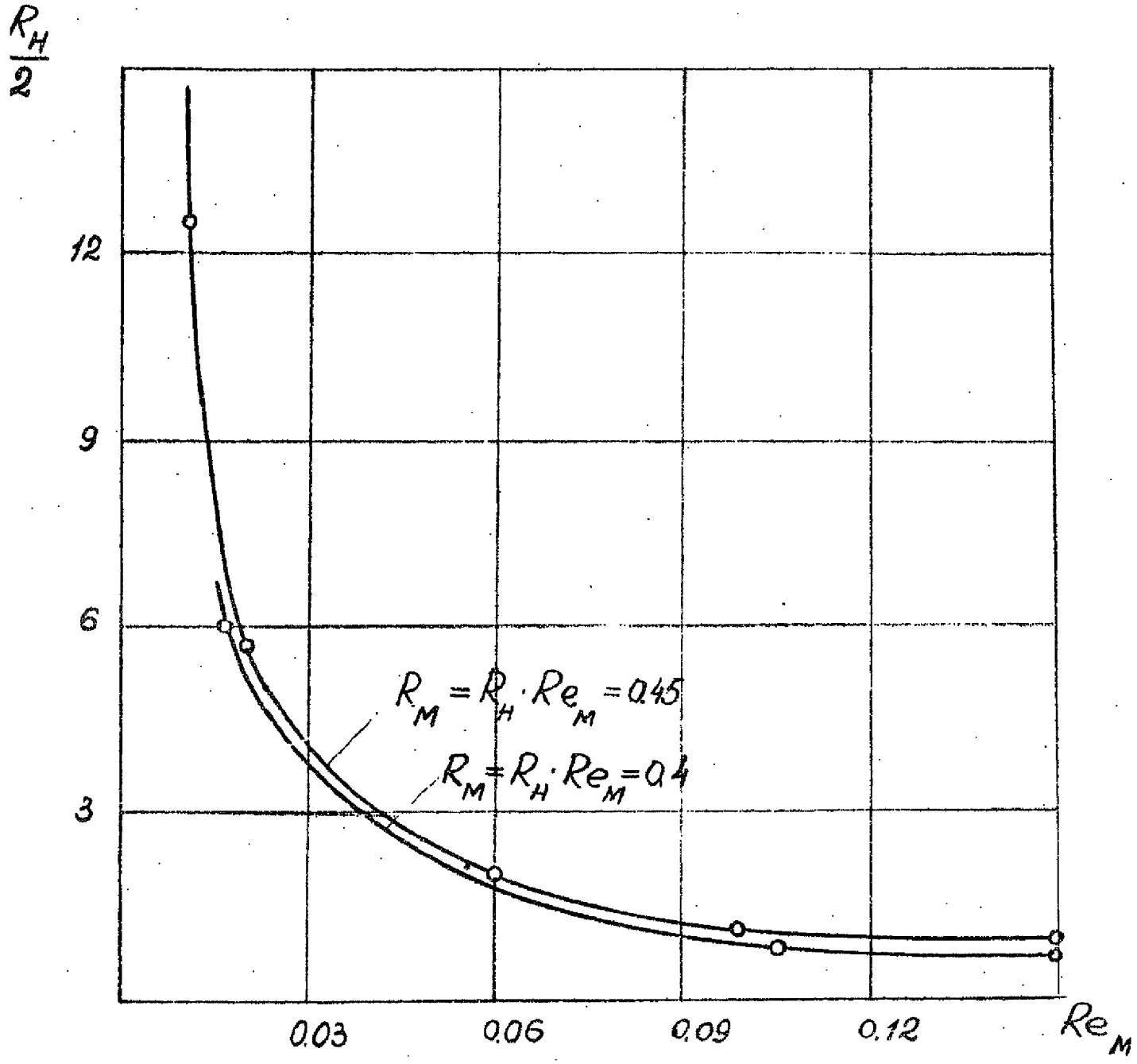
Фиг. 47

Это означает, что расширение происходит за счет геометрического фактора, роль которого убывает по мере увеличения радиуса. Затем в некоторый момент джоулев нагрев преобладает над охлаждением и, следовательно, температура интенсивно повышается, газ тормозится и скорость падает. Слабое вытеснение магнитного поля сменяется более интенсивным. Далее рост температуры и перепада магнитного поля замедляется вследствие замедления роста проводимости. При $R_M = 2.2$ с самого начала нагрев преобладает над расширением, газ сильно тормозится и вытесняет магнитное поле.

3. Величина критического значения R_M^* зависит от характера течения газа, а точнее, от скорости его расширения в возмущенной зоне. На фиг. 48 показаны критические кривые для двух случаев, описанных в § 2 и § 3. Верхняя кривая соответствует возмущению температуры и давления, нижняя - возмущению температуры и плотности (контактный разрыв). Как уже отмечалось ранее, первый тип возмущения обусловливал большую скорость расширения газа и тем самым большее его охлаждение.

Таким образом, полученный вид зависимостей показывает влияние скорости расширения газа на критические условия возникновения Т-слоя. А именно, чем меньше скорость расширения газа, тем меньше критическое значение параметра магнитогидродинамического взаимодействия R_M^*, при котором в потоке возникает и развивается Т-слой. Отсюда, в частности, видно, что если газ движется не расширяясь, то при наличии возмущения Т-слой может развиться за достаточно длительное время при произвольных значениях R_M. Предпринятые в связи с этим расчеты для плоского течения подтвердили это утверждение.

Следовательно, в квадранте положительных значений плоскости


$\frac{R_H}{2}$
12
9
6
3
$R_M = R_H \cdot Re_M = 0.45$
$R_M = R_H \cdot Re_M = 0.4$
0.03
0.06
0.09
0.12
Re_M

Фиг. 18

(R_{em}, R_H) при $R_{em} \ll 1$ для любого типа течения газа может быть проведена своя гипербола, расположенная тем выше, чем больше скорость расширения.

Грубая, но эффективная оценка величины R_M^* и ее зависимость от скорости расширения может быть получена из уравнения энергии. Пусть параметры течения таковы, что $R_{em} \ll 1$. Потребуем, чтобы величина магнитного поля была такой, чтобы рост температуры в возмущении начался при $t = 0$, т.е. будем считать, что возмущение развивается, если в начальный момент $dT/dt\,|_{t=0} \geq 0$. Тогда получим, что

$$R_M^* = R_{em} \cdot R_H \geq \lambda \cdot \frac{\partial \ln \mathcal{F} u}{\partial \xi} = \lambda \frac{\partial \ln \eta}{\partial \xi} \qquad (3.1)$$

где λ – размер возмущения, ξ – координата и $\mathcal{F}$ – сечение канала. Для цилиндрического источника $\xi = r$ и $\mathcal{F} = r$, поэтому

$$R_M^* \geq \lambda \cdot \frac{\partial \ln r \cdot u}{\partial r} \qquad (3.2)$$

Приведенная оценка завышена. Это связано с тем, что скорость расширения в цилиндрическом источнике уменьшается с ростом r , поэтому с перемещением возмущения вниз по потоку условия для преимущественного выделения джоулева тепла становятся более благоприятными. Таким образом, выполнение приближенного критерия заведомо обеспечивает "подхват" возмущения. Сопоставление R_M^* полученного из оценки и из точного расчета дает расхождение $\sim 10\%$.

4. Полученные результаты позвсляют отметить еще одну особенность изучаемых процессов. Интенсивный рост температуры в Т-слое начинается не сразу, а по истечении некоторого времени "задержки". На фиг. 49 представлена зависимость времени начала интенсивного развития Т-слоя (время "задержки") от параметра λ , в

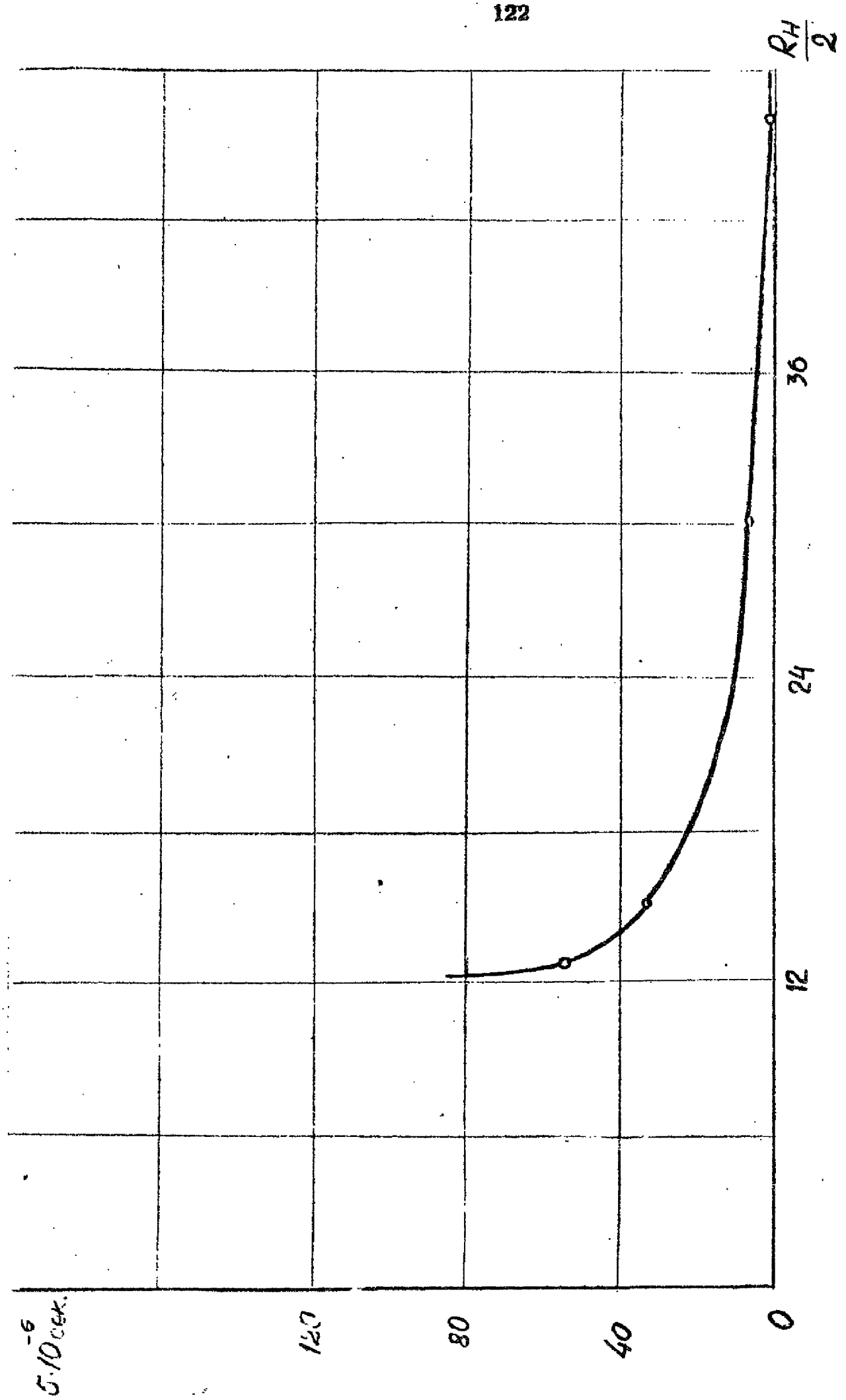


Рис. 49

случае, когда для всех значений температура в зоне возмущения $\widetilde{T} = 2250^0$К и давление не возмущается ($Re_m = 0.017$). Кривая имеет вид гиперболы, одной из асимптот которой является вертикаль $R_H = 24$. Произведение этого числа на $Re_m = 0.017$ дает критическое значение параметра гидромагнитного взаимодействия (фиг.48).

Таким образом, чем более параметр R_M превосходит критическое значение, тем быстрее начинается развитие Т-слоя. Полученные решения показывают, что значения R_M в момент зарождения слоя близки к 0,5 – 1,0.

5. Часть расчетов проводилась с учетом молекулярной теплопроводности, величина которой оказалась, однако, настолько незначительной, что она не повлияла даже на количественный результат. Лучистая теплопроводность в расчетах не учитывалась.

6. Таким образом, имеет место определенный механизм неустойчивости, когда возмущение с конечной амплитудой в потоке вследствие магнитогидродинамического взаимодействия может при определенных условиях приводить к качественной перестройке течения. Возможность существования неустойчивости в диссипативных процессах магнитной гидродинамики отмечалась в работах [29], [30,45], где рассмотрен механизм перегревной неустойчивости малых возмущений, обусловленной джоулевой диссипацией и возрастающей зависимостью электропроводности от температуры. Однако, Т-слой – это нелинейное макрообразование, возникающее и развивающееся в данном случае как реакция на конечное возмущение. С этой точки зрения задачи, связанные с развитием Т-слоя, можно рассматривать как пример нелинейного анализа неустойчивости с помощью численных методов.

Глава IУ.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В СРЕДЕ С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

§ I. Введение

Изложенные в предыдущих главах задачи являются не единственными примерами магнитогидродинамических течений, в которых возникает Т-слой. В настоящей главе исследуются процесоы, происходящие при ударе оильной ударной волны о магнитную стенку. Эту задачу можно использовать для приближенного описания экоперимента в уотановках типа ударной трубы, которые широко применяются для изучения свойств плазмы.

Внешне задача о падении ударной волны на магнитное поле напоминает классическую задачу о распаде разрыва. Однако, в силу каличия в среде конечной проводимости и особенностей ее поведения при малых температурах рассматриваемая задача принципиально отличается от классической постановки. Одним из таких отличий является возникновение в потоке газа при определенных условиях Т-слоя.

В главе при специальных предположениях относительно закона изменения проводимости среды с температурой построено несколько точных решений. При произвольном законе $\sigma(T)$ задача исследуется численно на ЭВМ.

Изучена динамика процессов, возникающих при ударе волны о поле; проанализировано влияние таких параметров задачи как величина напряженности внешнего магнитного поля, особенности закона $\sigma(T)$.

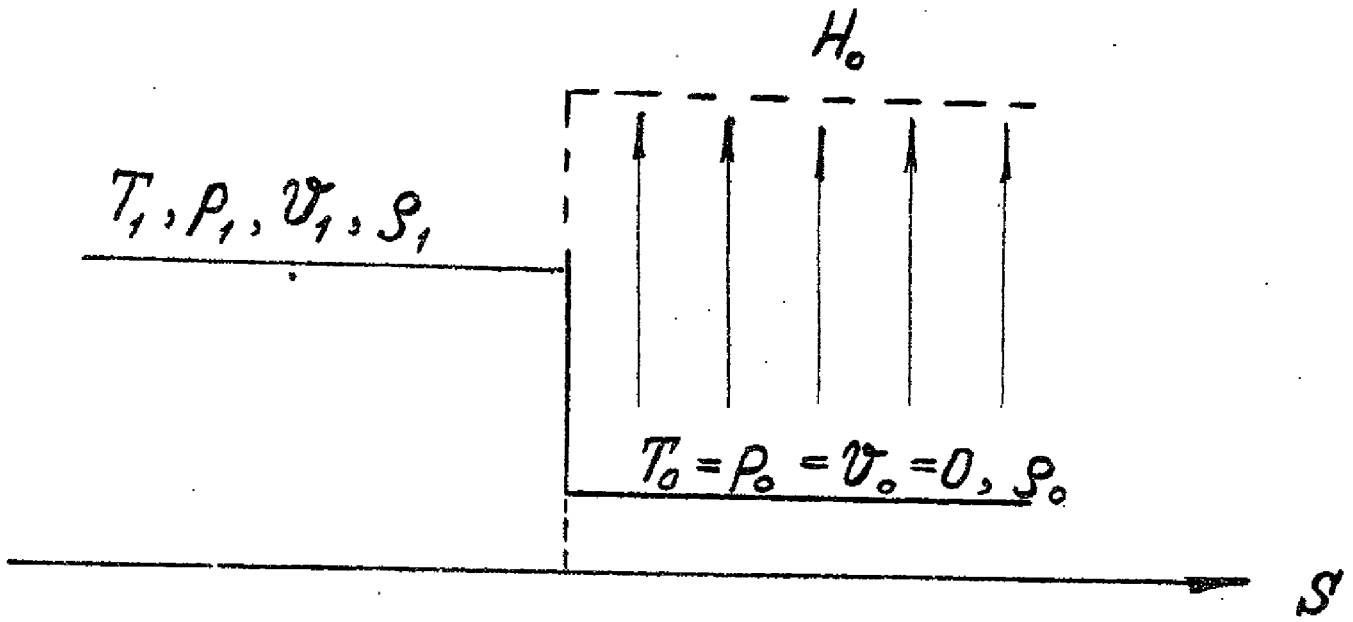
Численное решение сформулированной задачи на ЭВМ оказалось невозможным без разработки новых методов расчета. Построенные в главе точные решения позволили, в частности, осуществить проверку этих методов. Показано, что результаты численных расчетов находятся в удовлетворительном согласии с точными решениями.

В последнее время были предприняты попытки экспериментального обнаружения Т-слоя [7]. Схема эксперимента близка к задаче о падении ударной волны на магнитное поле. В главе описаны некоторые результаты эксперимента и проведено их качественное сравнение с численными расчетами.
Основное содержание главы изложено в работах [15], [16]

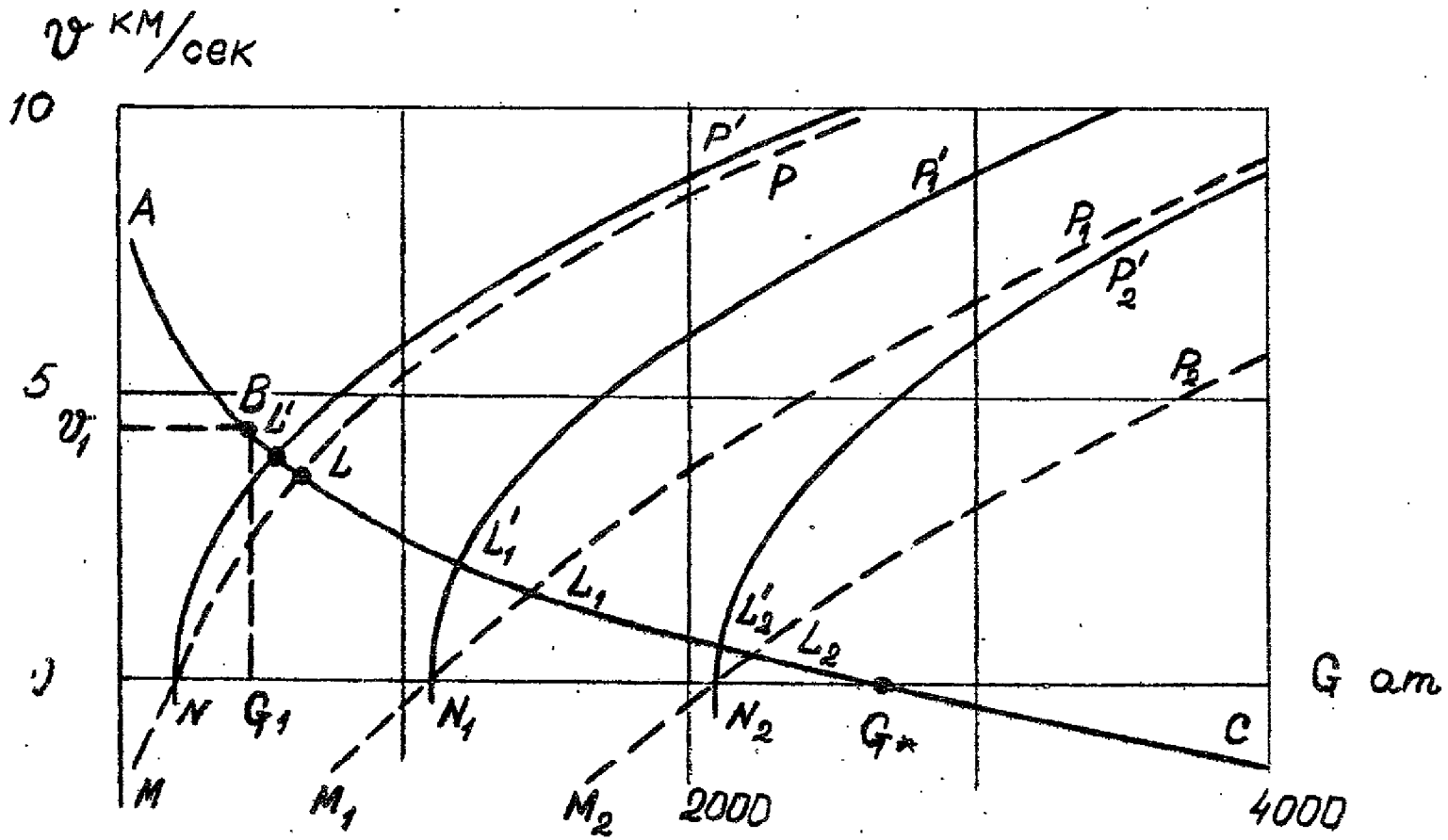
§ 2. Постановка задачи

Рассматривается сильная газодинамическая плоская ударная волна, распространяющаяся по покоящейся холодной плазме, для которой справедливо уравнение состояния идеального газа. В ударной волне плазма нагревается до высокой температуры и ионизируется так, что ее проводимость становится значительной. В начальный момент волна приходит в соприкосновение с магнитным полем, силовые линии которого параллельны плоскости фронта волны. Происходит так называемый удар ударной волны о "магнитную стенку". Изучаются происходящие при этом магнитогидродинамические процессы.

При рассмотрении задачи пренебрегается энергией ионизации. Предполагается, что влияние анизотропии проводимости не существенно. Не учитывается также теплопроводность и излучение.



Фиг 50



v км/сек
10
5
0
v1
A
B
L'
L
P'
P
P1'
P1
P2'
P2
L1'
L1
L2'
L2
N
G1
N1
N2
G*
C
M
M1
M2
2000
4000
G am

Фиг 51

Очевидно, для любого момента времени $t>0$ устанавливается течение, организованное следующим образом: в том месте среды, где фронт ударной волны пришел в соприкосновение с магнитным полем, образуется контактная поверхность; вправо и влево от нее распространяются соответственно преломленная и отраженная волны либо ударные, либо волны разрежения.

Заметим, что слева от контактной поверхности магнитное поле в начальный момент отсутствует. В силу "вмороженности" проникнуть сюда оно не может, и, следовательно, отраженная волна будет чисто газодинамической. Построим для нее на плоскости G, v адиабату Гюгонио, соответствующую ударным волнам, и адиабату Пуассона, соответствующую простым волнам разрежения.

Можно показать, что для нашего случая, адиабата Гюгонио имеет вид:

$$v_{y/B}^{-}(G, v_1, G_1) = v_1 - \frac{G - G_1}{\sqrt{\left[\frac{\varkappa+1}{2}(G-G_1)+\gamma G_1\right]\rho_1}} \qquad (4.3)$$

$$G \geq G_1$$

(кривая BC на фиг. 51)

а адиабата Пуассона записывается в форме:

$$v_{BP}^{-}(G, v_1, G_1) = v_1 - \frac{2}{\gamma+1}\left(\gamma\frac{G_1}{\rho_1}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{G}{G_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right] \qquad (4.4)$$

(кривая AB на фиг. 51)

Точка B с координатами G_1, v_1 отвечает состоянию среды за исходной волной, по которому распространяется отраженная волна. Из-за отсутствия поля полное давление в формулах

(4.3) и (4.4) равно статическому давлению газа. Кривые (4.3) и (4.4) имеют в точке B общую касательную.

Движение справа от контактной поверхности из-за наличия поля будет иметь магнитогидродинамический характер. На плоскости G, v для преломленных волн, распространяющихся по начальному фону $v_0 = 0$, $G_0 = H_0^2/8\pi$ (точка N), построим адиабату Гюгонио, соответствующую магнитогидродинамическим ударным волнам:

$$v^{+}_{M.УВ}(G, v_0, G_0) =$$

$$= \frac{\sqrt{2/\rho_0}\,(G - G_0)}{\sqrt{\frac{\gamma+3}{2}(G-G_0)+2G_0+\sqrt{\left[\frac{\gamma-1}{2}(G-G_0)+2G_0\right]^2+4(2-\gamma)G_0(G-G_0)}}},$$

$$G \geq G_0 \qquad (4.5)$$

(кривая NP на фиг.51)

Для $G \leq G_0$ кривая (4.5) может быть продолжена гладким образом линией MN, отвечающей магнитогидродинамическим волнам разрежения.

Точка пересечения кривых ABC и MNP (точка L) однозначно определяет картину распада разрыва, возникающую при ударе волны о "магнитную стенку" в случае "вмороженности".

Координаты этой точки на плоскости G, v равны соответственно значениям полного давления и скорости, устанавливающимся на контактной поверхности.

Скорости фронтов, а также остальные параметры отраженной и преломленной волны теперь просто определяются по известным

соотношениям Гюгонио.

Точное решение задачи для модели " $G=\infty$ " построено. Исследуем некоторые его свойства.

Нетрудно видеть, что при любой напряженности магнитного поля H_0 отраженная волна будет ударной,- точка L может лежать только на ударной адиабате BC.

Что касается преломленной волны, то она в зависимости от положения точки L , может быть либо ударной, либо волной разрежения. Положение точки L на адиабате BC (L, L_1, L_2, и т.д.) определяется положением на оси G точки N (N_1, N_2, N_3, и т.д.) и т.л.), которое в свою очередь определяется от величины напряженности магнитного поля H_0 . При $H_0=0$ кривая NP проходит через точку B . При малых H_0 точка L лежит рядом с точкой B . В этом случае исходная ударная волна испытывает незначительные изменения; налево отражается слабое возмущение, распространяющееся относительно газа с адиабатической скоростью звука $c_{\gamma,1}=\sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$.

На фиг. 51 видно, что существует некоторое критическое значение магнитного противодавления G_* и соответственно критическое значение напряженности магнитного поля $H_*=\sqrt{8\pi G_*}$. Это значение определяется параметрами фона и падающей волны

$$\frac{H_*^2}{8\pi}=\frac{2(3\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\cdot\mathcal{D}^2\rho_0 \qquad (4.6)$$

При H_0 близких к H_* исходная ударная волна отражается от магнитного поля, как от неподвижной жесткой стенки;

направо распространяется слабое возмущение, скорость которого относительно газа равна магнитогидродинамической скорости звука $C_{H_0} = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0 + H_0^2/4\pi\rho_0} = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$

При превышении критического значения поля $H_0 > H_*$ характер распада меняется, преломленная волна становится волной разрежения

Фиг. 52÷56 иллюстрируют зависимость различных характеристик преломленной и отраженной волны от напряженности магнитного поля H_0 в диапазоне $0 \leq H_0 \leq H_*$

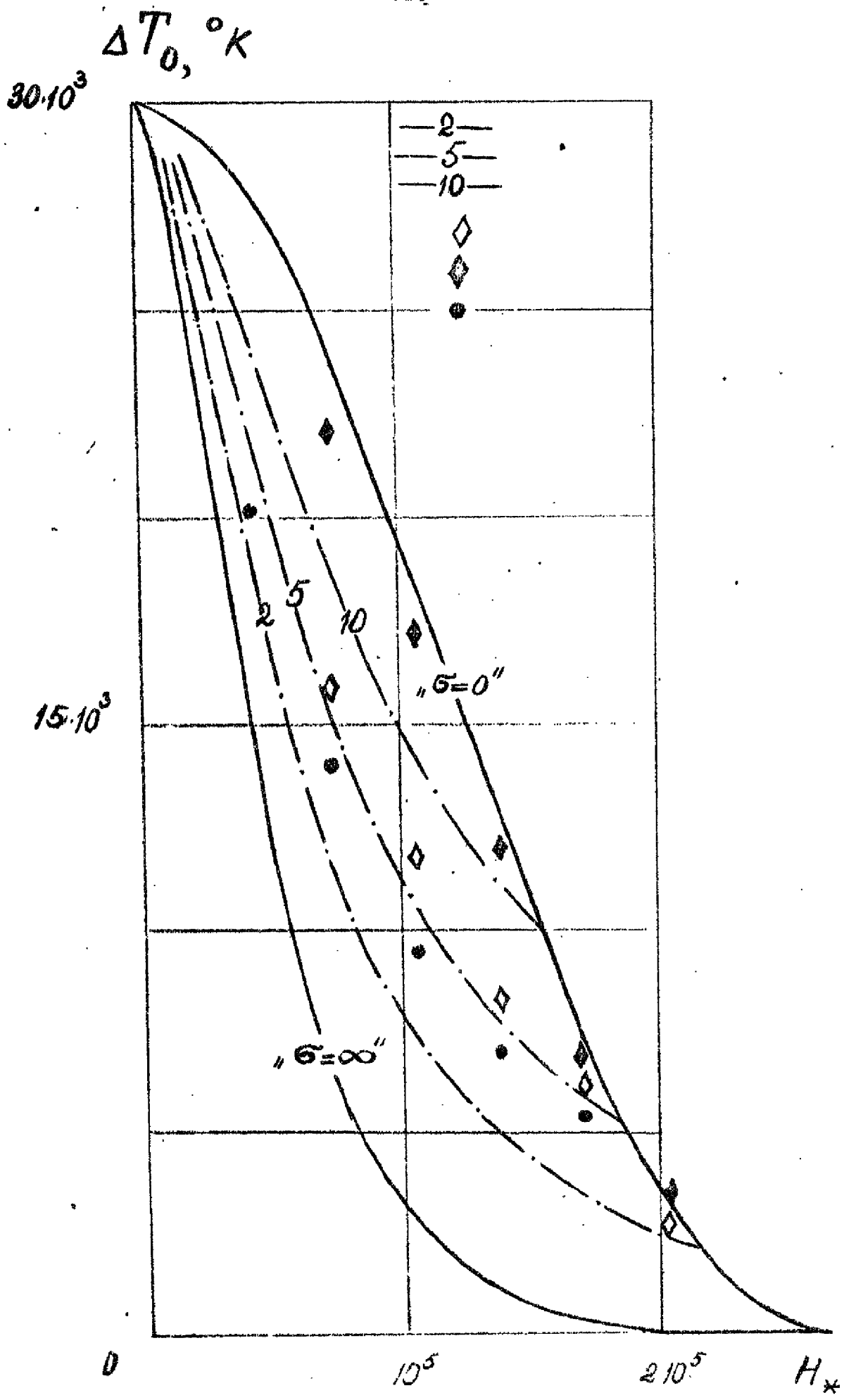
Результаты представлены для исходной падающей волны с параметрами: скорость фронта $\mathcal{D}$ = 5,7 км/сек, плотность за волной ρ_1 = 7,12.10^{-3} г/см^3 при плотности на фоне ρ_0 = 1,78.10^{-3} г/см^3, температура и скорость газа за фронтом T_1 = 30 000°К, v_1 = 4,3 км/сек, молекулярный вес газа μ = 40 г/моль, γ = 5/3§

Модели "$\sigma = \infty$" соответствуют оплошные линии.

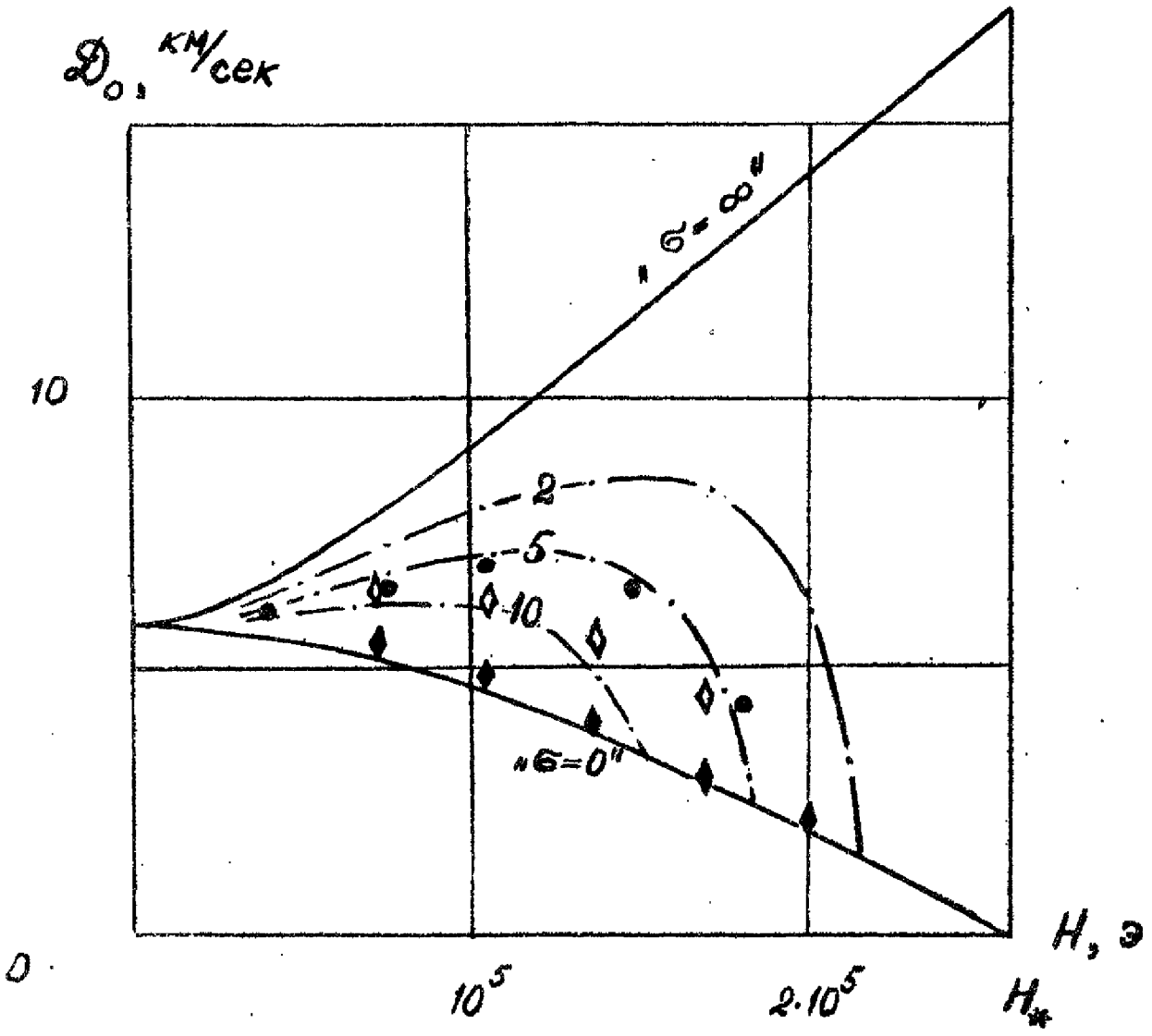
На фиг. 52 изображена амплитуда преломленной волны по температуре ΔT_0, на фиг. 53. скорость фронта преломленной волны $\mathcal{D}_0$, на фиг. 54 – амплитуда преломленной волны по полному давлению ΔG_0 и величина приращения магнитного поля за её фронтом ΔH_0, на фиг. 55 амплитуда преломленной волны по плотности $\Delta\rho$.

Отметим, что скорость фронта преломленной волны с ростом поля увеличивается в данной модели при ударе о "магнитную стенку" волна не тормозится, а ускоряется.

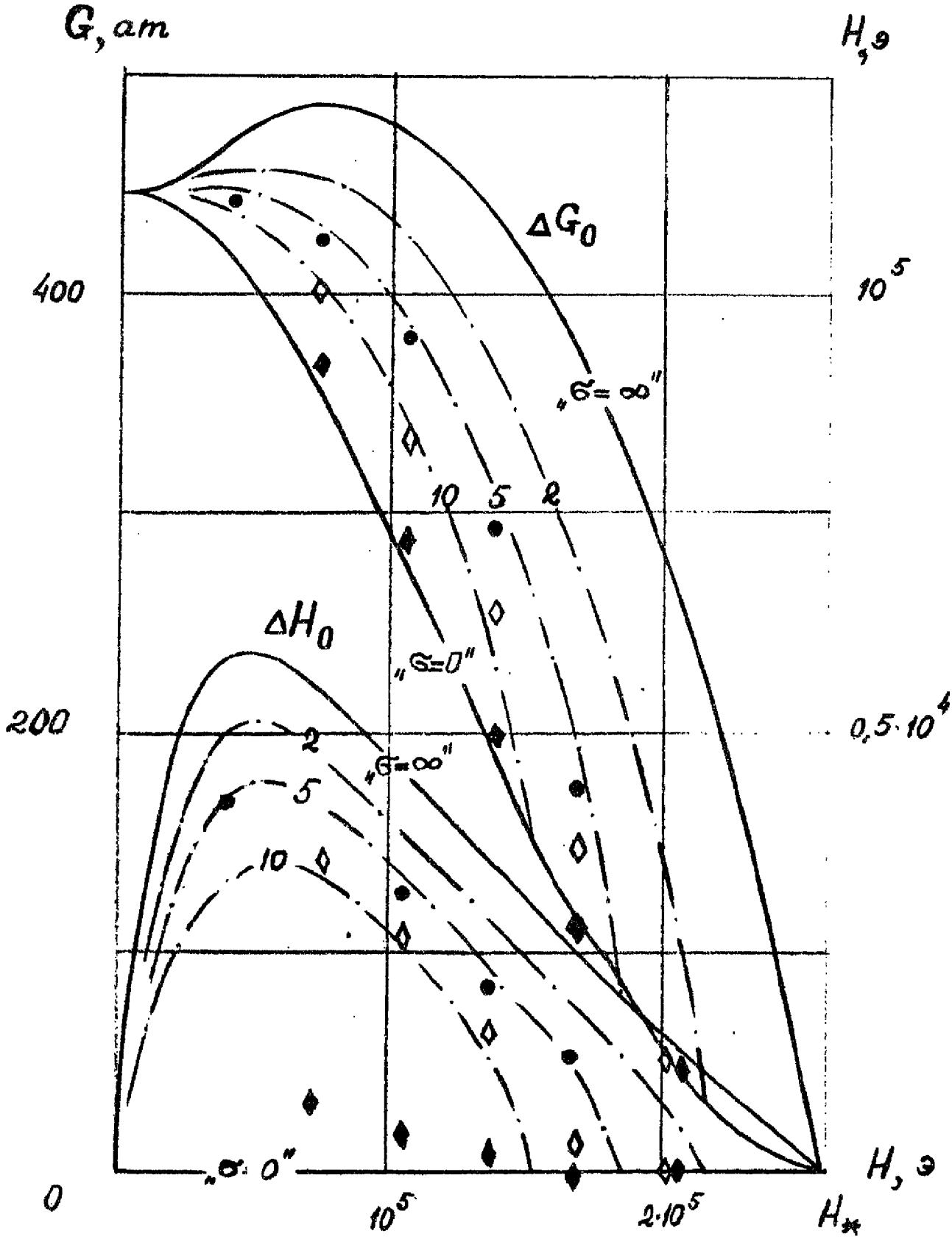
Величина приращения поля за фронтом преломленной волны, в



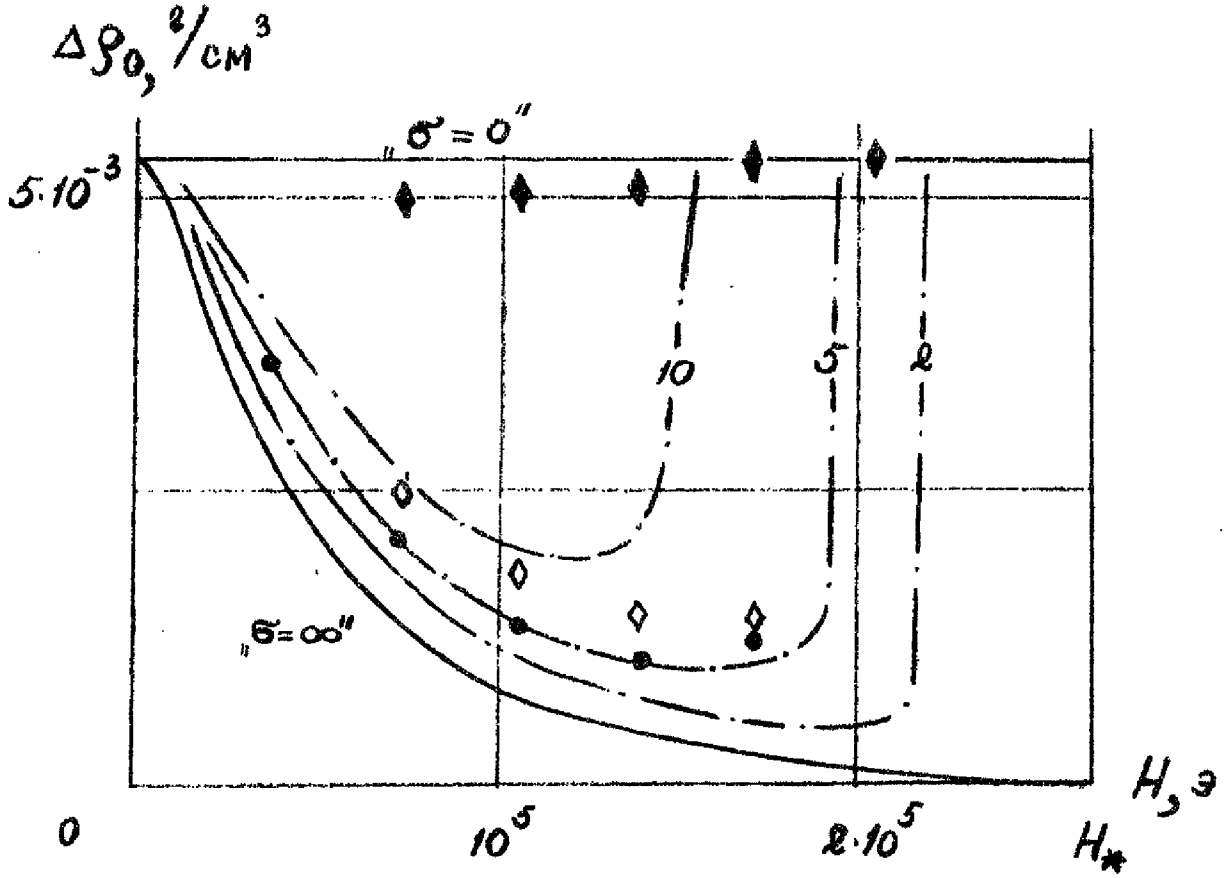
Фиг 52



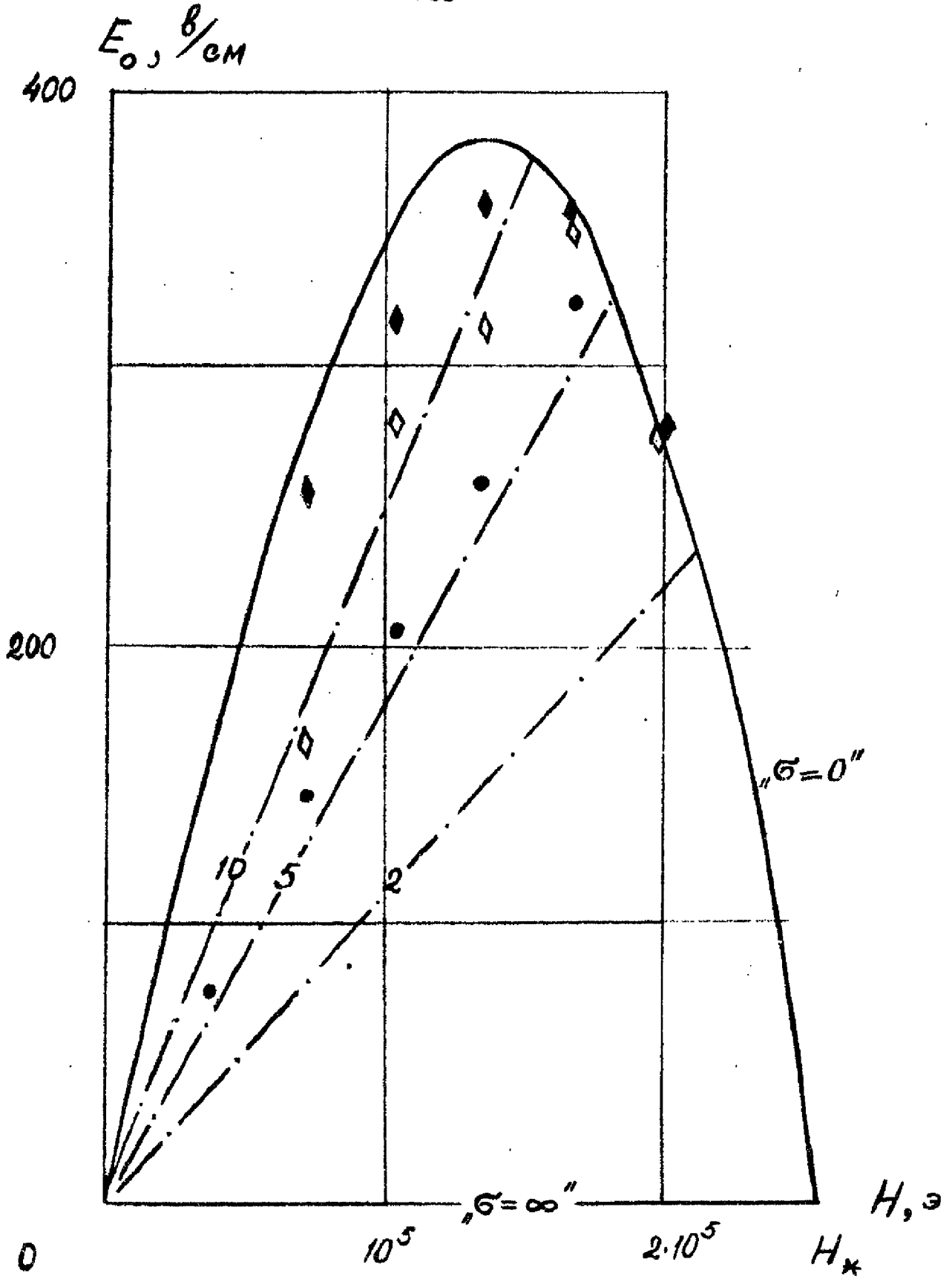
Фиг 53.


G, am
H, э
400
200
0
10^5
$0{,}5\cdot10^4$
$2\cdot10^5$
H_*
H, э
ΔG_0
ΔH_0
„σ=∞"
„σ=0"
10
5
2
„σ=0"
„σ=∞"
2
5
10
„σ=0"

Фиг 54



Фиг 55



Фиг 56

также ее амплитуда по полному давлению с ростом напряженности поля меняются немонотонно.

На фиг. 57, 58 дана зависимоть от H_0 некоторых параметров отраженной волны: на фиг. 57 ее амплитуда по температуре ΔT_1, на фиг. 58 скорость фронта D_1, а также скорость газа в районе контактной поверхности V_2. Изменение этих величин с ростом поля имеет монотонный характер.

Следует подчеркнуть, что модель "$\sigma = \infty$" является весьма грубым приближением поставленной задачи. Если предположение о "вмороженнооти" в горячей зоне за фронтом ударной волны в эначительной мере оправдано, то для холодного фона ($T_0 = 0$) оно плохо применимо.

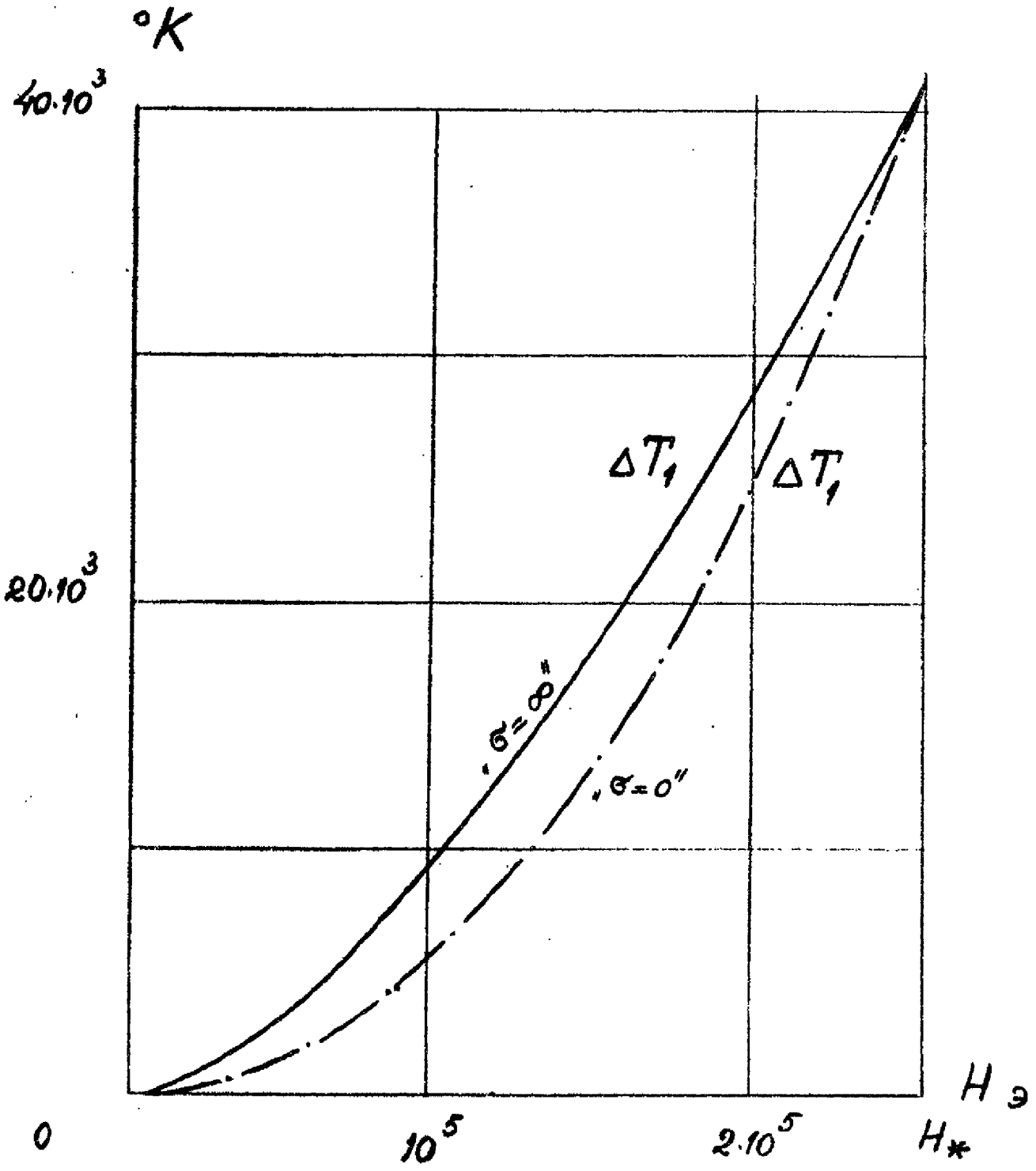
Для газа о реальной зависимостью проводимости от температуры случай полной "вмороженности" можно рассматривать лишь как предельный.

Б. Модель "$\sigma = 0$"

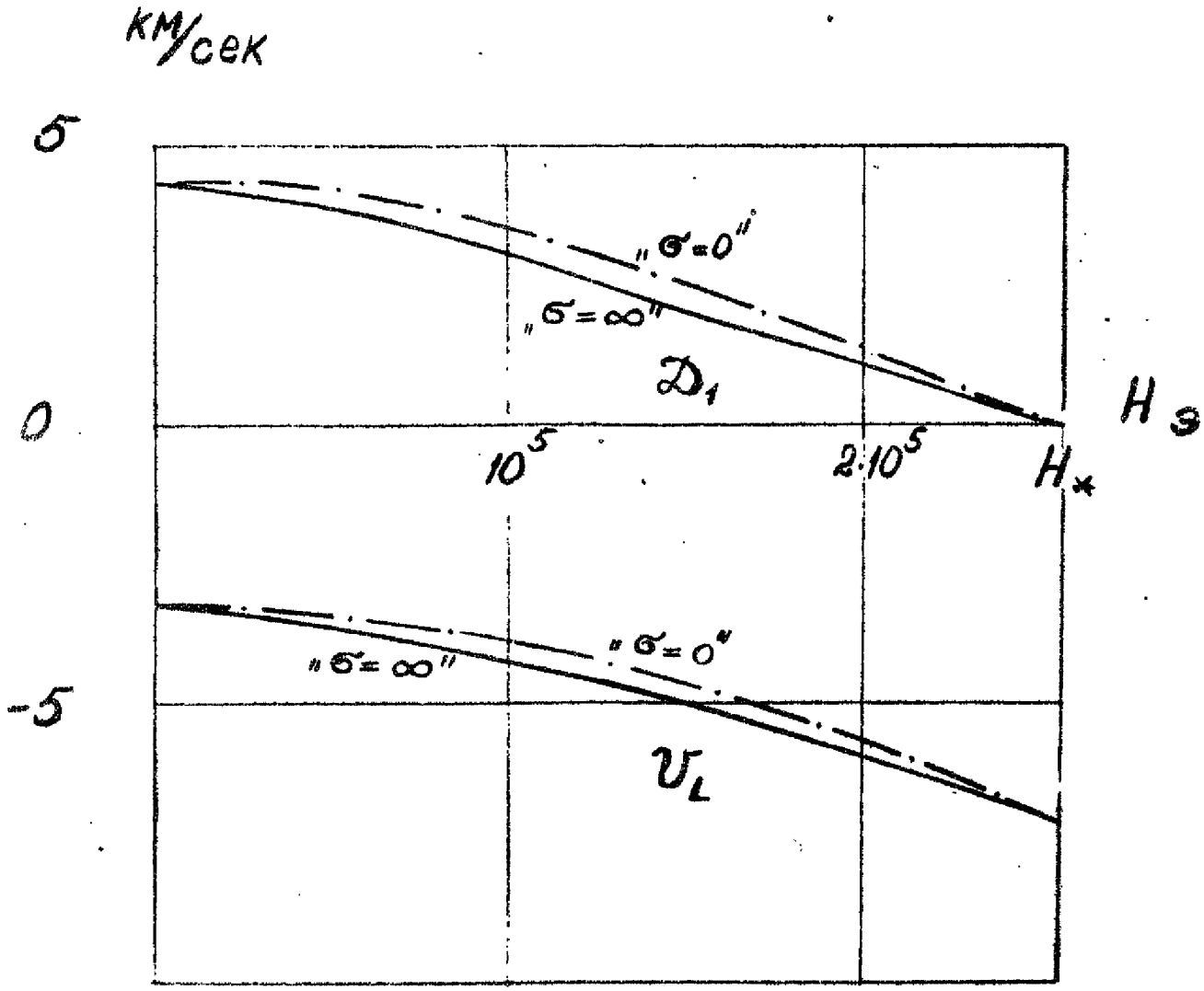
Эта модель по отношению к описанной выше модели „$\sigma = \infty$" является в некотором смыоле противоположным предельным случаем.

Точное решение задачи отроится здесь при следующих предположениях о законе $\sigma(T)$.

Проводимость среды олева от образующейся в результате удара ударной волны о поле контактной поверхности считается бесконечно большой. Справа от контактной поверхности проводимость полагается равной нулю, в силу чего преломленная волна уже не взаимодействует ё магнитным полем и является таким образом чисто газодинамической. Действие магнитного поля выражается в дополнительном давлении, которое оно оказывает на



Фиг 57



Фиг 58

контактную поверхность.

Для реальной задачи модель "$\sigma = 0$" может быть использована как хорошее приближение при сильных магнитных полях, близких к критическому. Действительно, в этом случае преломленная волна оказывается слабой, а проводимость за ее фронтом незначительной.

Очевидно, что и в модели "$\sigma = 0$" формулы (4.3) и (4.4) сохраняют силу, и таким образом на плоскости θ, v кривая ABC, соответствующая отраженным волнам, не меняется. Для преломлённой волны, учитывая давление $\theta_0 = H_0^2/8\pi$ которое магнитное поле оказывает на контактную поверхность, вместо (4.5) можно записать уравнение обычной адиабаты Гюгонио:

$$v_{y.13}^{+} = \sqrt{\frac{2}{(\gamma+1)\rho_0}(\theta - \theta_0)}, \quad \theta \geq \theta_0 \qquad (4.7)$$

(кривая NP' на фиг. 51)

Точка пересечения кривых ABC и NP' (точка L') полностью определяет точное решение задачи. Кривые, иллюстрирующие зависимость точного решения "$\sigma = 0$" от величины магнитного поля H_0, приведены на фиг. 52÷56 (сплошные линии).

В этом решении магнитное поле за фронтом преломленной волны не возрастает, т.к. проводимость здесь равна нулю. Изменение всех параметров с ростом поля носит монотонный характер. В модели „$\sigma = 0$" также существует критическое магнитное поле H_*, его величина совпадает со значением (4.6)

найденным выше. При H близких к H_* преломленная волна вырождается в слабое возмущение, распространяющееся относительно газа в отличие от модели „$\sigma=\infty$" с адиабатической скоростью звука $c_{f0}=\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$, которая в предположении холодного фона ($T_0=\rho_0=0$) равна нулю.

Отметим также, что амплитуда преломленной волны по плотности не зависит от напряженности поля H_0 и равна $\Delta\rho_0=\rho_1-\rho_0=\frac{2}{\gamma+1}\rho_0$. Этот факт имеет место лишь в предположении холодного фона ($T_0=0$), которое оправдано до тех пор, пока температура за фронтом преломленной волны значительно превоходит температуру фона (приближение сильной волны). При напряженности магнитного поля близкой к критической это предположение не выполняется.

Учет $T_0\neq 0$ приводит лишь к тому, что при приближении к H_* кривая $\Delta\rho_0(H)$ резко устремляется к нулю.

На фиг. 57,58 предотавлена зависимость некоторых параметров отраженной волны от величины напряженности магнитного поля (сплошные линии)

В. Модель " $\sigma=0/\infty$ "

Для сформулированной выше задачи о падении ударной волны на магнитное поле можно построить еще одно точное решение, если предположить, что зависимость проводимости газа от температуры имеет вид бесконечного скачка

$$\sigma(T)=\begin{cases}0, & \text{при } T\le T^*\\ \infty, & \text{при } T>T^*\end{cases} \qquad (4.8)$$

Закон (4.8) также является модельным, однако, по оравнению со олучаями " $\sigma = \infty$ " и " $\sigma = 0$ " он более оправдан с физической точки зрения. Действительно, в реальных газах заметная проводимость появляется лишь до достижении пороговой температуры T^* и затем резко возрастает с температурой, так что в ряде случаев зависимость $\sigma(T)$ может аппроксимирована скачком в окрестности T^*.

Построение точного решения для закона (4.8) связано с раскрытием неопределенности для величины напряженнооти электрического поля на фоне. Эта величина $E_0 \sim \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0 / \sigma(T_0)$ формально может принимать любое значение, т.к. и $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0 = 0$ и $\sigma(T_0) = 0$ $\left(T^* \geq T_0 = 0\right)$. В то же время от этой величины зависят значения параметров за фронтом преломленной волны, и, следовательно, характер процесса в целом. Неопределенность можно устранить, воспользовавшись результатами работ [32÷35]. В них показано, что в нестационарных задачах магнитной гидродинамики с ударными волнами, ионизирующими холодной непроводящий газ, по которому они распроотраняются (на фоне $\sigma = 0$), обычных соотношений Гюгонио, которые выражают непрерывность касательной составляющей электрического поля, а также потоков вещества, импульса и энергии, недостаточно для определения интенсивности ударной волны.

В этом случае необходимо учитывать дополнительное соотношение, связывающее параметры потока до и после ударной волны. Это соотношение вытекает из расомотрения структуры ударной волны в непрерывном решении, где учтены диссипативные эффекты, и зависят от соотношения между диссипативными коэффициентами.

В некоторых специальных случаях указанное соотношение может быть записано в простом алгебраическом виде. В частности, это можно сделать для задачи о взаимодействии ударной волны с магнитным полем в среде, проводимость которой описывается законом (4.8).

Будем считать, что значение напряженности магнитного поля на фоне перед преломленной волной за счет граничного условия поддерживается постоянным и равным H_0. Тогда дополнительное соотношение записывается следующим образом:

$$E_0 = \frac{1}{c} v^* H_0 \qquad (4.9)$$

Здесь $v^* = \sqrt{\frac{2RT^*}{\gamma - 1}}$ – значение скорости в непрерывном решении в той точке, где достигается пороговая температура T^* [32].

Равенство (4.9) раскрывает неопределенность, о которой говорилось выше; параметры потока за фронтом преломленной волны однозначно определяются, если задана ее скорость D_0. Параметры газа за отраженной волной также легко рассчитываются по газодинамическим соотношениям Гюгонио, если задана скорость волны D_1. Значения D_0 и D_1 определяются из условия "сшивания" решений для преломленной и отраженной волн на контактной поверхности. Это условие состоит в непрерывности полного давления G и продольной компоненты скорости v. Таким образом построение точного решения сводится к анализу алгебраической системы уравнений.

Результаты точного решения „$\sigma = 0$‰" для преломленной волны при $T^* = 2000^0$К, 5000^0К и 10000^0К приведены на фиг. 52-56

(штрих-пунктирные линии, помеченные соответственно цифрами 2,5,10).

Эти решения совпадают о кривой „$\sigma=0$" там, где температура газа за фронтом преломленной волны падает ниже соответствующей пороговой величины T^*. Очевидно, что кривая „$\sigma=\infty$" получается из решения для модели „$\sigma=0/\infty$" при $T^*=0$. Исключение составляет точка при H_*. Решение „$\sigma=0/\infty$" в этой точке совпадает с решением „$\sigma=0$" и является таким образом разрывным.

Анализ показывает, что модель „$\sigma=0/\infty$" является промежуточной по отношению к случаям „$\sigma=\infty$" и „$\sigma=0$"

В построенном точном решении скорость фронта преломленной волны D_0 при увеличении напряженности магнитного поля меняется немонотонно. Кривая $D_0(H)$ имеет максимум, который тем больше чем меньше T^*. При T^* близких к T_1 этот максимум становится слабо выраженным, а его положение смещается в область слабых полей. Таким образом, при падении ударной волны на "магнитную стенку" в некотором диапазоне изменения H_0 и T^* скорость преломленной волны по отношению к скорости падающей не уменьшается, а увеличивается.

Немонотонно изменяются с ростом поля и другие параметры преломленной волны: амплитуда по полю ΔH_0 и полному давлению ΔG_0 (фиг. 54), амплитуда по плотности $\Delta \rho_0$ (фиг. 55 : На фиг. 56 представлена напряженность электрического поля "наведенного" на фоне E_0 для всех трех моделей. Аналогичные кривые можно построить в модели „$\sigma=0/\infty$" и для отраженной волны. Они также попадут в область, ограни-

ченную предельными линиями „$\sigma = \infty$" и „$\sigma = 0$" (Фиг. 57, 58). Вообще, на основании точных решений, следует отметить, что характер закона $\sigma(T)$ сравнительно слабо влияет на параметры отраженной волны и, напротив, сильно на волну преломленную.

§ 4. Результаты численного решения

При произвольном законе $\sigma(T)$ решение задачи о падении ударной волны на "магнитную стенку" может быть получено только численно. При расчетах задача рассматривалась в ограниченной области. Краевые условия формулировалиоь следующим образом: левая граница – поршень из идеального проводника, который вдвигается в газ с постоянной скоростью v_1 ; правая граница – непожвижная стенка, на которой задано постоянное значение напряженности магнитного поля H_0 .

В первых расчетах при рассмотрении уравнения для магнитного поля (4.I.2) использовалоя распространенный в таких случаях прием: к закону $\sigma(T)$ добавлялась некоторая малая величина $\sigma_м$, ниже которой таким образом проводимость не могла опуститься

Введение такой искусственной добавки связано с методическими трудностями, возникающими при расчете обычными методами магнитогидродинамических процессов в областях с малыми проводимостями.

Однако, в рассматриваемой задаче в силу ее специфики такой подход оказался неприменимым. Исследования показали, что величина $\sigma_м$, порождая искусственную проводимость на фоне

существенным образом влияет на результаты. Магнитное число Рейнольдса, рассчитанное по величине σ_M и магнитогидродинамической скорости звука $C_{H_0} = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$, которая при отличной от нуля проводимости становится характерной скоростью на фоне, оказывается значительным (Re_{m_0} 0,1÷0,5). Следствие этого – искусственная близость результатов к модели "$\sigma=\infty$". Уменьшить же величину σ_M и тем самым снизить Re_{m_0} оказалось невозможным по методическим соображениям.

В работах [10,11] описан численный метод решения уравнения теплопроводности в среде с сильно меняющимися свойствами, который позволяет преодолеть описанные выше трудности. Этот метод, основанный на применении к уравнению поля потокового варианта метода прогонки, дает хорошее совпадение с результатами точных решений (в частности, см.ниже).

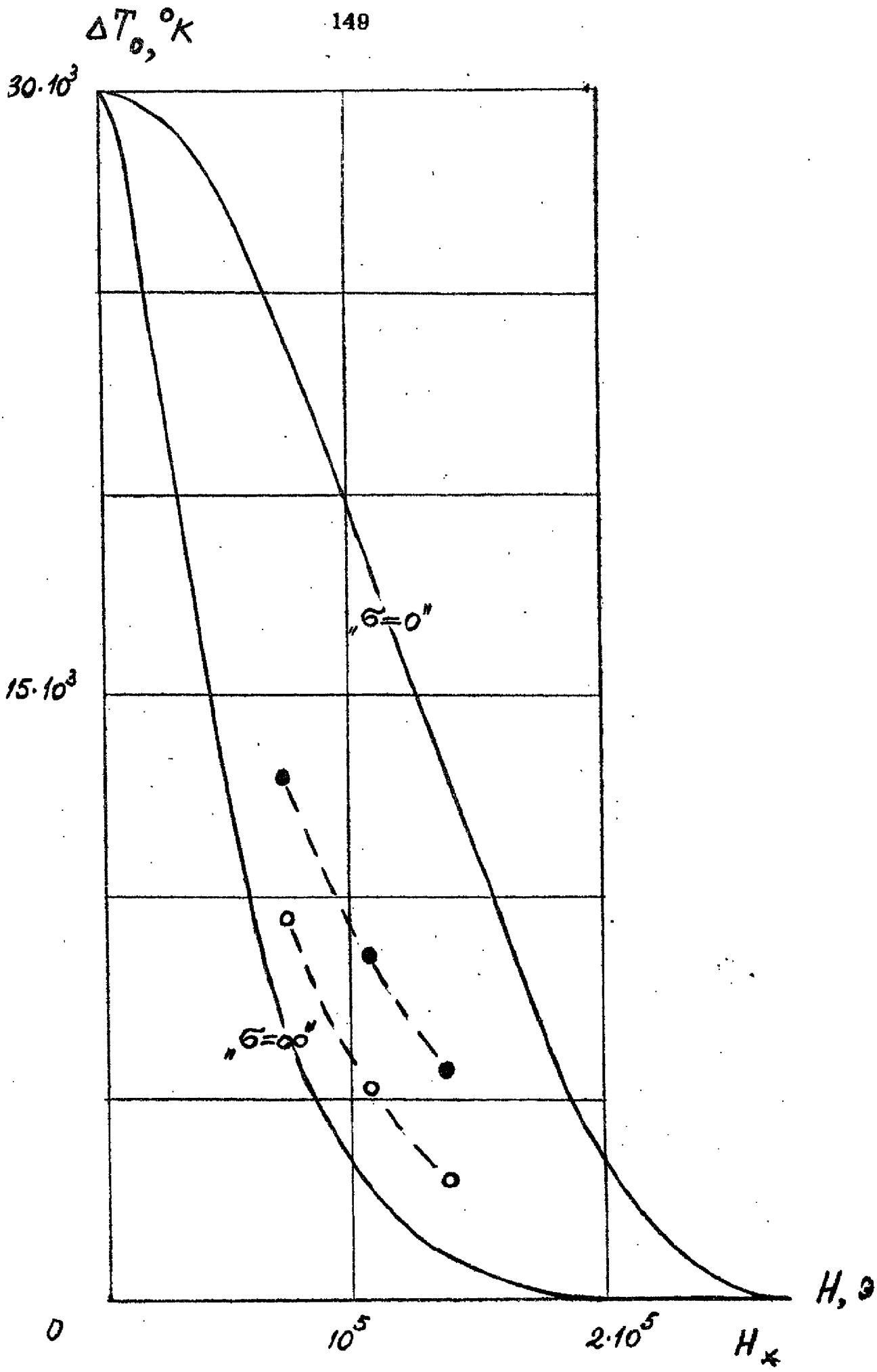
На фиг.59,60 для сравнения приведены результаты расчетов задачи с использованием двух различных методик для одного и того же закона $\sigma(T)$:

$$\sigma(T) = 18{,}9\,T^{3/2}\ \text{Мо/см} \qquad (4.10)$$

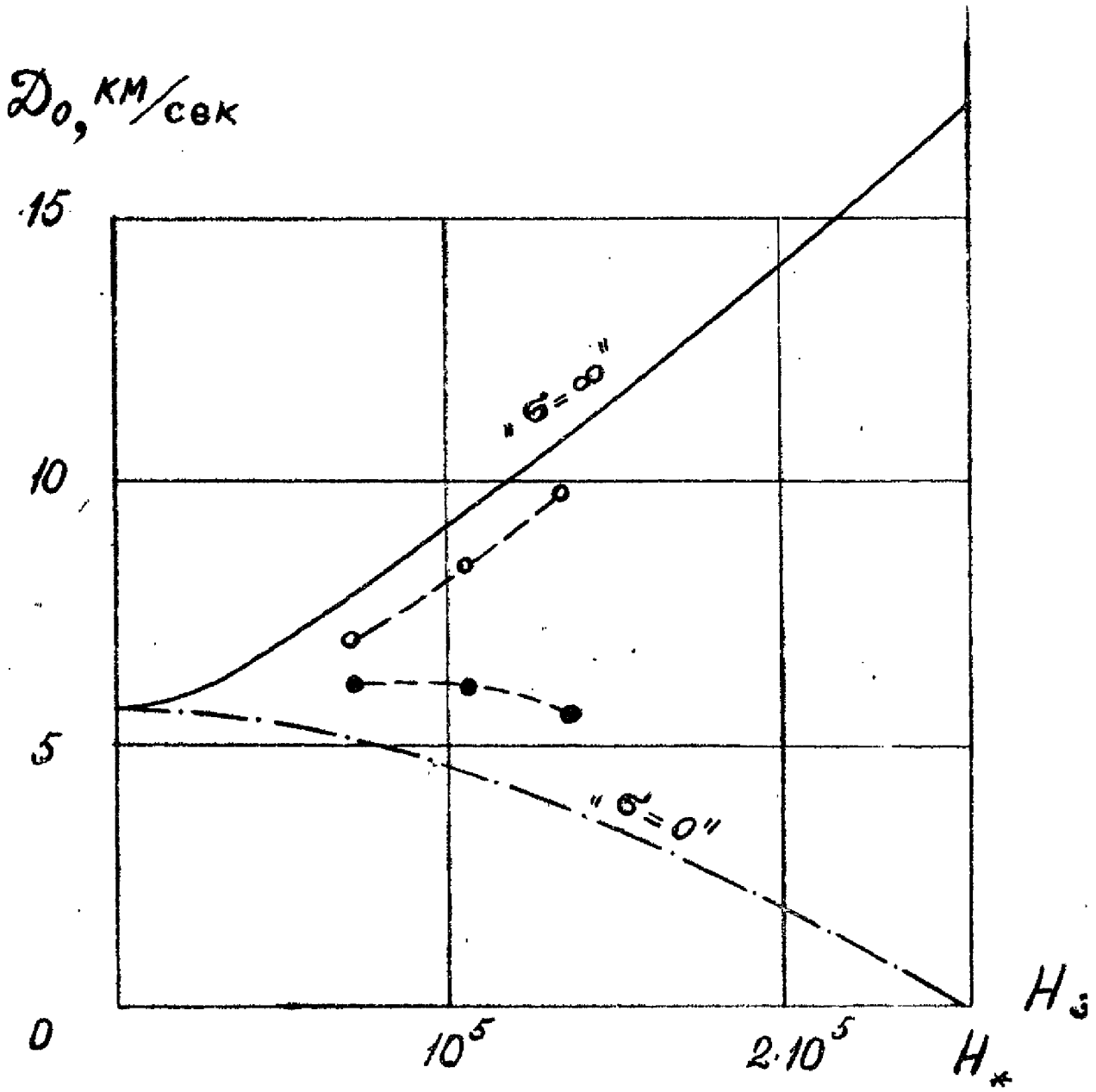
(Здесь температура T измеряется в 10^3°К).

Нетрудно видеть, что расхождение результатов доходит до 100%.

Сформулированная задача об ударе волны о магнитное поле похожа на классическую задачу о распаде магнитогидродинамического разрыва. Однако, между обеими постановками имеется существенное различие. Классическая задача рассматривается без учета диссипативных процессов. В нашем случае наличие конечной проводимости приводит к появлению джоулева нагрева, а также



Фиг 59



Фиг 60

к диффузии магнитного поля в область слева от контактной поверхности. В силу этого течение выходит на установившийся режим только асимптотически на больших временах, в то время как в классической задаче о распаде такой режим устанавливается мгновенно.

Другое важное отличие состоит в следующем. Задача о распаде разрыва является задачей Коши, она рассматривается в неограниченном пространстве и полностью определяется начальными данными.

Однако, например, при численном решении задачу о распаде можно рассматривать и в ограниченной области. В этом случае в обычной газодинамике или во "вмороженной" магнитной гидродинамике влияние границ из-за конечной скорости распространения сигнала скажется лишь по прошествии некоторого времени. До этого момента решение задачи в ограниченной области ничем не будет отличаться от решения в неограниченном пространстве.

В нашей задаче при непроводящем фоне изменение электромагнитного условия на правой границе мгновенно (в магнитогидродинамическом приближении скорость распространения электромагнитного сигнала бесконечна) начинает воздействовать на развивающуюся картину течения. "Переносчиком" информации о правом граничном условии является электромагнитная волна, которая испускается преломленной волной и после многократных отражений от правой границы и фронта и ударной волны "наводит" на фоне соответствующее электрическое поле.

Правда, при конкретном виде граничного условия $H = H_0 = const$, которое использовано здесь, решение

оказывается точно таким же, что и в неограниченном пространстве. Причина этого в том, что упомянутая выше электромагнитная волна, существенно изменяя напряженность электрического поля на фоне, практически не влияет на величину магнитного поля. Однако, если в качестве правой границы рассмотреть, например, стенку из идеального проводника, условие на которой $E=0$ (см. § 6 настоящей главы), то решение с самого начального момента будет развиваться по другому.

В этом смысле в задачах с непроводящими областями краевые условия определяют решение наравне с начальными данными с самого начала процесса.

Все вышесказанное справедливо не только при абсолютно непроводящем фоне, но и при достаточно малой проводимости фона. Таким образом имеет место предельный переход при стремлении проводимости фона к нулю.

Параметры потока за фронтом преломленной волны зависят от величины E_0, последняя определяется структурой волны [32], таким образом, течение, устанавливающееся за волной, а, следовательно, и вся картина взаимодействия зависит от структуры волны. В численных расчетах для обеспечения сквозного счёта ударных волн в уравнения движения (4.I.I) и энергии (4.I.3) введена искусственная вязкость Неймана [12]

В обычной газодинамике, а также во "вмороженной" магнитной гидродинамике действие такой вязкости выражается лишь в том,

что она "размазывает" скачки плотности и скорости в ударных волнах на 3--4 счетных интервала. В нашей задаче вязкость (физическая или искусственная), внося свой вклад в структуру фронта преломленной волны, посредством описанного выше механизма влияет на все решение в целом. Поэтому, строго говоря, при решении задачи о падении ударной волны на "магнитную стенку" для реального газа нужно задать не только точный закон проводимости, но и вязкости.

Использованная нами искусственная вязкость моделирует действие реальной вязкости.

В численных расчетах величина напряженности электрического поля получается автоматически, благодаря применению к уравнению поля (4.I.2) потокового варианта метода прогонки [10] [11]. Чтобы проверить возможность этого метода, была проведена контрольная серия расчетов задачи о взаимодействии ударной волны с магнитным полем с законом $\sigma(T)$ в виде :

$$\sigma(T)=\begin{cases} 0\ , & \text{при } T \le 5000^{\circ}K \\ 5\cdot 10^{4}\ \text{мо/см}\ , & \text{при } T>5000^{\circ}K \end{cases} \qquad (4.11)$$

Закон (4.II) является приближением к зависимости (4.8) при $T^{*} = 5000^{0}$К. Результаты численного решения (темные кружки на фиг. 52÷56) оказываются близкими к кривой точного решения.

Такое совпадение результатов свидетельствует о том, что данный способ счета позволяет преодолеть трудности, которые обычно возникают при использовании сквозных численных методов

для анализа задач магнитной гидродинамики, включающих непроводящие области.

На фиг. 52÷56 приведены также результаты раочетов для закона проводимости, описываемого формулой:

$$\sigma(T) = \begin{cases} 0 \text{ , при } T \le 5 \\ \alpha \cdot 18{,}9 \cdot T^{3/2} \text{ мо/см, при } T > 5 \end{cases} \qquad (4.12)$$

(масштаб измерения температуры $10^{3}{}^{0}$К)

для двух значений α ($\alpha = 1$ – светлые ромбы и $\alpha = 0{,}1$ темные ромбы). Результаты этих двух серий расчетов попадают в область, ограниченную предельной линией „ $\sigma = 0$ " и кривой соответствующей точному решению „ $\sigma = 0/\infty$ " при $T^{*} = 5000^{0}$К, однако друг от друга они резко отличаются. Этот факт качественно можно объяснить следующим образом. Искусственная вязкость построена так, что ее величина на фронте преломленной волны в обоих случаях примерно одинакова При $\alpha = 1$ оказываетёя, что искусственная вязкость преобладает над магнитной вязкостью $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ при $\alpha = 0{,}1$ картина обратная. Поэтому первый олучай близок к точному решению с законом (4.8) при $T^{*} = 5000^{0}$К, а второй к модели „ $\sigma = 0$" ,в которой преломленная волна является чисто газодинамической .

§ 5. Некоторые оценки и обсуждение результатов

В предыдущем параграфе отмечалось различие между рассматриваемой задачей и классической задачей о распаде магнитогидродинамического разрыва. Это различие, в частности, заключается в наличии эффектов джоулева нагрева и диффузии магнитного поля. Проведем качественную оценку действия этих эффектов.

Обозначим характерное значение проводимости слева от контактной поверхности через σ_1 ; тогда эффективная глубина проникновения магнитного поля в эту область к моменту времени t составит $\ell \sim c\sqrt{t/\sigma_1}$

Диффузией магнитного поля в задаче можно пренебречь, если d – зона, охваченная газодинамическим движением в отраженной волне, значительно превосходит ℓ $d = D_1 t \gg \ell$, т.е. если выполнено неравенство

$$\frac{D_1}{c}\sqrt{\sigma_1 \cdot t} \gg 1 \qquad (4.13)$$

где D_1 – скорость отраженной волны.

Аналогичным неравенством оценивается относительная роль джоулева нагрева в энергетическом балансе течения.

Рассмотрим преломленную волну. Пусть приращение плотности на ее фоне равно $\Delta\rho$. При этом максимальное возможное возрастание магнитного поля за фронтом, которое имело бы место в случае "вмороженности", равно $\Delta H = H_0 \Delta\rho/\rho_0$

(ρ_0 – плотность на фоне перед преломленной волной).

Суммарное увеличение поля к моменту t составило бы $Q_1 = H_0 D_0 t \Delta\rho/\rho_0$, однако, если фон непроводящий, то возрастанию поля препятствует его "утечка" через фон.

По аналогии с тепловыми задачами, где в изотермических областях при постоянной температуре существует конечный поток тепла, здесь также через непроводящий фон существует конечный поток магнитного поля, пропорциональный величине E_0. Кроме того "утечка" магнитного поля осуществляется и через контактную поверхность. Интегральную "утечку" поля Q_2 можно оценить, исходя из уравнения Максвелла

$$Q_2 = \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial H}{\partial t} dx dt \simeq -c(E_0 - E_1)t \qquad (4.14)$$

Здесь x_1, x_0 – координаты контактной поверхности и фронта преломленной волны, E_1, E_0 – характерные значения напряженности электрического поля соответственно в районе контактной поверхности и на фоне. Можно показать, что $E_1 = \sim - H_0/c\sqrt{\sigma_1 t}$. Тогда

$$Q_2 \sim -\left(c E_0 t + \frac{H_0}{\sqrt{\sigma_1}}\sqrt{t}\right) \qquad (4.15)$$

В (4.15) первый член соответствует "утечке" через фон, второй через контактную поверхность. Очевидно, что влияние второго члена с ростом t падает.

Проведенные оценки показывают, что асимптотически при больших t влияние джоулева нагрева и диффузии поля в области олева от контактной поверхности становится исчезающе малым. В то же время из уравнения величин Q_1 и Q_2 следует, что "утечка" магнитного поля через фон с течением времени сохраняется как постоянно действующий фактор, причем величина этой "утечки" определяется напряженностью электрического поля на

фоне E_0 .

Сама же величина E_0 зависит от конкретного вида закона $\sigma(T)$ и напряженности магнитного поля H_0 . Таким образом для каждого конкретного закона $\sigma(T)$ решение с ростом t стремится к "своему" асимптотическому решению. В частности, картина течения, образующегося при ударе волн о "магнитную стенку", при $\sigma(T)$, описываемом формулой,

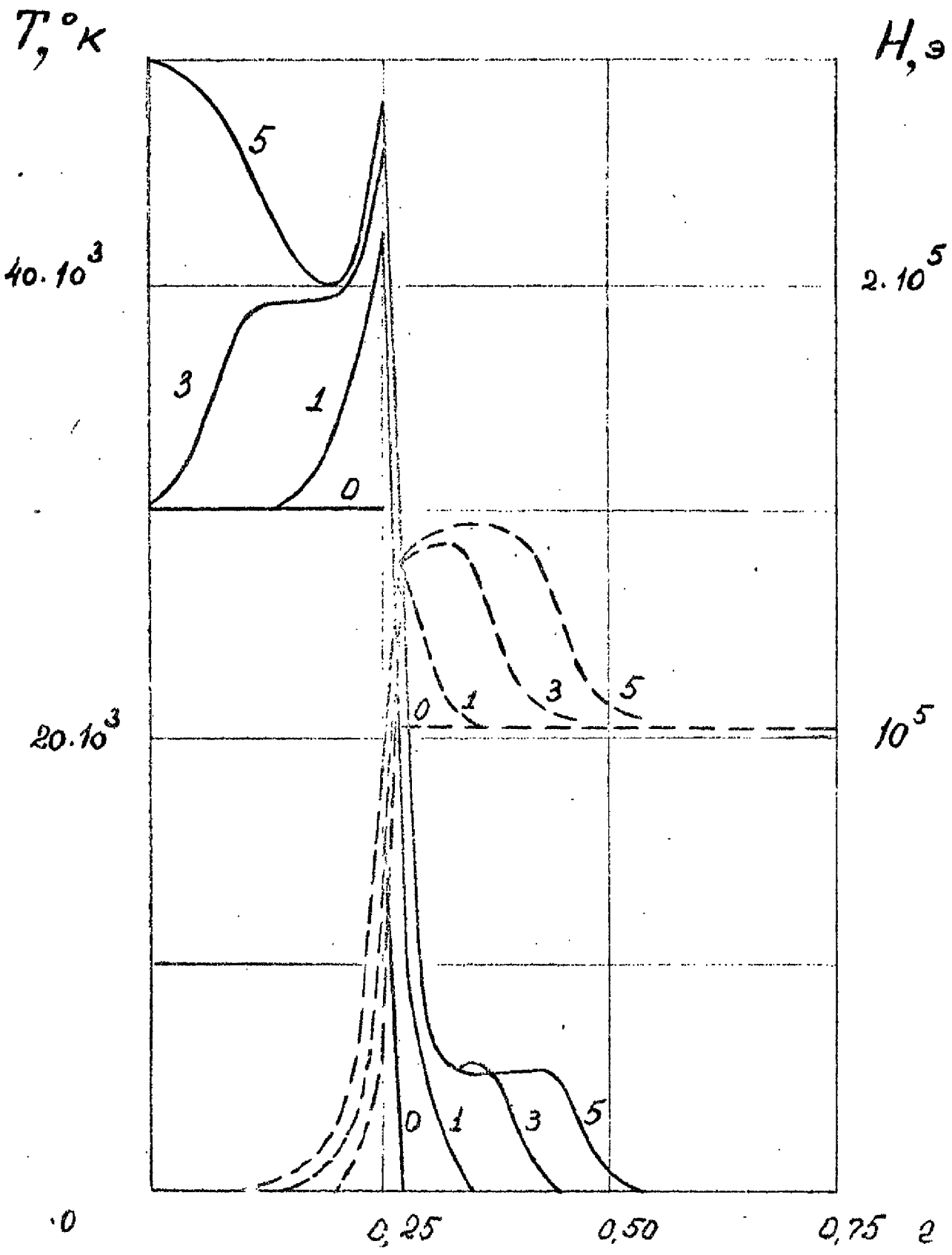
$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } T \le T^* \\ \sigma_0 & \text{при } T > T^* \end{cases} \qquad (4.16)$$

существенно зависит от величины σ_0 , и не выходит асимптотически с ростом t на точное решение с законом (4.8).

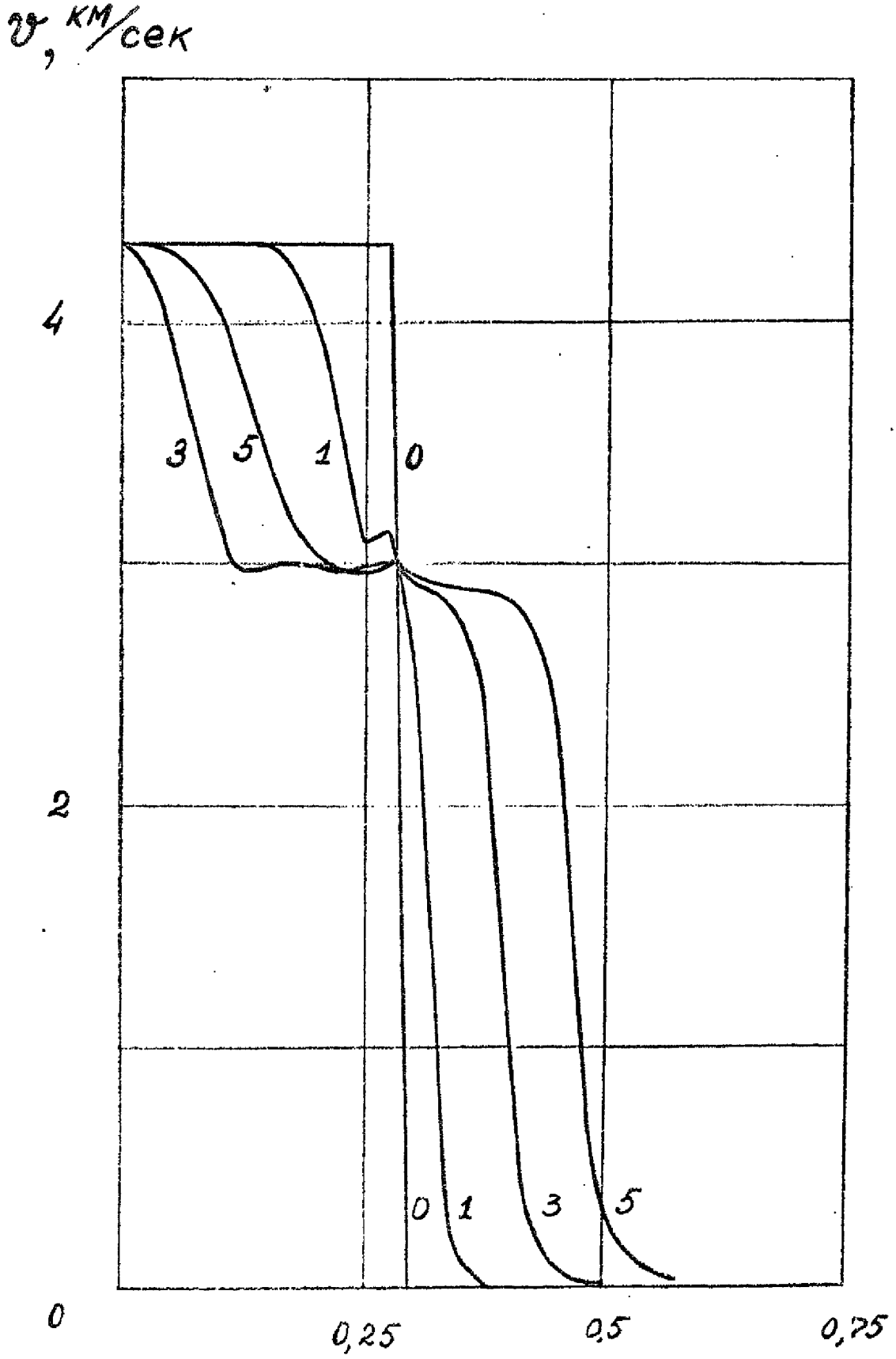
В численных расчетах в районе контактной поверхности в ряде случаев наблюдается образование высокотемпературного слоя газа - T -слоя. Значение максимальной температуры в этом слое, а также скорость ее роста существенно зависит от особенностей закона $\sigma(T)$. Этот факт иллюстрируют фиг. 61 на которых изображено пространственное распределение температуры на различные моменты времени для задачи об ударе волны о "магнитную стенку" при закона $\sigma(T)$, описываемом формулой (4.12). На фиг. 61 изображена также картина изменения со временем магнитного поля H , на фиг. 62 - типичное распределение скорости v.

Графики выполнены в массовых координатах, масштаб времени $t_0 = 0{,}26 \cdot 10^{-4}$ сек.

На основании численных расчетов можно сделать вывод, что при взаимодействии ударной волны с магнитным полем в районе контактной поверхности появляется высокотемпературное образование T -слой с относительно невысокой плотностью газа.



Фиг 61



Фиг 62

В зоне T -слоя сосредоточены также интенсивные электрические токи.

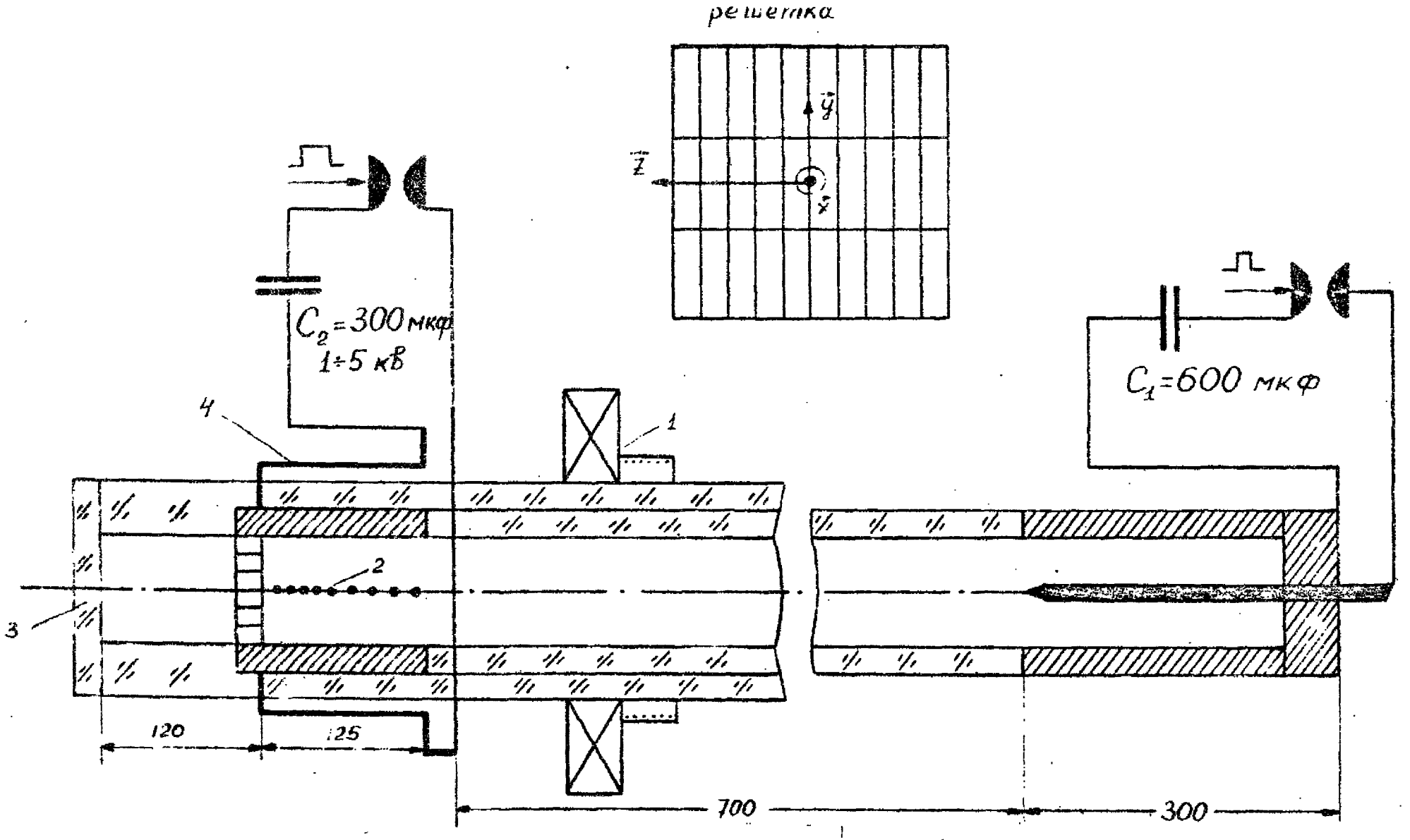
С точки зрения приведенных оценок наличие T -слоя расширяет пределы их применимости. Проводимость газа разогретого в T -слое, возрастает (что соответствует) эффективному увеличению средней проводимости σ_1 в формулах (4.13), (4.15).

Отметим, что немонотонное изменение различных параметров преломленной волны с ростом H_0, отмеченное на точных решениях при законе (4.8), наблюдается и при других зависимостях $\sigma(T)$, например при законе (4.12) для достаточно больших α.

§ 6. Эксперимент по обнаружению Т-слоя и его сравнение с результатами численных расчетов

В ИТПМ СОАН был поставлен эксперимент по исследованию процесса прохождения и отражения сильной ударной волны ст магнитного поля при числах $Re_m \leq 10$[7]. Идея эксперимента состояла в следующем. Для получения сильных ударных волн использовался коаксиальный электрический разрядник (фиг. 63), позволяющий инициировать волны, движущиеся со скоростью до 30 км/сек.

Равномерное взаимодействие электропроводного газа, возникающего за фронтом ударной волны, с магнитным полем обеспечивалось так называемой токовой решеткой. Устройство токовой решетки очень просто: на пути проводящего газа равномерно по поперечному сечению канала натягивается несколько медных лент, через которые пропускается электрический ток. Поскольку


решетка
$\vec{y}$
$\vec{z}$
$\vec{x}$
$C_2 = 300$ мкф
1÷5 кВ
$C_1 = 600$ мкФ
1
2
3
4
120
125
700
300

Фиг. 63

проводимость меди на несколько порядков больше проводимости газа при $T \leq 5.10^{4}$°К, то для магнитного поля решетку можно рассматривать как идеально проводящую стенку. Поэтому набегающий на решетку проводящий газ будет усиливать магнитное поле и заметно тормозиться. В то же время решетка может занимать очень небольшую часть ($\lesssim 0,1$) площади поперечного сечения канала и быть прозрачной для газа.

Картина торможения электропроводного газа при его взаимодействии с магнитным полем токовой решетки показана в [7]. На фотографиях представлены так называемые СФР-граммы (скоростные фоторегистрограммы) прохождения светящихся масс газа сквозь магнитное поле. На каждой фотографии ударная волна и газ движутся снизу вверх, а время отсчитывается слева направо. Эксперименты проводились на воздухе в канале с квадратным поперечным сечением размером 5x5 см^2. В качестве параметра использовалась начальная величина напряженности магнитного поля.

Видно, что при нулевом магнитном поле газ проходит через решетку, практически не затормозившись. По мере усиления начального магнитного поля у решетки возникает отраженная ударная волна, а скорость и светимость прошедшей через решетку ударной волны уменьшаются. При больших полях ($H \geq 6600$ э , что соответствует величине параметра взаимодействия $R_M \geq 0,5$) становится отчётливо видно, что за падающей ударной волной движется светящийся слой газа, отражающийся от магнитного поля, не доходя до решетки. Скорость этого слоя вначале близка к скорости падающей волны, поэтому его свечение нельзя объяснить нагревом газа в отраженной ударной волне, которая в начальной

стадии процесса является весьма слабой. Этот слой далее резко тормозится и начинает двигаться в обратном направлении, что может быть обусловлено только силами электродинамического происхождения. Отсюда можно сделать вывод о том, что в этом слое сосредоточен почти весь электрический ток. С увеличением поля (H = 7600 э) отделение слоя от падающей ударной волны и его торможение становятся более заметными. Измерения напряженности магнитного поля с помощью магнитных зондов показали, что оно практически полностью вытесняется проводящим газом, а напряженность поля в области между решеткой и плазмой может возраотать вследствие этого вытеснения в 2+3 раза.

Для качественного анализа процессов, протекающих в описанном эксперименте, была проведена серия численных расчётов на ЭВМ. Схема эксперимента весьма близка к постановке задачи о взаимодействии ударной волны с магнитным полем, рассмотренной ранее в этой главе.

Отличие состоит лишь в форме краевых условий. В §§ I-5 магнитное поле на правой неподвижной границе поддерживалось постоянным и равным начальному. В данной задаче, чтобы смоделировать влияние токовой решетки, в качестве правой границы рассматривается стенка из идеального проводника, и условие по магнитному полю задается на ней в виде $E=0$.

В эксперименте токовая решетка является прозрачной для вещества. В численных расчетах, которые проводятся для фиксированной массы газа, возможность выхода вещества через границы не предусмотрена. Поэтому по газодинамике правая граница рассматривается как неподвижная непроницаемая стенка, и решение

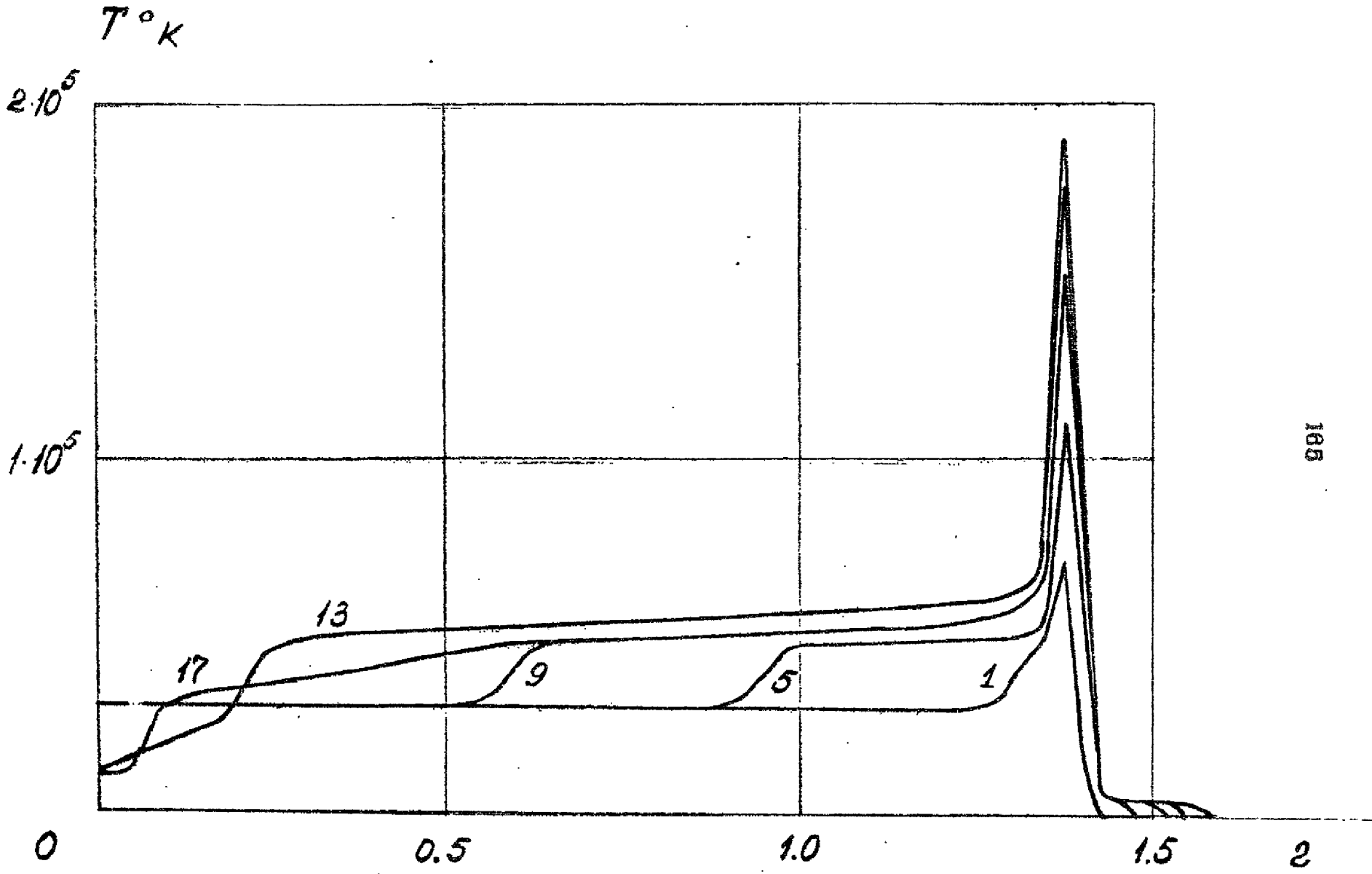
представляет интерес лишь до того момента, пока преломленная ударная волна ее не достигла.

В качестве левой границы рассматривался поршень из идеального проводника, на котором задается режим изменения скорости со временем. Этот режим подбирается так, чтобы в некоторой степени смоделировать характер движения газа за пробкой горячей плазмы в эксперименте.

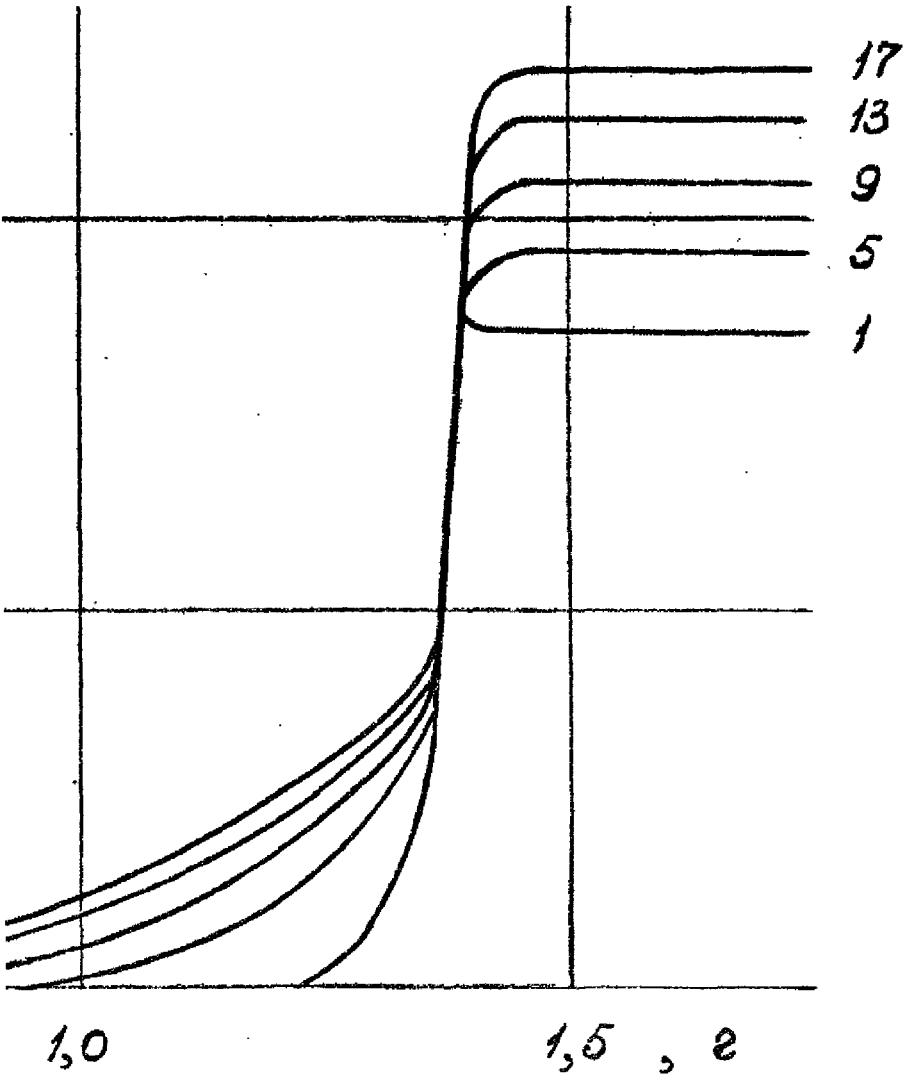
Расчёты проводились для той же исходной ударной волны, что и в § I. Напряженность начального магнитного поля варьировалась. Предполагалось, что для плазмы справедливо уравнение состояния идеального газа; зависимость проводимости от температуры бралась в форме (4.I2).
Процессы ионизации и теплопереноса не учитывались.

На фиг 64-66 представлены результаты одного из расчетов для начального поля $H_0 \sim 1{,}5 \cdot 10^5$ э и величины α в законе (4.I2) равной $\alpha = 0{,}1$. Графики выполнены в массовых координатах; масштаб времени $t_0 = 0{,}25.10^{-4}$ сек.

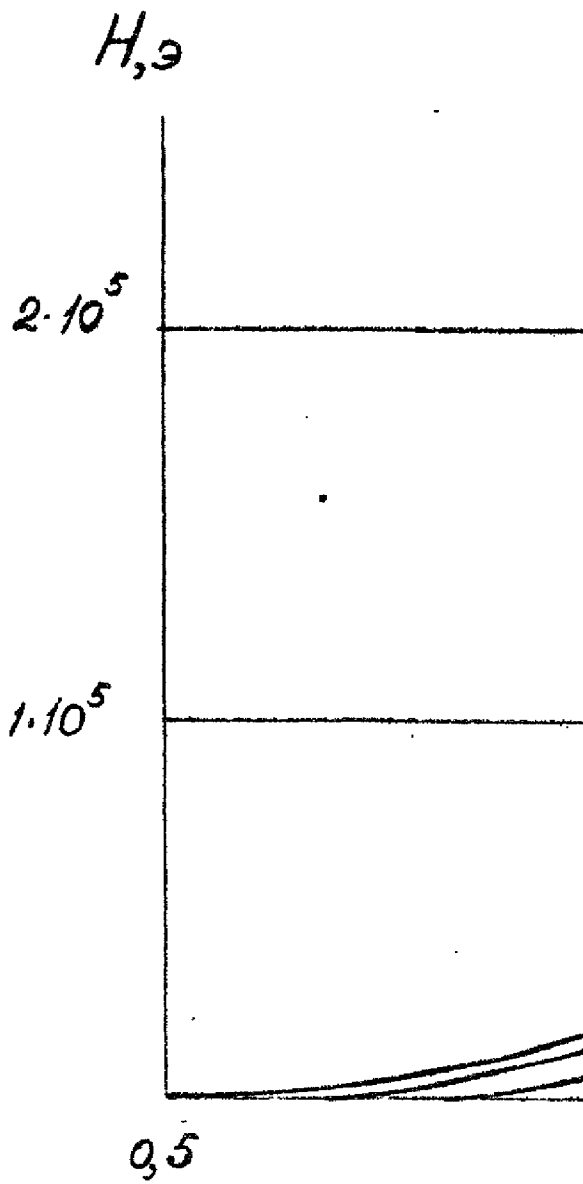
Отметим, что в начальный момент картина течения приблизительно такая же как и в задаче об ударе волны о поле при постоянном H_0 на правой границе. Налево отражается ударная волна, которую с хорошей степенью точности можно считать газодинамической. Направо уходит преломленная волна; в районе контактной поверхности зарождается Т-слой. Однако, так как правая граница является стенкой из идеального проводника, магнитное поле не может через нее "вытечь" из рассматриваемой системы и начинает возрастать перед преломленной ударной волной. Рост магнитного поля приводит к повышению магнитного давления на фоне.

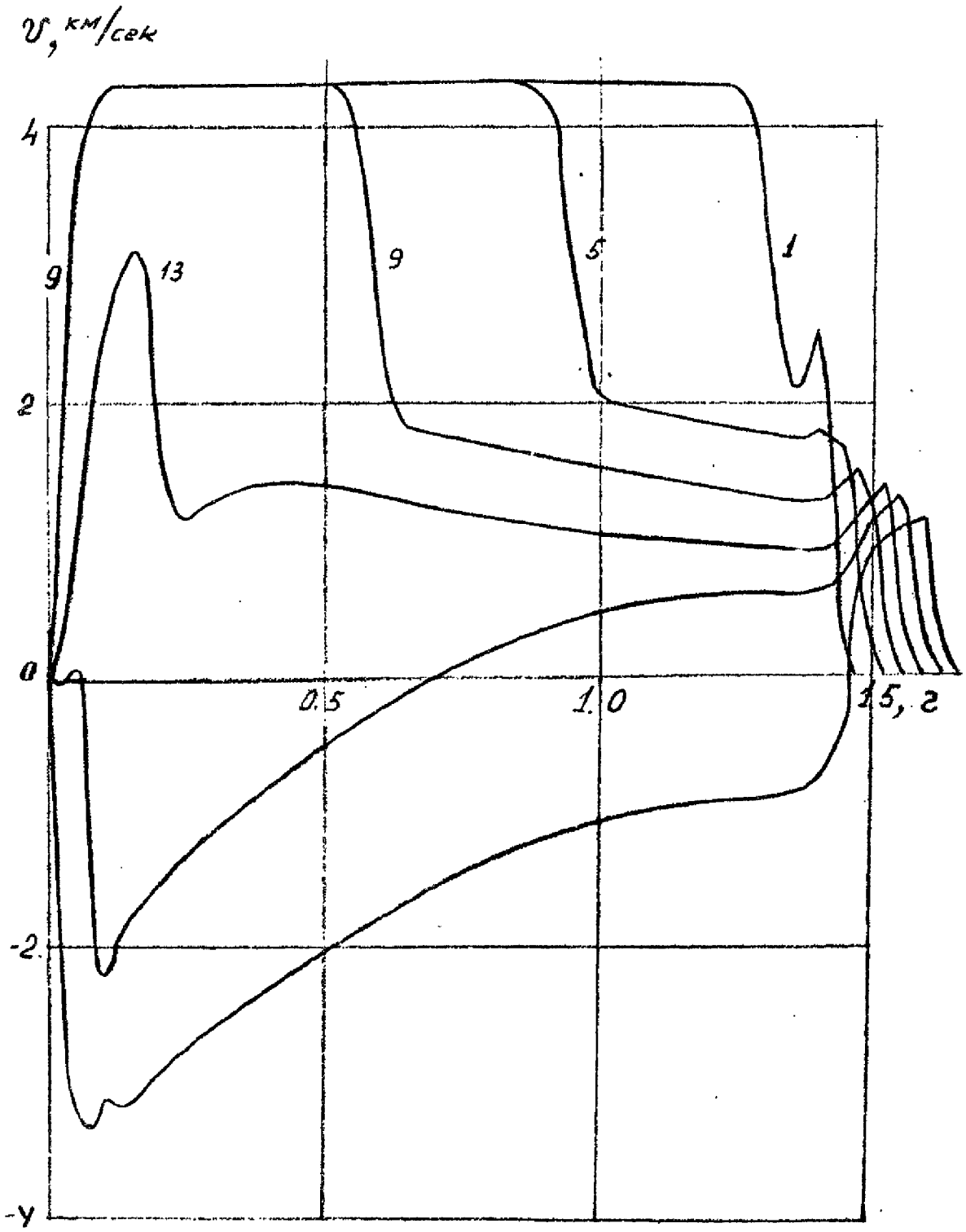


фиг. 64



Фиг. 65


H, э
2·10^5
1·10^5
0,5



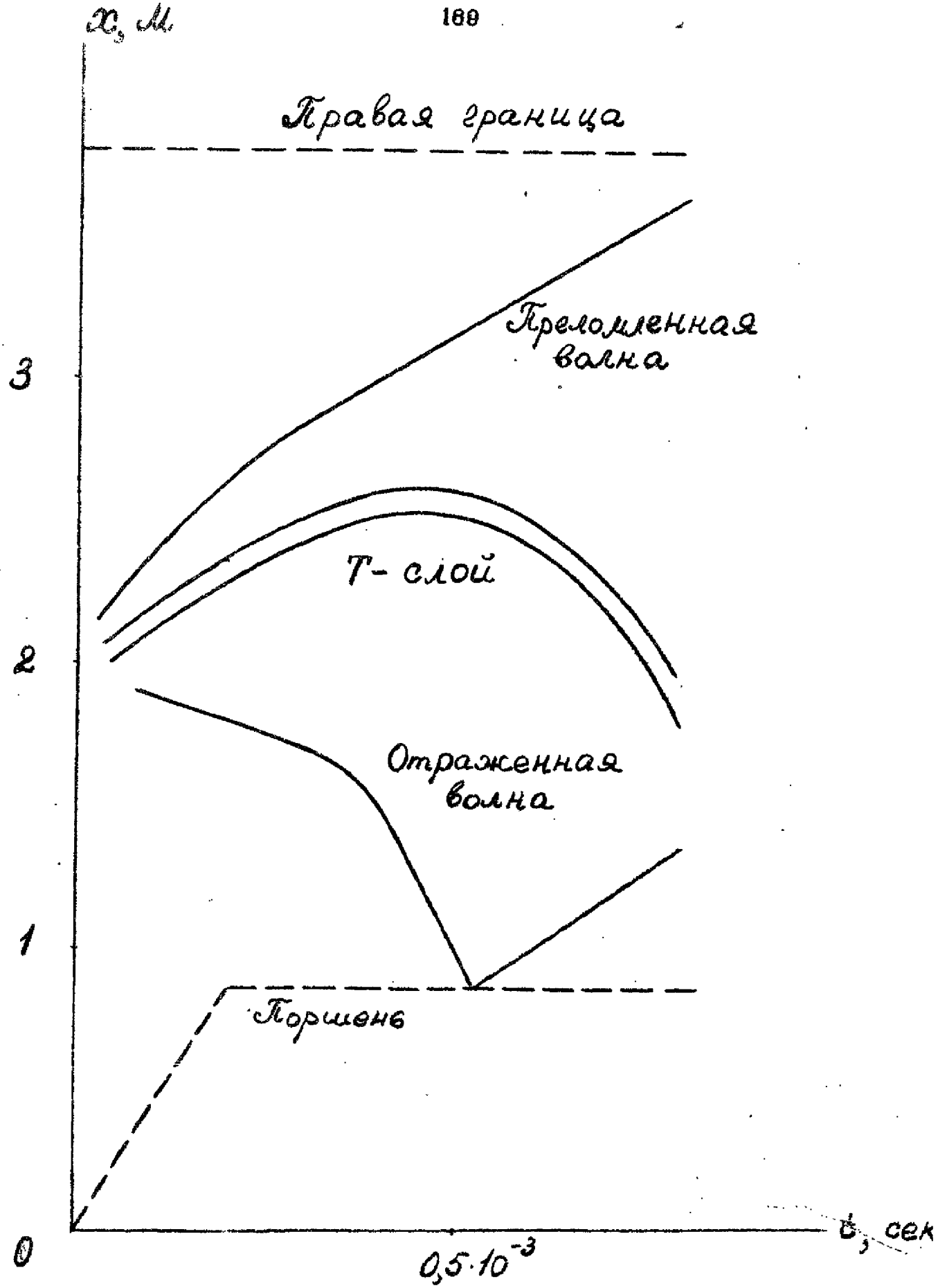
Фиг. 66

Контактная поверхность и связанный с ней Т-слой начинает тормозиться.

На фиг. 67 представлена x, t - диаграмма процесса. Из рисунка ясен характер движения поршня (левой границы). Видно также, что преломленная волна со временем выходит на режим с постоянной скоростью распространения. Это соответствует тому, что температура в ней упала ниже порогового значения и газ за ее фронтом, оделавшись непроводящим, перестал взаимодействовать с магнитным полем. Движение Т-слоя обозначено двумя линиями, являющимися траекториями концов счетного массового интервала, в котором температура максимальна. Диаграмма показывает, что затормозившись Т-слой начинает понятное движение.

Отраженная волна испытывает ускорение, которое связано с волной разрежения, образующейся в результате остановки поршня.

Сравнение x, t -диаграмм, полученных в расчете и эксперименте, позволяет сделать вывод о качественном совпадении характера процессов, и предположить, что в данном эксперименте обнаружено явление Т-слоя. Более строгие экспериментальные доказательства существования Т-слоя могут быть получены только после детальных экспериментальных исследований и количественного сравнения их результатов с расчетами.


x, м
Правая граница
Преломленная волна
T- слой
Отраженная волна
Поршень
3
2
1
0
0,5·10⁻³
t, сек

фиг. 67

Заключительные замечания

I. Изложенные выше результаты позволяют установить существование нового физического явления, состоящего в том, что при неотационарном взаимодействии сжимаемой проводящей среды с магнитным полем в ней при определенных условиях возникает, развивается и самсддерживается высокотемпературный сравнительно узкий слой газа (Т-слой), который может существенным образом перестроить первоначальную картину течения.

2. Содержание глав I-IУ иллюстрирует характер этого явления в различных задачах магнитной гидродинамики и дает основание сформулировать условия его возникновения:

а) Проводимость среды σ должна увеличиваться с ростом температуры, т.е. $\partial \ln \sigma / \partial \ln T > 0$

б) Значение параметра гидромагнитного взаимодействия в окрестности точки возникновенин Т-слон в момент его возникновения по порядку величины должно быть равным или большим единицы.

в) Наличие процессов теплопереноса приводит к ограничению роста температуры в Т-слое и его "размытию" по массе. При коэффициенте теплопроводности, превышающем некоторое критическое значение, образование Т-слоя вообще не наблюдается.

Т-слой характеризуется следующими внешними признаками: высокая (по сравнению со средней) температура и низкая плотность вещества, большая плотность электрических токов, резкое локальное изменение напряженности магнитного поля. Процесс

развития Т-слоя зависит от особенностей законов $\sigma = \sigma(T,\rho)$, $\varkappa = \varkappa(T,\rho)$, закона изменения магнитного поля со временем и характера гидродинамического разлета.

3. Важным аспектом явления Т-слоя является вопрос о его пространственной устойчивости. Т-слой – эффект существенно нелинейный. Поэтому на основе обычного линейного анализа нельзя дать окончательный ответ на вопрос о его устойчивости+). Достаточно полное теоретическое исследование устойчивости Т-слоя возможно лишь путем двухмерных (а в дальнейшем трехмерных) расчетов на ЭВМ соответствующих нестационарных задач магнитной гидродинамики. Работа в этом направлении в настоящее время ведется.

Однако, экспериментальные данные по исследованию характера течений плотной плазмы в интересующем нас диапазоне параметров [7], [39], показывают, что заметных неустойчивостей не наблюдается.

4. Явление Т-слоя имеет некоторые черты, общие с известными явлениями скинирования и перегревной неустойчивости.

Известно [36], что в классическом скин-эффекте эффективная глубина проникновения магнитного поля в проводник за характерное время тем меньше, чем больше его проводимость.

+) Обзор работ по анализу неустойчивостей в магнитной гидродинамике дан в [29], [44]; учтена лучистая теплопроводность в [43].

При этом электрические токи сосредоточены у поверхности проводника в слое, толщина которого определяется эффективной глубиной проникновения поля. Очевидно, что в этой области происходит выделение джоулева тепла и связанное с ним местное повышение температуры. Обратное влияние роста температуры на изменение проводимости, а также эффекты, связанные со сжимаемостью среды, в классической теории скин-эффекта не рассматриваются.

В работах [4], [5], [6] учитывалась нелинейная зависимость $\sigma = \sigma(T, \rho)$ при $\frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln T} > 0$. Это влекло за собой сокращение глубины скинирования со временем. В работах [37], [38] рассматривалась зависимость другого рода $\frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln T} < 0$. Там наблюдался обратный эффект – глубина скинирования увеличивалась.

В главе I показано, что Т-слой возникает в сжимаемой проводящей среде не всегда. Как правило, он возникает спустя заметное время после начала проникновения магнитного поля в расширяющуюся плазму. Расчеты показывают, что в том случае, когда охлаждение газа вследствие гидродинамического разлета достаточно велико, Т-слой вообще не развивается, хотя благодаря наличию заметной начальной проводимости среды по крайней мере на начальной стадии процесса имеет место заметное скинирование поля. Таким образом, скинирование поля не всегда приво-

дит к возникновению Т-слоя, даже в случае $\frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln T} > 0$. И, наоборот, при полном отсутствии скинирования в движущейся плазме, как показывают расчеты, могут возникать сильные неравномерности по температуре, за счет неравномерного выделения джоулева тепла.

В главе П построен пример такого решения, когда в плазме несмотря на постоянную по пространству плотность тока существует пик температуры вблизи ее границы с вакуумом.

Отличие эффекта Т-слоя от скин-эффекта особенно ярко проявляется при взгляде на него как на макроскопическое самоподдерживающееся образование, развивающееся благодаря существованию в плазме особого рода нелинейной неустойчивости.

В физике известен принцип, который гласит, что наличие в среде диссипативных процессов может приводить не к затуханию возмущений, а к их нарастанию. Применительно к магнитной гидродинамике этот принцип был сформулирован Леонтовичем (перегревная неустойчивость, см. [29]). Обычный анализ диссипативной неустойчивости [29], [30], [45] проводится для линеаризированных уравнений и выясняет, как правило, лишь границу устойчивости малых возмущений. Как показывают результаты главы Ш, область параметров, где наблюдается "подхват", т.е. развитие возмущений конечной величины в Т-слой и область параметров, в которой имеет место неустойчивость при бесконечно-малых возмущениях, в ряде случаев не совпадают.

В настоящей работе исследуются не только условия возникно-

вения перегревной неустойчивости с учетом нелинейных эффектов, но и показано, что она может приводить к развитию в плазме макроскопического самоподдерживающегося образования - Т-слоя. Выяснятся ряд свойств такого образования, его структура и его влияние на ход процессов в ряде магнитогидродинамических задач.

5. Существование Т-слоя в плазме приводит к фундаментальным следствиям:

Во-первых, развитие Т-слоя приводит к возможности нагрева отдельных участков плазмы до температур во много раз превышающих среднюю температуру плазмы.

Во-вторых, наличие Т-слоя усиливает взаимодействие плазмы с магнитным полем, в силу чего, например, низкотемпературная плазма и даже непроводящий газ может с помощью Т-слоя как поршня эффективно взаимодействовать с магнитным полем.

В-третьих, благодаря наличию Т-слоя в ряде случаев магнитное поле может играть роль своеобразного катализатора, позволяющего сравнительно холодной плазме интенсивно преобразовывать свою энергию в световое излучение.

6. Исследования, выполненные в предыдущих главах, проведены в приближении одномерной геометрии. Анализ явления неодномерности задачи, безусловно, играет важную роль как при рассмотрении устойчивости Т-слоя, так и при рассмотрении процессов в конкретных физических устройствах, где появление Т-слоя может быть завуалировано различными осложняющими факторами. Однако, одномерный подход оправдан, поскольку изучается явление, имеющее общий физический характер, которое прежде всего может быть выявлено и понято на простейших моделях.

7. Важную роль играет также последовательный учет физических явлений, определяющих структуру и свойства Т-слоя.

В последнее время выполнена большая серия расчетов по подробному изучению сильноточного разряда через литиевую плазму. Краткое изложение этих результатов дано в [46]. Задача описывается уравнениями радиационной магнитной газодинамики в одномерном нестационарном приближении. Перенос излучения описывается многогрупповым кинетическим уравнением. Граничный режим электромагнитного поля определяется из электротехнического уравнения внешней цепи. Термодинамические функции литиевой плазмы находятся из уравнений Саха. Проводимоотъ вычисляется по уравнению Больцмана в приближении парных столкновений при дебаевском потенциале взаимодействия. Коэффициенты поглощения светового излучения расчитывались А.Ф. Никифоровым и В.Б. Уваровым [47], при этом тормозное поглощение находилось в приближении Борна-Эльверта, а фотоэффект - в приближении Вайнштейна.

Расчеты показали, что при определенных условиях происходит возникновение и развитие Т-слоя. Установлено, что возмущения достаточно большой амплитуды могут развиваться в несколько одновременно существующих Т-слоев.

8. В работах [48][49] при аналогичных физических приближениях проводился расчет процесса электродинамического ускорения плазмы. Было установлено, что внесенное в непроводящий газ температурное возмущение, имитирующее начальный электрический пробой, растет и развивается в Т-слой. Показано, что существуют нелинейные механизмы, обуславливающие при определенных условиях "размножение" Т-слоя. В результате в пространстве возникает периодическая структура, состоящая из Т-слоев, разделенных промежутками холодного газа.

Литература

I Отчет О.654 ИПМ АН СССР и ИТПМ СО АН СССР. Научные руководители Тихонов А.Н., Самарский А.А., Заклязьминский Л.А. Исполнители Гольдина Д.А., Дегтярев Л.М., Курдюмов С.П., Соколов В.С., Попов Ю.П., Фаворский А.П. "О некоторых особенностях взаимодействия плазмы с магнитным полем". Москва, 1965 г.

2 Отчет О.655 ИПМ АН СССР и ИТПМ СО АН СССР. Научные руководители Тихонов А.Н., Самарский А.А., Заклязьминский Л.А. Исполнители Гольдина Д.А., Курдюмов С.П., Равинская В.Н., Соколов В.С. "Исследование условий возникновения и устойчивости токового слоя при нестационарном взаимодействии электропроводного газа с магнитным полем". Москва, 1966 г.

3 А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, Л.А. Заклязьминский, П.П. Волосевич, Л.М. Дегтярев, С.П. Курдюмов, Ю.П. Попов, В.С.Соколов, А.П. Фаворский. "Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики". ДАН СССР, т. 173, № 4, 1967.

4. R.E. Kidder „Compression of magnetic field inside a hallow explosive-driven cylindrical conductor" University of California Radiation Laboratory, 1965, preprint 14349.

5. H. Burkhardt. Int. Symposium on magnetohydrodinamic electrical power generation. Salzburg. 1966.

6 В.Ф. Дьяченко, В.С. Имшенник. Сб. Вопросы теории плазмы. вып. 5, Атомиздат, М., 1967.

7 В.А. Деревянко, Л.А. Заклязьминский, Е.Ф. Лебедев. "Экспериментальное исследование отражения ударной волны от токовой решетки". ПМТФ, № 4, 1968 (136).

8 А.А. Самарский, П.П. Волосевич, М.И. Волчинская, С.П.Курдюмов, "Численные методы решения нестационарных одномерных задач магнитной гидродинамики". ИПМ,АН СССР, 1967г.

9 Ю.П.Попов, А.А. Самарский, „ Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газодинамики и магнитной гидродинамики" ИПМ АН СССР, препринт N16, Москва, 1969.

10 Л.М. Дегтярев, А.П. Фаворский, "Потоковый вариант метода прогонки", ЖВММФ, N3, 1968.

11 Л.М. Дегтярев, А.П. Фаворский, "Потоковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами", ЖВММФ, N2, 1969.

12 Р.Д. Рихтмайер. "Разностные методы решения краевых задач". Изд.иностр.лит. 1960 г.

13 П.П. Волосевич, Е.И. Леванов, "Автомодельная задача о движении плоского поршня в теплопроводном газе при наличии вмороженного магнитного поля". Сб. Численные методы решения задач математической физики. М., Изд."Наука", 1966, 87-102.

14 П.П. Волосевич, "Движение газа перед поршнем в магнитном поле в случае нелинейной теплопроводности и проводимости", Сб. Численные методы решения задач математической физики, М., Изд. "Наука", 1966, 103-112.

15 П.П. Волосевич, С.П. Курдюмов, Ю.П. Попов, "Влияние конечной проводимости на взаимодействие ударной волны с магнитным полем", МЖГ, 1968 г. N4

16 П.П. Волосевич, С.П. Курдюмов, Ю.П. Попов, "Взаимодействие ударной волны с магнитным полем в среде с конечной проводимоотью", МЖГ, 1968, № 1.

17 S.C. Lin, E.L. Resler, A. Kantrowitz J. Appl. Phys, 26, № 1, 95, 1955.

18 И.В. Немчинов, "Разлет подогреваемой массы газа в регулярном режиме", ПМТФ, 1964, № 5, 18-29.

19 И.В. Немчинов, "Разлет плоского слоя газа при постепенном выделении энергии", ПМТФ, 1961, № 1, 17-27.

20 П.П. Волосевич, В.С. Соколов, "Автомодельная задача о разлете электропроводного газа в среду с заданным осевым магнитным полем", Магнитная гидродинамика, 1967, 1, 43-46.

21 П.П. Волосевич, С.П. Курдюмов, Ю.П. Попов, А.А.Самарский. "Автомодельная задача о сильноточном разряде через плазму с учетом нелинейной теплопроводности". (в печати).

22 Л. Спитцер, "Физика полностью ионизованного газа", Изд. "Мир", 1965.

23 R. Marschak. „An influence of the radiation on the behavior of the shock waves". Phys. Fluids, 1958, 1, 24-29.

24 Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер, "Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений", М., Физматгиз, 1963.

25 Л.И. Седов, "Методы подобия и размерности в механике", М., Гостехиздат, 1962.

26 В.П. Коробейников, Е.В. Рязанов, Н.С. Мельников, "Теория точечного взрыва", М., Гостехиздат, 1962.

27 А.А. Самарский, "Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа", ЖВММФ, 1962, 2, № 1.

28. Г.Н. Козлов, "Теплофизика высоких температур", 3, № 4, 1965.

29 Б.Б. Кадомцев, "Гидромагнитная устойчивость плазмы", Сб. Вопросы теории плазмы, вып. 2, Госатомиздат, 1963.

30 Ю.В. Саночкин, "О диссипативной неустойчивости в магнитной гидродинамике". Магнитная гидродинамика, 1965, № 3.

31 С.Е. Гребенщиков, М.Д. Райзер, А.А. Рухадзе, А.Г. Франк, "Отражение и преломление ударных волн в магнитной гидродинамике", ЖТФ, 1961, т. 31, стр. 529.

32 А.Г. Куликовский, Г.А. Любимов, "О возможных типах разрывов со скачком проводимости", Изв.АН СССР, ОТН, № 4, 1959.

33 Г.А. Любимов, "Исследование стационарных поверхностей разрыва со скачком проводимости газа в электромагнитном поле", Изв.АН СССР, ОТН, № 5, 1959.

34 А.Г. Куликовский, Г.А. Любимов, "О магнитогидродинамических ударных волнах, ионизирующих газ", ДАН СССР, 129, № 1, 1959.

35 А.Г. Куликовский, Г.А. Любимов, "Простейшие задачи, содержащие ионизирующую газ ударную волну в электромагнитном поле", ДАН СССР, 129, № 3, 1959.

36 Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.

37 М.И. Киселев, "К динамике проводящей сплошной среды в сильном магнитном поле", Инж.журнал, Ш, вып. 3, 1963.

38 М.И. Киселев, К.П. Станюкович, "К теории нелинейного скин-эффект", ТВТ, т. 4, № 1, 1966.

39 В.А. Деревянко, Л.А. Заклязьминский и др. "Исследование нестационарного взаимодействия сгустка проводящего газа с заданным электрическим контуром", ПМТФ, № 2, 1968.

40 Щерман, "Расчет электропроводности ионизованных газов", Вопросы ракетной техники, № 4, 1961.

41 В.И. Яковлев, "О взаимодействии расширяющегося плазменного шнура с внешним магнитным полем", ПМТФ, № 6, 1963.

42 X. Nguyen Duc et A. Lemarquand, „Etude des instabilites de Rayleigh - Taylor en magnetohydrodynamique" Colloque sur La Production magnetohydrodynamique d'energie electrique, Varsovie, 1968.

43 А.А. Рухадзе, С.А. Тригер, "Теория равновесия и устойчивости сильноточного самосжатого разряда в плотной оптически непрозрачной плазме в условиях лучистой теплопроводности", Препринт, № 168, ФИАН СССР, 1968 г.; Препринт, № 71, ФИАН СССР, 1967 г.; ПМТФ, № 3, 1968 г.

44 А.А. Веденов, Е.П. Велихов, Доклад на III Международном симпозиуме по МГД преобразованию энергии, 2, Зальцбург, 1966 г.

45 Wright J. K. „Temperature Instability in Magnetohydrodynamic Flow."
Pros. Phys. Soc. 1963, V 81, № 3, 498,

46 Н.Г. Басов, П.П. Волосевич, В.Я. Гольдин, Н.Н. Калиткин, С.П. Курдюмов, Ю.П. Попов, В.А. Розанов, А.А. Самарский, Б.Н. Четверушкин, "Численный расчет сильноточного разряда в литиевой плазме". Доклад на IX Международной конференции по явлениям в ионизированных газах. Бухарест, 1969г.

47 А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров, "Коэффициенты поглощения света в плазме", Препринт, 1969 г., ИПМ АН СССР.

48 А.С. Беляев, Д.А. Гольдина, Л.В. Лесков, Ю.Куликов, С.П. Курдюмов, Ю.П. Попов, В.В. Савичев, А.А. Самарский, С.С. Филиппов, "Нестационарное ускорение плазмы в одномерном МГД приближении". Часть I. Нелинейный механизм последовательного образования Т-слоев в движущейся среде. Препринт ИПМ АН СССР, 1969 г.

49 А.С. Беляев, Г.В. Данилова, Л.В. Лесков, Ю.Н. Куликов, С.П. Курдюмов, Ю.П. Попов, В.В. Савичев, А.А. Самарский, С.С. Филиппов, Л.Ч. Царева, "Нестационарное ускорение плазмы в одномерном МГД приближении". Часть II. Особенности ускорения литиевой плазмы. Препринт ИПМ АН СССР, 1969 г.

Оглавление

		Стр.
Введение	. . . . .	3
ГЛАВА I.	Расширение электропроводного газа в магнитное поле	9
§ I.	Введение	9
§ 2.	Система уравнений магнитной гидродинамики .	I0
§ 3.	Постановка задачи	I3
§ 4.	Результаты расчетов	I6
§ 5.	Обсуждение результатов	39
ГЛАВА II.	Некоторые точные и автомодельные решения нестационарных задач магнитной гидродинамики	43
§ I.	Введение	43
§ 2.	Задача о расширении постоянной массы проводящего нетеплопроводного газа против осевого магнитного поля	47
	п. I. Постановка задачи. Условия автомодельности	47
	п. 2. Автомодельное решение и его физический смысл	50
	п. 3. Анализ автомодельного решения	53
	п. 4. Обсуждение результатов	56
§ 3.	Автомодельная задача о разлете паров проволочки в вакуум против азимутального магнитного поля	64
	п. I. Постановка задачи	64
	п. 2. Условия автомодельности. Система обыкновенных дифференциальных уравнений	68
	п. 3. Размерностный анализ автомодельных решений	72

Стр.

п. 4. Автомодельное решение для случая 76

п. 5. Анализ решения для случая 85

п. 6. Обсуждение результатов 88

ГЛАВА [illegible] Развитие конечных локальных возмущений электропроводности в потоке проводящего газа в присутствии магнитного поля 95

§ I. Введение 95

§ 2. Постановка задачи 97

§ 3. Развитие возмущения первого типа I02

§ 4. Развитие возмущения второго типа I08

§ 5. Обсуждение результатов II3

ГЛАВА IУ. Взаимодействие сильной ударной волны с магнитным полем в среде с конечной проводимостью I23

§ I. Введение I23

§ 2. Постановка задачи I24

§ 3. Точные решения I26

§ 4. Результаты численного решения I46

§ 5. Некоторые оценки и обсуждение результатов . I54

§ 6. Эксперимент по обнаружению Т-слоя и его сравнение с результатами численных расчетов I59

Заключительные замечания I69

Литература I75